На правах рукописи

Гулюгин Андрей Николаевич

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ИНВЕСТОРА НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

08.00.13 – Математические и инструментальные методы экономики

Автореферат
диссертации на соискание ученой
степени кандидата экономических наук

Москва
2010

Степень научной разработанности проблемы.

Проблемам принятия инвестиционных решений на финансовом рынке посвящено много работ как российских, так и зарубежных авторов (Элдер А., Гюнтер М., Найман Э., О'Нил Уильям Дж., Твардовский В, Паршиков С., Буренин А.). Также моделированию на финансовых рынках посвящены труды таких видных ученых, как У. Шарпа, Д. Тобина, Г. Марковица, Блэка и Шоулза.

Исследования разнообразных задач по теории игр с природой (статистических игр) и их приложениям к принятию решений в условиях риска и неопределенности содержатся в публикациях зарубежных авторов, среди которых отметим следующих: Д. Х. Блекуэлл, А. Вальд, К. Г. Вольф, Л. Гурвиц, П. С. Лаплас, Э. Л. Леман, М. Фридмэн. Проблемам принятия решений в теории игр с природой в условиях полунеопределенности посвящены труды видного русского ученого Гермейера Ю.Б.

Весьма значимые результаты по целому ряду проблем в теории игр с природой и их приложений к различным задачам отыскания оптимальных решений в разное время получили отечественные исследователи: П. Л. Виленский, В. Н. Лившиц , Д. А. Новиков, С. А. Смоляк, С. Р. Хачатрян, А. С. Шапкин и многие другие.

Однако вопросам применения теории игр на финансовом рынке уделено мало внимания. Эти вопросы нашли отражение в работах фон Неймана и Моргенштерна, Дэвида Янга, Вега-Рсдондо Ф. и ряда других экономистов, которые рассуждают о применимости теории игр на финансовом рынке, но конкретных моделей не предлагают. Теоретико-игровые методы также применялись в работах сторонников теории поведенческих финансов.

Цели и задачи исследования.

Целью диссертации является нахождение наиболее привлекательных (с точки зрения доходности) для инвестора финансовых инструментов с помощью построения теоретико-игровой модели

Для достижения указанной цели были поставлены и решены следующие задачи:

- изучить особенности применения теоретико-игровых моделей на финансовых рынках;
- провести критический анализ критериев оптимальности стратегий в играх с природой с позиций выигрышей и с позиций рисков;
- разработать критерий оптимальности стратегий в играх с природой в условиях полу-неопределенности относительно выигрышей и относительно рисков в

чистых и смешанных стратегиях для нахождения оптимальной стратегии инвестора на финансовом рынке;

- построить теоретико-игровую модель, позволяющей определять оптимальную стратегию поведения инвестора на финансовом рынке, представляющей собой инвестирование средств в предложенные финансовые инструменты;
- реализовать построенную модель в среде MS Ecxel;
- провести апробацию построенной модели поведения инвестора на финансовом рынке на примере ИК «АЛТЫН Инвест».

Объектом исследования являются следующие инструменты финансового рынка:

- Фьючерс на нефть марки «Brent»;
- Валюта USD;
- Акции «Газпрома»;
- Акции «Сбербанка»;
- Облигации «Лукойл,3».

Предметом исследования выступает поведение инвестора на финансовом рынке в соответствии с теоретико-игровой моделью и критериями оптимальности стратегий в играх с природой.

Теоретическую и методологическую основу диссертации составляют труды российских и зарубежных ученых в области инвестиционного анализа, финансового рынка, экономико-математического моделирования, теории игр. При построении теоретико-игровой модели использовалась среда MS Excel.

Информационной базой исследования являются данные по торгам финансовых инструментов, размещенные на специализированных веб-сайтах, монографии, публикации периодической печати.

Область исследования диссертации соответствует паспорту специальности 08.00.13 – Математические и инструментальные методы экономики.

