Р. П. Докучаев

Волгоградский государственный университет,

dokuch90@mail.ru

НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ НА ТРИАНГУЛЯЦИЯХ

Ряд прикладных задач [1, 3] приводит к необходимости решения уравнения минимальной поверхности. При решении данного уравнения итерационным методом градиентного спуска для функционала площади $S(u)$ появляется вопрос о скорости сходимости итерационного процесса. Скорость сходимости итерационного метода напрямую связана со значением константы в аналоге неравенства Пуанкаре на триангуляциях.

Напомним, что неравенство Пуанкаре имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} |u|^2 dx \leqslant C \left[\left(\int\limits_{\Omega} u dx \right)^2 + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \right],$$

где функция $u(x) \in W_2^1(\Omega)$. Константа C участвует в определении скорости сходимости итерационного процесса приближенного решения уравнения минимальной поверхности.

Пусть область $\Omega_1 = [a, b] \times [c, d]$ разбита на прямоугольники вида $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, где $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $y_j = c + \frac{j}{m}(d - c)$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Положим $h = \frac{b-a}{n}$ и $\tau = \frac{d-c}{m}$. Разобьем каждый из прямоугольников на два треугольника диагональю, проведенной с нижнего левого угла в верхний правый угол. Предположим, что в каждой точке (x_i, y_j), $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m$, задано значение сеточной функции u_{ij}. Ранее была доказана справедливость аналога неравенства Пуанкаре сначала в случае $u_{ij} = 0$ на границе области Ω_1, а затем и для произвольных граничных значений.

Мы рассматриваем области более общего вида.

Пусть область Ω_2 имеет следующий вид [2] $\Omega_2 = \{(x,y): a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные на отрезке $[a,b]$ липшицевы функции, то есть $\left|\frac{\psi(x_{t+1})-\psi(x_t)}{x_{t+1}-x_t}\right| \leqslant L_1$ и $\left|\frac{\varphi(x_{t+1})-\varphi(x_t)}{x_{t+1}-x_t}\right| \leqslant L_2$, где L_1, L_2 – const. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – разбиение отрезка $[a,b]$. Положим $f_\tau(x) = \tau\psi(x) + (1-\tau)\varphi(x)$. Разобьем отрезок $[0,1]$ точками $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = 1$ и в области Ω_2 рассмотрим сетку, задаваемую системой точек: $A(x_i, y_j) = (x_i, f_{\tau_j}(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Разбивая одной из диагоналей все трапеции вида $A_{ij}A_{i+1,j}A_{i,j+1}A_{i+1,j+1}$, где $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, получим триангуляцию области Ω_2 . Предположим, что в каждой точке A_{ij}, $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m$, задано значение сеточной функции u_{ij} .

Теорема. *В области Ω_2 выполняется неравенство*

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} u_{ij}^2 \leqslant C\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}\tilde{a}_{ij}^2 + \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{b}_{ij}^2\right) + \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} u_{ij}\right)^2,$$

где $\tilde{a}_{kj} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{T_{kj}}$, $\tilde{b}_{kj} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{T_{kj}}$, $\lambda = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(\psi(x_k) - \varphi(x_k))$, $C = 8\max^2[\lambda, b-a] \cdot \max\left[1, \max^2(L_1, L_2) + \frac{1}{2}\right]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97034 р_поволжье_а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абдюшев А. А., Мифтахутдинов И. Х., Осипов П. П. *Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности* // Изв. КазГАСУ. Строительные конструкции, здания и сооружения. – 2009. – № 2(12). – С. 86–92.

2. Клячин А. А. *Равномерная триангуляция плоских областей* // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. – 2011. – № 2(15). – С. 43–49.

3. Михайленко В. Е., Ковалев С. Н. *Конструирование форм современных архитектурных сооружений.* – Киев: Будівельник, 1978. – 138 с.

А. Ю. Долгоносова, Н. И. Жукова

Нижегородский государственный университет,

dolgonosova@rambler.ru, n.i.zhukova@rambler.ru

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОНЯТИЮ СЛОЕНИЯ С ТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Будем обозначать через (M, F) гладкое слоение коразмерности q на n-мерном многообразии M, а через $\mathfrak{X}_F(M)$ – модуль гладких векторных полей (над алгеброй гладких функций), касательных к этому слоению. Предположим, что слоение (M, F) задано N-коциклом $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j\in J}$.

Если на многообразии N существует такая линейная связность ∇^N, что каждый локальный диффеоморфизм k_{ij} является изоморфизмом линейных свзностей, индуцированных связностью ∇^N на открытых подмножествах $f_i(U_i \cap U_j)$ и $f_j(U_i \cap U_j)$, то мы говорим, что (M, F) — *слоение с трансверсальной линейной связностью*, заданное (N, ∇^N)-коциклом $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j\in J}$.

Напомним, что векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ называется *слоеным* или базовым, если для любого $Y \in \mathfrak{X}_F(M)$ скобка Ли $[X, Y]$ принадлежит $\mathfrak{X}_F(M)$ [1].