УДК 530.1: 51-72

О ДИФФУЗИИ В ПОЛЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МНОГОМЕРИЯ

А.М. Баранов[1]

1 *alex_m_bar@mail.ru*; Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М.Ф. Решетнева

Исследуется диффузия в евклидовом 3-пространстве в присутствии силового поля, описываемого логарифмическим потенциалом. Показано, что для такого потенциала уравнение диффузии может быть сведено к уравнению без учета силового поля, но в пространствах более высокой размерности при наложении условия дискретности на параметры задачи. Решение уравнения представляет собой многомерное обобщение распределения Гаусса в этих пространствах.

Ключевые слова: диффузия, уравнение Эйнштейна-Фоккера, распределение Гаусса, многомерие.

Классические методы теории уравнений математической физики нередко не позволяют решать точно диффузионное уравнение при наличии силового поля, не говоря уже о нелинейном диффузионном уравнении общего вида. Кроме того, не всегда удобно иметь решение в виде ряда. Поэтому небезынтересно было бы рассмотреть частные случаи сведения уравнения, описывающего нестационарную диффузию в заданном силовом поле, к более простому уравнению без явного присутствия силового поля. На первый взгляд постановка такой задачи может показаться невозможной, например, в обычном трехмерном пространстве. Однако существует класс потенциальных функций, описываемых логарифмической зависимостью, когда решение такого рода задачи допускается, но с изменением размерности пространства, в котором протекает процесс диффузии. При этом диффундирующие частицы представляют собой броуновские частицы, подчиняющиеся гауссовым распределениям. Сама же потенциальная логарифмическая функция, в частности, используется при описании силового поля клиновой дисклинации в теории твердого тела.

1. Рассмотрим диффузию в силовых полях, описываемых потенциальными функциями, которые удовлетворяют уравнению Лапласа в евклидовом плоском 3-прост- ранстве:

$$\Delta U = 0, \tag{1}$$

где Δ - оператор Лапласа в трехмерном пространстве,

$$\Delta = \delta^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{2}$$

$U = U(x^i)$ - потенциальная функция, зависящая от пространственных переменных x^i; $\delta_{ij} = \delta^{ij} = diag(1,1,1)$ — метрический тензор плоского евклидового 3-пространства, $i = 1,2,3$.

Другими словами, исследование ограничивается классом гармонических потенциальных функций.

Перейдем теперь к конкретному уравнению диффузии, записанному в виде уравнения Эйнштейна-Фоккера:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla\vec{j} = -\nabla(-\nabla(D\cdot C) + q\vec{F}\cdot C). \tag{3}$$

Здесь $C = C(x^i, t)$ - функция концентрации диффундирующего вещества, которая зависит как от временной t, так и пространственных переменных x^i $(i = 1,2,3)$; $\vec{j}$ - вектор плотности потока; $D = D(x^i, T)$ - коэффициент диффузии (функция положения и температуры); $\vec{F}$ - сила, действующая на диффундирующие частицы; ∇ - дифференциальный оператор Гамильтона, который в тензорных обозначениях записывается как $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$; $q = \frac{D}{kT} = \beta\cdot D$ - подвижность; k - постоянная Больцмана; T - температура.

Далее предполагается, что сила $\vec{F}$ является потенциальной, $\vec{F} = -\nabla U$, где U - некоторая потенциальная функция, описывающее силовое поле, под действием которого происходит дрейф частиц.

Известно, что броуновское движение одной свободной частицы описывается распределением Гаусса, которое является решением уравнения диффузии в отсутствие силовых полей и переходной вероятностью с соответствующими начальными условиями и нормировкой при описании броуновского движения (или любого другого случайного процесса) как марковского процесса. Одновременно функция, представляющая собой распределение Гаусса, есть функция Грина этого уравнения, нахождение которой для уравнения диффузии (3) при учете силовых полей представляет несомненный интерес при исследовании процесса диффузии.

2. Рассмотрим сначала случай постоянства коэффициента диффузии $D = D_0 = const$ и подвижности $q = q_0 = const$ с учетом (1):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_0\cdot\Delta C + q_0\cdot\nabla U\cdot\nabla C. \tag{4}$$

Тогда в частном случае для логарифмического потенциала

$$U = A\cdot ln(\rho/\rho_0) \tag{5}$$

при учете цилиндрической симметрии для уравнения (4) имеем

$$\frac{1}{D_0}\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial\rho^2} + \frac{1+2\nu}{\rho}\frac{\partial C}{\partial\rho}, \tag{6}$$

где $1+2\nu = 1+q_0A/D_0 = 1+A/kT_0$; $A = const$; ρ - радиальная переменная; $\rho_0 = const$ и может, в частности, рассматриваться как радиус дисклинации.