Научная новизна исследования состоит в разработке теоретико-игровой модели поведения инвестора на финансовом рынке. Результаты диссертационного исследования содержат следующие элементы научной новизны:

1. разработан критерий оптимальности стратегий относительно выигрышей в играх с природой для выявления оптимальных чистых и смешанных стратегий в условиях полунеопределенности;
2. доказана теорема существования оптимальной стратегии в классе смешанных стратегий по разработанному критерию относительно выигрышей;
3. разработан критерий оптимальности стратегий относительно рисков в играх с природой для выявления оптимальных чистых и смешанных стратегий в условиях полунеопределенности;
4. доказана теорема существования оптимальной стратегии в классе смешанных стратегий по разработанному критерию относительно рисков;
5. разработана теоретико-игровая модель поведения инвестора на финансовом рынке;
6. разработан численный метод приближенного нахождения стратегий, оптимальных во множестве смешанных стратегий.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Полученные в *теоретической части* (третья глава) исследования результаты представляют собой дальнейшее развитие теории игр с природой и методологии принятия решений в условиях полунеопределенности в играх с природой. Полученные результаты расширяют сферу применения теории игр с природой и распространяют ее влияние на методологию принятия оптимальных решения инвестором на финансовом рынке. Эти результаты могут быть применены также и в учебном процессе финансово-экономических вузов в рамках таких учебных дисциплин, как: «Экономико-математическое моделирование», «Теория игр», «Теория принятия решений».

Полученные в *практической части* (четвертая глава) результаты исследования, а именно, построенная теоретико-игровая модель поведения инвестора, предполагающая применение разработанного критерия оптимальности стратегий, могут быть использованы при формировании инвестиционных стратегий на финансовом рынке как инвестиционными компаниями, так и частными инвесторами. Они могут быть применены в рамках таких учебных дисциплин, как «Основы инвестиционного анализа», «Принятие решений на финансовом рынке».

Апробация и внедрение результатов исследования.

Основные результаты и положения диссертации были представлены на пяти Международных конференциях, в том числе:

- «Ломоносов-2008» (Москва, 2008);
- Международной конференции Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2008);
- VII Международной научно-практической конференции «Стабилизация экономического развития Российской федерации» (Пенза, 2008);
- VI Международной конференции «Математическое моделирование в образовании, науке и производстве» (Тирасполь, 2009);
- Международной научно-практической конференции «Экономика и управление: инновационные пути развития» (Саратов, 2010);

а также на научных семинарах кафедры «Математическое моделирование экономических процессов» ФГОБУВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации».

Разработанная в диссертации теоретико-игровая модель используется в практической деятельности ООО ИК «АЛТЫН Инвест» и рассматривается в качестве одного из важных элементов системы управления инвестиционной деятельностью и способствует увеличению стоимости компании.

Материалы диссертации используются кафедрой «Математическое моделирование экономических процессов» ФГОБУВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» в преподавании учебных дисциплин «Теория игр» и «Экономико-математическое моделирование».

Публикации.

Основные положения диссертации отражены в 8 работах общим объемом 1.95 п.л., в т.ч. авторский объем составляет 1.6 п.л. В журналах, определенных ВАК, опубликованы 3 работы общим объемом 1.45 п.л. (в т.ч. авторским объемом 1.13 п.л.)

Структура работы.

Работа состоит их введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы. Материал изложен на 133 страницах, включает 7 графиков, 6 таблиц, 4 рисунка и 1 приложение.

Основные положения диссертационной работы

Первая глава диссертации – «Принятие решений на финансовом рынке» посвящена особенностям принятия решений инвестором на финансовом рынке. Рассматриваются основная схема принятия инвестиционного решения на финансовом рынке и основные математические модели и методы, на которых базируется разработка инвестиционных решений. Исследуется степень научной разработанности проблемы применения теории игр на финансовом рынке.

