М. М. Кокурин

Марийский государственный университет, г. Йошкар-Ола,
kokurin@nextmail.ru

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — функция со значениями в комплексном банаховом пространстве X. Дробной производной в смысле Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $u(t)$ называется функция

$$(\partial^\alpha u)(t) = (D^\alpha_{0+}u)(t) - u(0)/(\Gamma(1-\alpha)t^\alpha),$$

где

$$(D^\alpha_{0+}u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$$

— производная Римана – Лиувилля [1]. Рассмотрим задачу Коши

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(0) = u_0 \in D(A), \tag{1}$$

где $A : D(A) \subset X \to X$ — неограниченный замкнутый оператор; $\overline{D(A)} = X$. Решением (сильным) задачи (1) будем называть функцию $u \in C([0,T]; D(A))$, удовлетворяющую соотношениям (1) и условию [2]

$$\int\limits_0^t \frac{u(\tau) - u(0)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \in C^1([0,T]; X).$$

Обозначим $K(\varphi) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg z| < \varphi\}$. Пусть выполняется следующее условие секториальности: спектр оператора

$-A$ принадлежит $K(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, и имеет место оценка

$$\|R(z, -A)\| \leqslant C_0/(1+|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash K(\varphi_0),$$

где $R(z, -A) = (zE + A)^{-1}$, постоянная C_0 не зависит от z. Будем пользоваться исчислением секториальных операторов в банаховом пространстве (см., например, [3, с. 133–135]). Если функция $F(z)$ аналитична в окрестности множества $K(\varphi_0)$ и убывает на бесконечности быстрее некоторой положительной степени $|z|$ равномерно по $z \in \mathbb{C}$ с $|\arg z| \leqslant \varphi_0$, то формула

$$F(-A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(\varphi_0)} F(z) R(z, -A) dz$$

определяет оператор $F(-A) \in L(X)$.

Согласно [1, 2], задача (1) корректна.

Теорема 1. *Решение $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, задачи (1) имеет вид $u(t) = F(-A)u_0$, где $F(z) = E_\alpha(-zt^\alpha)$,*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\alpha k + 1)$$

— функция Миттаг-Леффлера.

Рассмотрим теперь обратную к (1) задачу

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(T) = u_T \in D(A), \tag{2}$$

где нахождению подлежит элемент $u(0) \in D(A)$. С использованием известных фактов о распределении нулей функции $E_\alpha(z)$ [4] установлен следующий основной результат.

Теорема 2. *В секторе $\pi/2 < |\arg z| < \alpha\pi$ лежит конечное множество $\{z_n\}_{n=1}^N$ корней функции $E_\alpha(z)$. Задача (2) имеет не более одного решения тогда и только тогда, когда* *пересечение множества* $\{z_n/T^\alpha\}_{n=1}^N$ *с дискретным спектром оператора* A *пусто.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00273а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочубей А. Н. *Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка* // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 8. – С. 1359–1368.

2. Bajlekova E. G. *Fractional evolution equations in Banach spaces* // PhD Thesis, University Press Facilities, Eindhoven University of Technology. – 107 p.

3. Крейн С. Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.

4. Попов А. Ю, Седлецкий А. М. *Распределение корней функций Миттаг-Леффлера* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2011. – Т. 40. – С. 3–171.

А. А. Колтунов

Волгоградский государственный университет

РАСТЕКАНИЕ ТОНКОЙ КАПЛИ ЖИДКОСТИ ПО НЕОДНОРОДНОМУ ПОРИСТОМУ СЛОЮ

Во многих процессах в природе и технике происходит растекание и поглощение жидкости пористой поверхностью. Пористая поверхность может быть сухой, насыщенной или частично насыщенной той же или иной жидкостью [1].

В настоящей работе рассмотрена задача об эволюции капли, помещенной на пористой слой толщины d, проницаемость которого $k(z)$ неоднородна в поперечном направлении. Задача