В. И. Кузоватов

Сибирский федеральный университет,

kuzovatov@yandex.ru

О ДЗЕТА-ФУНКЦИИ КОРНЕЙ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

Данная работа посвящена получению интегрального представления для дзета-функции корней некоторого класса целых функций.

Пусть $f(z)$ – целая функция нулевого порядка в $\mathbb{C}$. Рассмотрим уравнение

$$f(z) = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $N_f = f^{-1}(0)$ множество всех корней уравнения (1), каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

Наша цель – получить интегральное представление для дзета-функции $\zeta_f(s)$ уравнения (1), которая определяется следующим образом:

$$\zeta_f(s) = \sum_{a \in N_f} (-a)^{-s},$$

где $s \in \mathbb{C}$. Знак минус перед корнями в определении дзета-функции взят для удобства записи интегральных формул.

Пусть $z = x + iy$. Предположим, что функция f не равна нулю ни в одной точке множества $\mathbb{R}_+ := \{z \in \mathbb{C} : x \geqslant 0, y = 0\}$.

Теорема 1. *Предположим, что* $0 < \operatorname{Re} s < 1$. *Тогда*

$$\zeta_f(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} - \omega_0 \right\} x^{-s}\, dx,$$

где ω_0 *есть предельное значение для выражения* $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ *на бесконечности.*

В дальнейшем рассмотрим целую функцию $f(z)$ порядка ρ и приведем еще одно интегральное представление для дзета-функции $\zeta_f(s)$ нулей z_n функции f, которые имеют вид

$$z_n = -q_n + is_n, \quad q_n > 0.$$

Предположим, что $\mathrm{Re}\ s = \sigma > 1$ и выполнены следующие условия:

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} > 0, \tag{2}$$

$$\text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_n}\right)^{\sigma-1} \text{сходится.} \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3) *и* $\mathrm{Re}\ s > 1$. *Тогда*

$$\zeta_f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{\infty} x^{s-1} F(f,x)\, dx,$$

где $F(f,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{z_n x}$, *а* $\Gamma(s)$ *– это гамма-функция Эйлера.*

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для* $0 < \mathrm{Re}\ s < 1$ *справедливо равенство*

$$\zeta_f(s)\,\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} \left(F(f,x) - \frac{1}{x}\right) x^{s-1}\, dx.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00007-а, № 14-01-00283-а).