Определение оптимальной инвестиционной стратегии на финансовом рынке является сложной неоднозначной задачей, требующей применения нетривиальных математических инструментов и методов. Принятие инвестиционного решения на финансовом рынке должно основываться на целом комплексе проделанной работы, включающей в себя анализ финансового рынка (сравнительный анализ по сегментам и отраслям рынка, направленный на выявление трендов на рынке, а также лидеров и аутсайдеров рынка), анализ финансовых инструментов (включает в себя, обычно фундаментальный и технический анализ, рассчитывается «справедливая» стоимость актива), формирование инвестиционной стратегии (инвестиции в один актив, диверсификация активов по портфелям, выбор хеджирующего актива и т.д.).

Если же говорить более строго, существуют четыре компонента принятия инвестиционного решения на финансовом рынке: фундаментальный анализ, технический анализ, анализ ликвидности, анализ психологии рынка, на основании которых осуществляется принятие инвестиционного решения на финансовом рынке.

Однако не секрет, что финансовый рынок чрезвычайно подвержен фактору неопределенности, который складывается под действием различных рисков, присущих финансовому рынку (рыночные риски, кредитные риски, страновые риски, риски ликвидности, операционные риски и т.д.). Наукой, которая занимается изучением поведения ЛПР в условиях неопределенности, является теория игр с природой. Поэтому возникает идея о применении для изучения поведения инвестора на финансовом рынке теории игр с природой. Тем не менее, сегодня едва ли можно назвать теоретико-игровые модели, применяемые для определения оптимальной стратегии поведения инвестора на финансовом рынке. В пользу применения теоретико-игрового моделирования на финансовом рынке говорит тот факт, что традиционные финансовые модели (модель Шарпа, Марковица, Блэка-Шоулза, модели технического анализа) базируются на предпосылках об эффективности рынка и рациональности инвестора. На практике эти предпосылки не выполняются. Теоретико-игровые методы применяются наукой «поведенческие финансы», которая утверждает, что финансовый рынок и поведение на нем инвесторов можно изучать только при помощи моделей, в которых не все участники являются абсолютно рациональными. В частности, с помощью теории игр объясняются некоторые феномены финансового рынка, которые невозможно объяснить с помощью традиционных моделей: парадокс Алле, «эффект толпы», «эффект капкана», «эффект определенности» и др.

Вторая глава диссертации – «Теоретико-игровые модели и критерии оптимальности стратегий» посвящена принятию решений в играх с природой. Рассматриваются реализационная и оценочная структуры модели «Игра с природой». Дается критический обзор основных критериев оптимальности стратегий в играх с природой.

Оптимальность стратегий в играх с природой

Игра с природой может протекать в условиях риска (когда все вероятности состояний природы известны или могут быть рассчитаны игроком), в условиях неопределенности (когда вероятности состояний природы неизвестны и не могут быть рассчитаны) и в условиях полунеопределенности (когда вероятности состояний природы известны или могут быть рассчитаны, однако игрок по тем или иным причинам не доверяет им в полной мере).

Оптимальность стратегий в каждом из описанных случаев рассчитывается с помощью разных критериев оптимальности, критический анализ которых проведен во второй главе диссертации. Так, в условиях риска обычно используют следующие критерии оптимальности стратегий: критерий Байеса, критерий Лапласа, критерий макимальной вероятности. В условиях неопределенности принято использовать критерий Вальда, максимаксный критерий, критерий Гурвица и обобщенный критерий Гурвица. В условиях полунеопределенности обычно используют критерий Гермейера (в литературе случай условия полунеопределенности не выделяется в отдельный, а рассматривается в рамках случая условия риска, поэтому критерий Гермейера можно встретить в описании критериев оптимальности стратегий в играх с природой в условиях риска), а также критерий Гермейера-Гурвица.

Показатели эффективности стратегий по критерию Гермейера учитывают только минимальные элементы Гермейера при каждой стратегии, реализуя, таким образом, подход крайнего пессимизма. Таким образом, подходы критерия Гермейера и критерия Вальда аналогичны и применяются, соответственно к матрице Гермейера и к матрице выигрышей.