Теперь правую часть уравнения (6) нетрудно привести к виду радиальной части $n-$мерного оператора Лапласа в плоском n-мерном пространстве, если считать, что параметр ν принимает дискретные значения, то есть $1+2\nu = n-1$, где n —целое число, равное $1,2,3,\dots$:

$$\Delta^{(n)}C = \Delta^{2(1+\nu)}C = \frac{1}{\rho^{1+2\nu}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{1+2\nu}\frac{\partial C}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial C}{\partial\rho}\right). \tag{7}$$

Следовательно, требование

$$1+2\nu = 1+\frac{q_0 A}{D_0} = n-1 = [\text{целое число}] \tag{8}$$

представляет собой дополнительное условие дискретности на входящие в (8) параметры, позволяющее получить аналитическое решение уравнения (6).

В этом случае ρ есть расстояние в «сферически-симметричном» плоском n-мерном пространстве, выраженное через координаты этого пространства ζ^a:

$$\rho^2 = \delta_{ab}\zeta^a\zeta^b = (\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2 + (\zeta^3)^2 + \ldots + (\zeta^n)^2 = \zeta_a\zeta^a, \tag{9}$$

где $\delta_{ab} = diag(1,1,1,\ldots 1)$ — метрический тензор евклидового плоского n-пространства, $a,b = 1,2,3,\ldots,n$, так и одновременно - расстояние в 3-пространстве, точнее, на плоскости $x0y$:

$$\rho^2 = \delta_{ij}x^i x^j = x^2 + y^2. \tag{10}$$

Как видно из предыдущего, роль радиальной переменной играет переменная ρ, величина которой сохраняется при переходах между различными евклидовыми (или конформно-евклидовыми) пространствами аналогично тому, как в трехмерном пространстве радиус окружности (на плоскости $x0y$) является и радиусом сферы, построенной на этой окружности.

При $\nu = -1/2$ $(n = 1)$ лапласиан вырождается во вторую производную по ρ, что соответствует одномерному движению; для $\nu = 0$ $(n = 2)$ получаем лапласиан, записанный для цилиндрической симметрии, а когда $\nu = 1/2$ $(n = 3)$ — для сферической симметрии. Для $\nu > 1/2$ $(n > 3)$ имеем n-мерном пространство с симметрией, обобщающей сферическую на размерности большие трех.

Другими словами, уравнение (7) переписывается как уравнение диффузии в отсутствие силового поля и угловой зависимости, но в плоском евклидовом пространстве размерности n

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_0\cdot\Delta^{(n)}C = D_0\cdot\delta^{ij}\frac{\partial^2 C}{\partial x^i\partial x^j}. \tag{11}$$

Решение такого уравнения можно представить в виде обобщенного распределения Гаусса

$$C(\zeta^a,t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1+\nu}}\cdot exp\Big(-\frac{\zeta_a\zeta^a}{4D_0 t}\Big) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{n/2}}\cdot exp\Big(-\frac{\zeta_a\zeta^a}{4D_0 t}\Big), \tag{12}$$

которое описывает свободную броуновскую частицу в плоском n-мерном «сферически-симметричном» пространстве.

При учете ненулевого начального положения броуновской частицы $(\zeta^a_{(0)} \neq 0)$ перепишем (12) в виде

$$C(\zeta^a,t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{n/2}}\cdot exp\Big(-\frac{(\zeta_a-\zeta_a^{(0)})(\zeta^a-\zeta^a_{(0)})}{4D_0 t}\Big), \tag{13}$$

Для хорошо известного одномерного случая броуновского движения ([1], С.234), связанного с допущением, что частица движется в бесконечном пространстве, из (13) при $n = 1$ получаем

$$C(x,t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1/2}} \cdot exp\Big(-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0 t}\Big), \tag{14}$$

где $x \equiv \zeta^1$ - координата одного измерения.

В трехмерном евклидовом пространстве соответственно для $n = 3$ имеем в декартовых координатах $x = \zeta^1, y = \zeta^2, z = \zeta^3$ ([1], С.234)

$$C(x,y,z,t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{3/2}} \cdot exp\Big(-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4D_0 t}\Big). \tag{15}$$

3. Вернемся к уравнению (3) и введем следующие замены: $V = \beta \cdot U,\ W = D \cdot C$. Тогда, воспользовавшись тем, что коэффициент диффузии D есть функция только координат и температуры, а $q = D \cdot \beta$, приведем уравнение (3) к виду (с учетом (1))

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla(-\nabla(D \cdot C) - (D \cdot C)\nabla(\beta \cdot U)) = \Delta W + \nabla V \cdot \nabla W \tag{16}$$

