В. А. Павленко

Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, г. Уфа,

PVA100186@mail.ru

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА МНОГООБРАЗИИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ИХ СВОЙСТВА

Основной целью работы является выявить основные свойства интегральных операторов на многообразиях с выделенными подмногообразиями.

В работах [1, 2] введено понятие конормальной функции на компактном многообразии X размерности n, в котором выделено гладкое подмногообразие Y размерности $n-1$. По определению, конормальная функция u на X является гладкой функцией на $X \setminus Y$, допускающей асимптотическое разложение определенного вида вблизи Y. Можно также ввести понятие относительной полуплотности на X. Пространство относительных полуплотностей будем обозначать через ${}^r\Omega^{\frac{1}{2}}$.

Пусть X, Y — гладкие компактные многообразия (без края) и имеют выделенные гладкие подмногообразия коразмерности, равной единице. Рассмотрим интегральный оператор вида

$$A : C_0^\infty(Y \setminus Y_0, {}^r\Omega^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(X \setminus X_0, {}^r\Omega^{\frac{1}{2}}),$$

действие которого на полуплотность $\mu \in C_0^\infty(Y \setminus Y_0, {}^r\Omega^{\frac{1}{2}})$ задаётся формулой

$$A\mu(x) = \int\limits_Y K_A(x, y)\mu(y)dy,$$

где полуплотность

$$K_A \in C^\infty\Big((X \times Y) \setminus (\{X_0 \times Y\} \cup \{X \times Y_0\}),^r \Omega^{\frac{1}{2}}\Big)$$

— ядро данного оператора.

Оператор A называется относительным интегральным оператором, если его ядро является конормальной полуплотностью относительно выделенного подмногообразия $\{X_0 \times Y\} \cup \cup \{X \times Y_0\}$ многообразия $X \times Y$.

Можно показать, что любой относительный интегральный оператор переводит конормальные полуплотности в конормальные полуплотности. Более того, если A и B — относительные интегральные операторы, то $\alpha A + \beta B$ — также относительный интегральный оператор. Наконец, при определенных условиях на индексные семейства ядер относительных интегральных операторов A и B определена их композиция $A \circ B$, являющаяся относительным интегральным оператором.

Пусть f — конормальная плотность, заданная на компактном многообразии X с выделенным гладким подмногообразием X_0. Относительный интеграл плотности f по X определяется формулой

$$\int\limits_X^r f\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\Big(\int\limits_{|x|>\varepsilon} f\,dx + \ln\varepsilon \int\limits_{X_0} f\Big|_{X_0} dx\Big),$$

где x — определяющая функция подмногообразия X_0.

Относительным следом относительного интегрального оператора A, который был определён выше, с ядром K_A называется число

$$\mathrm{r}-\mathrm{Tr}(A) = \int\limits_X^r K_A\Big|_\Delta,$$

где Δ — диагональ многообразия $X \times X$.

Другим важным результатом работы является то, что относительный след коммутатора относительных интегральных операторов A и B конечен и не равен нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00389).

ЛИТЕРАТУРА

1. Павленко В. А. // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2007. – Т. 35. – С. 103–105.

2. Павленко В. А. // Сб. тр. межд. шк.-конф. для студентов, аспирантов и молодых учёных "Фундаментальная математика и её приложения в естествознании". – Уфа: Изд-во РИЦ БашГУ, 2009. – Т. 1. – С. 311-320.