

Р. Ф. Курмакаев

Волгоградский государственный университет

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ
МНОГООБРАЗИЯХ**

В данной работе изучается асимптотическое поведение неограниченных решений стационарного уравнения Шрёдингера на некомпактных модельных римановых многообразиях, полученные результаты относятся к теоремам типа Лиувилля. Классическая теорема Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в \mathbb{R}^n является тождественной постоянной. Известны следующие утверждения, являющиеся теоремами типа Лиувилля:

1. Если гармоническая функция u в \mathbb{R}^n имеет конечный интеграл Дирихле, то $u \equiv \text{const}$;
2. Если $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ является гармонической функцией и $1 \leq p < \infty$ то $u \equiv 0$;
3. Если функция u — гармоническая в \mathbb{R}^n и удовлетворяет неравенству $|u(x)| \leq c(1 + |x|)^m$, то u — гармонический полином степени, не превышающей m .

Полученный в работе результат является аналогом последнего утверждения, а именно, доказана ограниченность размерности пространства решений предписанного роста для стационарного уравнения Шрёдингера.

В последние годы многими исследователями осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на

римановом многообразии M заданы класс функций A и эллиптический оператор L . Говорят, что на M выполнено обобщенное (A, L) -лиувиллево свойство, если пространство решений уравнения $Lu = 0$, принадлежащих функциональному классу A , имеет конечную размерность. Оценкам размерностей различных пространств решений эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях посвящены работы А.А. Григорьяна, А.Г. Лосева, С.А. Королькова, Р. Ли и многих других авторов.

Ряд работ посвящён изучению гармонических функций и решений стационарного уравнения Шрёдингера на модельных или сферически-симметричных многообразиях. В частности, получены точные условия разрешимости задачи Дирихле с непрерывными граничными данными на «бесконечности», а также условия выполнения теорем типа Лиувилля.

Опишем такие многообразия подробнее. Пусть M — полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B — некоторый предкомпакт с непустой внутренностью, граница B — C^1 -гладкое подмногообразие, а D изометрично прямому произведению $[r_0, +\infty) \times S$ (где $r_0 > 0$, S — компактное риманово многообразие без края) с метрикой $ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2$. Здесь $q(r)$ — положительная, гладкая на $[r_0, +\infty)$ функция, а $d\theta$ — метрика на S .

Рассмотрим на M решение уравнения

$$Lu = \operatorname{div}(b(x)\nabla u) - c(x)u = 0, \quad (1)$$

где $c(x)$ и $b(x)$ — гладкие, неотрицательные функции. В дальнейшем считаем, что на D выполнены условия $b(r, \theta) \equiv b(r)$, $c(r, \theta) \equiv c(r)$ и $c(r) \not\equiv 0$ на M . Всюду далее считаем, что

$$1) \quad 0 \leq c(r)g^2(r) \leq d,$$

$$2) 0 < m \leq b(r) \leq M,$$

где d, m, M — некоторые константы.

Введём обозначения:

$$J = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{b(t)g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t c(\xi)g^{n-1}(\xi)d\xi, \quad K = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{b(t)g^{n-1}(t)}, \quad (2)$$

где $n = \dim M$.

Пусть функция v_l^0 является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$v_l''(r) + \left[(n-1) \frac{q'(r)}{q(r)} + \frac{b'(r)}{b(r)} \right] v_l'(r) - \left[\frac{\lambda_l}{q^2(r)} + \frac{c(r)}{b(r)} \right] v_l(r) = 0, \quad (3)$$

где λ_l — l -е собственное число оператора Лапласа — Бельтрами на S с граничными условиями $v_l^0(r_0) = 1$ и $(v_l^0)'(r_0) = 0$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть риманово многообразие M таково, что на D выполнено $J = \infty$. Тогда пространство решений стационарного уравнения Шрёдингера (1), удовлетворяющих условию $u = \bar{o}(v_l^0)$ при $r \rightarrow \infty$, имеет конечную размерность.

Теорема 2. Пусть риманово многообразие M таково, что на D выполнено $J = \infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} b(r) = \nu$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} c(r)g^2(r) = \mu$. Тогда размерность пространства решений стационарного уравнения Шрёдингера (1), удовлетворяющих условию $u = \bar{o}(v_l^0)$ при $r \rightarrow \infty$, не превышает l .