О. В. Цоколова

Томский государственный университет,

tov234@mail.ru

НЕГОЛОНГОМНЫЕ ТОРСЫ 1-ГО РОДА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается трехмерное распределение в E_4 (или в области $G \subset E_4$), то есть гладкое отображение, сопоставляющее всякой точке $M \in E_4$ трехмерную плоскость π_3, проходящую через точку M [1, с. 683]. Распределение называется голономным, если соответствующее ему уравнение Пфаффа вполне интегрируемо, и неголономным в противном случае. С распределением однозначно связано векторное поле $(M, \overline{n})$ единичных векторов нормалей плоскостей π_3, называемых нормалями распределения. Основным линейным оператором распределения в точке M назовем линейный оператор A, $A(d\overline{r}) = d\overline{n}$. Пусть A^* – сужение оператора A на плоскость π_3. Его собственные векторы – главные направления 2-го рода в точке M, а собственные значения, взятые с противоположными знаками, – главные кривизны 2-го рода. Оператор A^* разлагается на сумму двух операторов: симметричного B^* и кососимметричного B. Собственные векторы оператора B^* – это главные направления 1-го рода, а его собственные значения, взятые с противоположными знаками, – это главные кривизны 1-го рода $\left(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, k_3^{(1)}\right)$. Полная кривизна 1-го рода $K_1 = -k_1^{(1)} k_2^{(1)} k_3^{(1)}$. Линия распределения называется линией кривизны 1-го рода, если в каждой ее точке направление касательной совпадает с главным направлением 1-го рода. Неголономным торсом 1-го рода (НТ-1) в E_4 называется трехмерное распределение, имеющее нулевую полную кривизну 1-го рода ($K_1 = 0$). Все НТ-1 можно разбить на три вида в зависимости от значений главных кривизн 1-го рода:

A. $k_3^{(1)} = 0,\ k_2^{(1)} \neq 0,\ k_1^{(1)} \neq 0$;

B. $k_3^{(1)} = k_2^{(1)} = 0,\ k_1^{(1)} \neq 0$;

C. $k_3^{(1)} = k_2^{(1)} = k_1^{(1)} = 0$.

Теорема 1. *Если для НТ-1 имеем* $k_3^{(1)} = 0$, $k_2^{(1)} \neq 0$, $k_1^{(1)} \neq 0$, *то конус касательных к его асимптотическим линиям, проходящим через точку* M, *распадается на двумерные плоскости (действительные или мнимые), пересекающиеся по действительной прямой* L, *совпадающей с одной из линий кривизны 1-го рода. Плоскость* π_3 *при перемещении по прямой* L *меняет свое положение. Кроме того, если* $k_2^{(1)} \neq k_1^{(1)}$, *то через каждую точку* M *проходит три взаимно ортогональных линии кривизны 1-го рода. Если жe* $k_2^{(1)} = k_1^{(1)}$, *то, кроме прямой* L, *все прямые, проходящие через* M *ортогонально* L, *будут касательными к линиям кривизны 1-го рода.*

Теорема 2. *Если для НТ-1 имеем* $k_3^{(1)} = k_2^{(1)} = 0$, $k_1^{(1)} \neq 0$, *то касательные к его асимптотическим линиям, проходящим через* M, *заполняют двумерную плоскость* π_2, *совпадающую с плоскостью касательных к линиям кривизны 1-го рода. Плоскость* π_3 *при перемещении вдоль плоскости* π_2 *меняет свое положение.*

НТ-1, для которого $k_3^{(1)} = k_2^{(1)} = k_1^{(1)} = 0$, называется неголономной гиперплоскостью.

Теорема 3. *В E_4 существует единственное (с точностью до постоянных) трехмерное распределение, представляющее собой неголономную гиперплоскость [2].*

Неголономная гиперплоскость определяется во всем четырехмерном пространстве и не имеет особых точек. Неголономная гиперплоскость в каждой точке M имеет единственную линию кривизны 2-го рода. С неголономной плоскостью инвариантно связаны распределения, ортогональные векторным полям главных нормалей и бинормалей винтовых линий. Эти распределения голономны. Поэтому в первом случае E_4 расслаивается на семейство трехмерных цилиндров с двумерными плоскостными образующими.

Во втором случае E_4 расслаивается на семейство трехмерных цилиндров с прямолинейными образующими, а направляющими служат геликоиды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия.* – М.: Наука, 1979. – 759 с.

2. Онищук Н. М. *Неголономная гиперплоскость в четырехмерном евклидовом пространстве* // Вестник Томского гос. университета. Математика и механика. – 2008. – № 3. – С. 10–12.