или окончательно

$$\frac{1}{D}\frac{\partial W}{\partial t} = \Delta W + \nabla V \cdot \nabla W. \tag{17}$$

В предположении, что безразмерная потенциальная функция V равна

$$V = ln\,\sigma, \tag{18}$$

где $\sigma = \sigma(\rho)$ - некоторая функция, уравнение (17) преобразуется в цилиндрической системе координат с $D = D_0$ к виду

$$\frac{1}{D_0}\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\Big(1 + \rho\frac{\partial ln(\sigma)}{\partial \rho}\Big)\frac{\partial W}{\partial \rho}. \tag{19}$$

Накладывая условие

$$1 + \rho\frac{\partial ln(\sigma)}{\partial \rho} = n - 1 = [\text{целое число}], \tag{20}$$

где $n --$ размерность евклидового пространства, для потенциала

$$U = \beta_0\, ln\,\sigma = \beta_0\, ln\Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)^{n-1}. \tag{21}$$

фактически приходим к уравнению диффузии вида (11) и решению (12).

4. Однако уравнение (17) может быть сведено при выборе (19) и к виду

$$\frac{1}{D}\frac{\partial W}{\partial t} = \nabla\Big(\nabla W + W\frac{\nabla\sigma}{\sigma}\Big) = \nabla\Big(\frac{1}{\sigma}\nabla(W \cdot \sigma)\Big). \tag{22}$$

После введения новой функции $\hat{W} = \sigma \cdot W$ (23) принимает вид

$$\frac{1}{D}\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = \sigma \cdot \nabla\left(\frac{1}{\sigma}\nabla \hat{W}\right). \tag{23}$$

Ограничимся опять аксиальной симметрией и будем считать все функции зависящими только от радиальной переменной ρ, изменяющейся в плоскости, ортогональной оси z. Уравнение (24) в этом случае переписывается как

$$\frac{1}{D}\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\partial \hat{W}}{\partial \rho}\right). \tag{24}$$

Определим новую переменную R через дифференциальное соотношение

$$dR = \sigma(\rho)\, d\rho, \tag{25}$$

тогда (25) примет вид

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = D \cdot \sigma^2 \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial R^2}. \tag{26}$$

Возьмем функцию σ из соотношения (22):

$$\sigma = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1}, \tag{27}$$

и определим зависимость коэффициента диффузии D от ρ как

$$D(\rho) = D_0\, \sigma^{-2} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2(n-1)}, \tag{28}$$

то есть для каждого числа измерений пространства n коэффициент диффузии будет свой.

Тогда уравнение (27) сводится к одномерному уравнению диффузии без дрейфового члена

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial R^2} \tag{29}$$

или, явно вводя функцию $\hat{C}(R,t) \equiv C/\sigma$,

$$\frac{\partial \hat{C}(R,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 \hat{C}(R,t)}{\partial R^2}. \tag{30}$$

Воспользовавшись (26) и (28), нетрудно найти выражение для переменной R через радиальную переменную ρ :

$$R(\rho) = \frac{\rho_0}{n}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = R_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n. \tag{31}$$

Отсюда видно, что для $\rho > \rho_0$ R меняется от $R_0 = \rho_0/n$ до бесконечности.

Решение уравнения (31) для функции $\hat{C}(R,t)$ легко находится, если взять за новую переменную $\xi = R - R_0$, которая меняется от нуля до бесконечности, и воспользоваться тем, что в начальный момент времени функция $\hat{C}$ имела δ–образное распределение, $\hat{C}(\xi,0) \propto \delta(\xi)$ (частица еще не сдвинулась). Далее разложим функцию $\hat{C}(\xi,t)$ в интеграл Фурье:

$$\hat{C}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_\omega(t) \cdot exp(i\omega\xi)\, d\omega. \qquad (32)$$

После подстановки этого разложения в уравнение (31) умножим обе части уравнения на $exp(i\omega'\xi)$ и проинтегрирум от нуля до бесконечности по ξ. Интегрирование по ω снимается с помощью $\delta-$функции $\delta(\omega-\omega')$. Получившееся дифференциальное уравнение первого порядка на $A_\omega(t)$ интегрируем с учетом $\delta-$образного характера начального условия $\hat{C}(\xi) = \delta(\xi)$. Восстанавливая с помощью преобразования Фурье исходную функцию $\hat{C}$, получим распределение Гаусса применительно к данному случаю, аналогичному (14):

$$\hat{C}(R, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1/2}} \cdot exp\Big(-\frac{\xi^2}{4D_0 t}\Big) \equiv \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1/2}} \cdot exp\Big(-\frac{(R-R_0)^2}{4D_0 t}\Big). \qquad (33)$$

