Следствие 3. *Тьюринговая степень любого ω-в. п. случайного действительного числа является обобщенно низкой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Franklin Johanna N. Y. *Difference randomness* // Proceedings of the AMS. – 2011. – V. 139. – P. 345–360.

2. Арсланов М. М. *Иерархия Ершова.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2007.

А. А. Федюшкина

Лицей "Вторая школа", г. Москва,

nuutik@yandex.ru

О РЕШЕНИИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Хорошо известно, как найти решения квадратных уравнений в числах. Однако нельзя найти решения квадратных *матричных* уравнений таким же способом, потому что матрицы не коммутируют.

В прошлой работе [1] доказан аналог теоремы Виета для квадратного матричного уравнения и приведено следствие из него. В данной работе показан способ нахождения корней квадратного матричного уравнения.

Рассмотрим квадратное матричное уравнение

$$X^2 + PX + Q = 0, \tag{1}$$

где X, P и Q — комплексные матрицы размера 2×2. По теореме Гамильтона – Кэли [2]

$$X^2 - (\operatorname{tr} X)X + (\det X)E = 0.$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем

$$X = (P + (\operatorname{tr} X)E)^{-1} \cdot ((\det X)E - Q).$$

Таким образом, для нахождения корней квадратного матричного уравнения (1) достаточно найти собственные значения матрицы X.

Теорема. *Число λ является собственным значением матрицы X из (1) тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет характеристическому уравнению*

$$\mathcal{X}(\lambda) := \det(\lambda^2 + \lambda P + Q) = 0. \qquad (2)$$

Отметим, что коэффициенты характеристического уравнения (2) можно выразить через следы и определители матриц P и Q. А именно,

$$\mathcal{X}(\lambda) = \lambda^4 + (\operatorname{tr} P)\lambda^3 + (\det P + \operatorname{tr} Q)\lambda^2 + \\ + (\det(P + Q) - \det P - \det Q)\lambda + \det Q.$$

Таким образом, квадратное матричное уравнение (1) общего положения решается следующим образом:

1) решаем характеристическое уравнение (2) и находим собственные значения $\{\lambda_i\}$, $i = 1, \ldots, 4$ (т. к. уравнение степени 4 в общем случае имеет ровно 4 различных корня);

2) выбираем пару чисел (λ_i, λ_j);

3) тогда матрица

$$X(ij) := ((\lambda_i + \lambda_j)E + P)^{-1} \cdot (\lambda_i\lambda_j E - Q)$$

является решением уравнения (1) (здесь мы считаем, что матрица $(\lambda_i + \lambda_j)E + P$ невырождена; это и есть условие общности положения).

Следствие. *Квадратное матричное уравнение (1) общего положения имеет 6 (комплексных) решений.*

Автор благодарит П.В. Бибикова за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федюшкина А. А. *Теорема Виета для квадратных матричных уравнений* // Тез. докл. Межд. шк.-конф. "Геометрия. Управление. Экономика". – Москва – Астрахань, 2011. – С. 38.

2. Винберг Э. *Курс алгебры.* – М.: Изд-во "Факториал", 2002. – 544 с.