Ф. Ф. Хамидуллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

fanis_ka90@mail.ru

ВЕКТОРНЫЙ ВАРИАНТ ЗАПИСИ НЕРАВЕНСТВА КОШИ – БУНЯКОВСКОГО

При решении многих математических задач применяется неравенство Коши – Буняковского

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

или

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$$

$$\forall a, b \epsilon R, \forall n \epsilon N, n > 1. \quad (1)$$

Данное соотношение реализуется в варианте равенства тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n}.$$

Рассмотрим неравенство (1) при $n = 2$ и $n = 3$. Введем в рассмотрение векторы $\vec{u}(a_1; a_2)$ и $\vec{v}(b_1; b_2)$, тогда при $n = 2$ неравенство (1) примет вид

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 \leqslant |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2; \quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|; \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|, \quad (2)$$

При $n = 3$ получаем три варианта записи неравенства Коши – Буняковского, если считать, что $\vec{u} = \vec{u}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{v} = \vec{v}(b_1; b_2; b_3)$. При этом условие, когда соотношение Коши – Буняковского выполняется в варианте равенства, имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\vec{u}$ и $\vec{u}$ коллинеарны.

Неравенство Коши – Буняковского имеет тот же геометрический смысл и для векторов n-мерного векторного пространства, если только длину вектора и скалярное произведение векторов определить аналогично тому, как это делается для двумерного и трехмерного пространств.

Соотношение (2) - векторный вариант записи неравенства Коши – Буняковского.

Решим с использованием (2) систему уравнений

$$\begin{cases}(x^3+y^3)^2 = x^2+y^2\\ x^4+y^4=1.\end{cases}$$

Рассмотрим векторы $\vec{u}(x^2;y^2)$ и $\vec{v}(x;y)$, тогда для них имеет место неравенство $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqslant |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$, т. е. $(x^3+y^3)^2 \leqslant (x^4+$ $+y^4)(x^2+y^2)$ (если $(x;y)$-решение заданной системы) $x^2+y^2 \leqslant$ $1\cdot(x^2+y^2)$, значит, неравенство Коши - Буняковского должно выполняться в варианте равенства, а это означает, что векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны, следовательно, $x^2/x = y^2/y$, откуда $x =$ $= y$. Так как $x^4+y^4=1$, то решением системы будут пары $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ и $(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};-\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ (это при дополнительном условии, что $x\neq 0, y\neq 0$). В случае, когда $x=0$ или $y=0$, получаем решения $(0;1),(0;-1),(1;0),(1;-0)$.

Применим (2) для нахождения наибольшего значения функции

$$f(x)=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$$

Рассмотрим векторы $\vec{u}=(\sqrt{x+7};\sqrt{11-x})$ и $\vec{v}=(1;1)$. Тогда $|\vec{v}|=\sqrt{x+7+11-x}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$; $|\vec{v}|=\sqrt{2}$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{x+7}+$ $+\sqrt{11-x}$, и неравенство $\vec{u}\cdot\vec{v}\leqslant|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ примет вид:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\leqslant 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2},$$

т. е. $f(x)\leqslant 6$ при любом допустимом x. Составим уравнение $\frac{\sqrt{x+7}}{1}=\frac{\sqrt{11-x}}{1}$. Очевидно, что его единственный корень равен 2. Значит, $f_{\max}=6$, причем достигается это значение в точке $x=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гомонов С. А. *Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения.* – М.: Дрофа, 2006. – 254 с.

М. Г. Хасанов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, maratkhasanov86@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СОСТОЯНИЕ

Рассматриваются сеточные аппроксимации задач управления в правой части линейного дифференциального уравнения 2-го порядка и/или граничного условия при наблюдении не во всей области, при этом в общем случае присутствуют ограничения как на управление, так и на состояние. Примером является задача минимизации функционала $\int_0^1 u^2(x)dx + \int_0^1 y^2(x)dx$ при следующих ограничениях:

$$
\begin{aligned}
&-\Delta y = f + u, \quad x \in (0,1);\\
&y(1) = y(0) = 0; \quad y \geqslant 0, x \in (0,1), |u| \leqslant 1, x \in (0,1).
\end{aligned}
$$

После аппроксимации данной задачи с помощью конечных разностей можно прийти к схеме, которую в общем случае можно записать в виде

$$J(y,p) = \frac{1}{2}(My,y) + \phi(y) + \frac{1}{2}(p,p) + \theta(p), \tag{1}$$

при ограничении $Ly = p + f$, являющемся сеточной аппроксимацией краевой задачи. Здесь L – положительно определенная