Принимая во внимание соотношения (32), перепишем выражение (34) в виде

$$\hat{C}(\rho, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1/2}} \cdot exp\left(-\frac{{R_0}^2\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right)^2}{4D_0 t}\right). \qquad (34)$$

Возвращаясь к функции $C(\rho, t) = \sigma(\rho) \cdot \hat{C}(\rho, t)$, получим

$$C(\rho, t) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1/2}} \cdot exp\left(-\frac{{R_0}^2\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1}\right)^2}{4D_0 t}\right). \qquad (35)$$

5. Из выше изложенного можно сделать заключение о том, что для взятого здесь частного случая диффузии в силовом поле, описываемого логарифмическим потенциалом, задача о нахождении точного решения уравнения диффузии принципиально разрешима в ряде случаев, когда удается подобрать используемые параметры задачи так, чтобы они удовлетворяли условию дискретности, связанному с введением размерности пространства. При этом само 3-пространство может рассматриваться как плоское евклидовое, призванное играть роль фонового. Тогда указанная проблема может быть сведена к задаче о нахождении точного решения уравнения диффузии без силовых полей в плоском многомерном евклидовом пространстве.

Литература

1. Леонтович М.А. Статистическая физика / М.А. Леонтович. - М.: Гостехиздат, 1944. - 256 с.

ON DIFFUSION IN THE LOGARITHMIC POTENTIAL FIELD FROM THE POINT OF VIEW OF MULTIDIMENSIONAL SPACE

A.M. Baranov

A diffusion in a logarithmic potential force field in 3D Euclid's space is investigated. It is shown that diffusion's equation with such potential can be reduced to multidimensional diffusion's equation without a drift of particles under the condition of discreteness for the parameters. The solution of this

equation is multidimensional generalization of the Gauss distribution.
Keywords: diffusion, the Einstein-Fokker equation, distribution of Gauss, multidimensional space.

УДК 530.12+531.51

МОДЕЛИ МНОГОМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ И ЭФФЕКТ КАЗИМИРА

С.В. Болохов[1], К.А. Бронников[2]

1 *boloh@rambler.ru*; Российский университет дружбы народов
2 *kb20@yandex.ru*; ВНИИМС, Российский университет дружбы народов

Изучаются свойства эффективного потенциала скалярного поля в классе моделей нелинейной многомерной гравитации в присутствии эффекта Казимира. Показано существование физически приемлемых минимумов потенциала, обеспечивающих стабилизацию компактных дополнительных измерений в согласии с наблюдаемой картиной ускоренного расширения Вселенной.

Ключевые слова: нелинейная многомерная гравитация, космология, энергия Казимира.

Теории с дополнительными измерениями давно являются предметом детального изучения, будучи мотивированы целым рядом существующих теоретических концепций и схем, таких как теория суперструн, модели Калуцы-Клейна, концепция миров на бране и др. От физически разумной многомерной теории естественно ожидать наличия механизмов, объясняющих ненаблюдаемость дополнительных измерений (например, по причине их компактности и малого размера), а также их устойчивость на характерных для данной модели масштабах. Данный вопрос ранее исследовался рядом авторов [1, 2], в частности, для моделей типа Калуцы-Клейна, в которых устойчивость обеспечивалась за счет минимума эффективного потенциала скалярных полей, возникающих в ходе размерной редукции. Определенный вклад при этом вносит энергия Казимира, обусловленная компактной топологией дополнительного пространства.

В данной работе исследуется эффективный потенциал в обобщенном классе моделей нелинейной многомерной гравитации в $D = 4 + n$ измерениях с учетом энергии Казимира. Действие в подходящий системе единиц имеет вид

$$S = \frac{1}{2} m_D^{D-2} \int \sqrt{g_D}\, d^D x \,[F(R) + c_1 R^{AB} R_{AB} + c_2 R^{ABCD} R_{ABCD}],$$

где $m_D \equiv 1/r_0$ - D-мерная планковская масса (r_0 - соответствующая фундаментальная длина), g_D - детерминант D-мерной метрики, $F(R)$ - некоторая функция многомерной скалярной кривизны, а c_1 и c_2 суть произвольные коэффициенты. Используется многообразие с топологией $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}^n$ ($\mathbb{S}^n$ - n-мерная сфера). Метрика в пренебрежении неабелевыми калибровочными модами имеет вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \mathrm{e}^{2\beta(x^\mu)} d\Omega_n^2,$$

где $g_{\mu\nu}$ - 4-мерный метрический тензор, $d\Omega_n^2$ - форма метрики на n-сфере фиксированного радиуса, $\mathrm{e}^{2\beta(x^\mu)}$ - масштабный фактор дополнительного пространства.