Функция $\psi(z)$ имеет особенность в z_k, но она не влияет на движение k-го точечного вихря: записав уравнения движения, мы можем вычесть вклад влияния этого вихря на себя.

Работа поддержана РФФИ (проект 11-01-96511) и Министерством образования науки Российской Федерации (проект 2.1.1/3828).

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей.* – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 704 с.

2. Лежнев А. В., Лежнев В. Г. *Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики.* – Краснодар, 2009. – 111 с.

Н. В. Мартемьянова

Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, г. Самара, ninamartem@yandex.ru

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ

Рассмотрим уравнение эллиптико-гиперболического типа с неизвестными правыми частями

$$Lu \equiv u_{xx} + \mathrm{sgn} y \cdot u_{yy} - b^2 u = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) |\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b \geqslant 0$ – заданные действительные числа, в случае, когда $f_1(x) \neq f_2(x)$, и поставим следующую обратную задачу с нелокальным граничным условием.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+), \quad f(x) \in C(0,1) \cap L[0,1]; \qquad (1)$$

$$Lu = f(x,y), (x,y) \in D_- \cup D_+; \qquad (2)$$

$$u_x(0,y) = u_x(1,y), \ u(1,y) = 0, \ -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \qquad (3)$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \ u(x,-\alpha) = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1; \qquad (4)$$

$$u_y(x,\beta) = \chi(x), \quad u_y(x,-\alpha) = g(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (5)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В данной работе на основе результатов из [1], [2] решение задачи построено в виде сумм биортогональных рядов по системам корневых функций одномерных спектральных задач. Установлен критерий единственности.

Теорема. *Если существует решение задачи (1) – (5), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}_0$ (при всех $k \in \mathbb{N}$ в случае, когда $b = 0$) выполнены условия*

$$\Delta_{\alpha\beta b}(k) = (1 - \cos(\lambda_k\alpha))\,\mathrm{sh}(\lambda_k\beta) - \sin(\lambda_k\alpha)\,(1 - \mathrm{ch}(\lambda_k\beta)) \neq 0. \qquad (6)$$

При доказательстве единственности решения задачи используется только полнота системы собственных и присоединенных функций соответствующей одномерной задачи на собственные значения [3].

Если при некоторых α, β, b и $k = p \in \mathbb{N}_0$ нарушено условие (6), то однородная обратная задача (1) – (5) (где $\varphi(x) \equiv 0$,

$\varphi(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$, $\chi(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_p(x,y) = u_p(y) x \sin(2\pi p x),$$

$$u_p(y) = \begin{cases} \frac{f_p(1-\cos\lambda_p\alpha)(\operatorname{ch}\lambda_p(y-\beta)+\lambda_p^2)}{\lambda_p^2(\cos\lambda_p\alpha\operatorname{ch}\lambda_p\beta+\sin\lambda_p\alpha\operatorname{sh}\lambda_p\beta-\cos\lambda_p\alpha)}, & y>0, \\ \frac{f_p}{\lambda_p^2}+ \\ +\frac{f_p[(\operatorname{ch}\lambda_p\beta-1)\cos\lambda_p y+\operatorname{sh}\lambda_p\beta(\sin\lambda_p(y+\alpha)-\sin\lambda_p y)]}{\lambda_p^2(\cos\lambda_p\alpha\operatorname{ch}\lambda_p\beta+\sin\lambda_p\alpha\operatorname{sh}\lambda_p\beta-\cos\lambda_p\alpha)}, & y<0, \end{cases}$$

$$f_{1p}(x) = f_p \frac{1-\cos\lambda_p\alpha}{\cos\lambda_p\alpha\operatorname{ch}\lambda_p\beta+\sin\lambda_p\alpha\operatorname{sh}\lambda_p\beta-\cos\lambda_p\alpha} x\sin 2\pi p x,$$

$$f_{2p}(x) = f_p x \sin(2\pi p x),$$

где f_p – произвольная постоянная, отличная от нуля.

При фиксированных $k=p$, $p\in\mathbb{N}$, $b \geqslant 0$ и $\beta>0$ $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ может обратиться в нуль только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{2\pi m}{\lambda_p} \text{ или } \alpha = \frac{2}{\lambda_p}\left[\pi n - \arcsin\left(\frac{\operatorname{sh}\lambda_p\beta/2}{\sqrt{\operatorname{ch}\lambda_p\beta}}\right)\right],\ m,n,p\in\mathbb{N}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87. – № 6. – С. 907–918.

2. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. *Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа* // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 2. – С. 71–85.

3. Ильин В. А. *Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения* // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17. – № 1. – С. 91–101.