Критерий Гермейера-Гурвица оптимальности стратегий не позволяет учитывать всех элементов Гермейера при каждой стратегии, а учитывает только минимальный и максимальный из них.

Одной из задач, которые были поставлены при написании диссертации, явилась разработка критерия оптимальности стратегий в играх с природой в условиях полунеопределенности относительно выигрышей и относительно рисков в чистых и в смешанных стратегиях. Данный критерий представляет собой комбинацию критерия Гермейера и обобщенного критерия Гурвица.

Оптимальность стратегий в играх с природой может рассматриваться как с точки зрения выигрышей, так и с точки зрения рисков (в игре с природой под риском понимается риск неполучения игроком максимального выигрыша), поэтому каждый из перечисленных выше критериев оптимальности может быть применен как относительно выигрышей, так и относительно рисков.

Третья глава диссертации – «Комбинация критерия Гермейера и обобщенного критерия Гурвица оптимальности стратегий» посвящена построению критерия оптимальности стратегий в играх с природой.

Комбинация критерия Гермейера и обобщенного критерия Гурвица относительно выигрышей

Рассмотрим игру с природой, в которой $S_A^C = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ $(m \geq 2)$ - множество чистых стратегий игрока A, $S_\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n\}$ $(n \geq 2)$ - множество состояний природы Π, $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ - вектор вероятностей состояний природы, удовлетворяющий условиям: $q_j > 0$, $j = 1,2,...,n$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, а матрица выигрышей игрока A имеет вид:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline A_i \backslash \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \hline \end{array}$$

Умножая каждый выигрыш a_{ij}, $i = 1,2,...,m$, при состоянии природы Π_j на вероятность q_j этого состояния, получим элементы Гермейера выигрышей. Обозначим их для удобства

$$g_{ij} = q_j a_{ij},\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n.$$

Тогда матрица Гермейера ***G(q)*** будет выглядеть следующим образом:

$G(q) =$

Π_j A_i	Π_1	...	Π_n
A_1	g_{11}	...	g_{1n}
...	...	...	...
A_m	g_{1n}	...	g_{mn}
q_j	q_1	...	q_n

Переставим элементы Гермейера $g_{i1}, g_{i2}, ..., g_{in}$ при каждой стратегии A_i (в каждой строке матрицы Гермейера $\boldsymbol{G}(q)$) в неубывающем порядке:

$$g_{il_1(i)} \le g_{il_2(i)} \le ... \le g_{il_n(i)},\ i = 1,2...,m, \tag{1}$$

где $l_1(i),...,l_n(i)$ - некоторая перестановка номеров $1,2,...,n$, зависящая от стратегии A_i. Вводя для простоты обозначения $g_{il_j(i)} = \tau_{ij}, i = 1,2,...,m, j = 1,2,...,n$, неравенства (1) перепишутся в виде

$$\tau_{i1} \le \tau_{i2} \le ... \le \tau_{in},\ i = 1,2,...,m, \tag{2}$$

а матрица Гермейера ***G(q)*** преобразуется в матрицу ***T(q)***:

$T(q) =$

Ранги T_i	1	...	n
T_1	τ_{11}	...	τ_{1n}
...	...	...	...
T_m	τ_{1n}	...	τ_{mn}

Пусть $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ - вектор, координаты которого удовлетворяют условиям:

$$\lambda_j \geq 0\,,\ j = 1,2,...,n\,,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \tag{3}$$

и несут следующую смысловую нагрузку: λ_j количественно характеризует субъективное представление (ощущение, уверенность) игрока A в том, что при выборе им любой чистой стратегии он получит выигрыш, элемент Гермейера которого имеет j-й ранг.

Введем в рассмотрение показатель оптимизма λ_O и показатель пессимизма λ_P игрока A.

Показателем пессимизма назовем число

$$\lambda_P = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n/2} \lambda_j, & \text{если число } n \text{ четное,} \\ \sum\limits_{j=1}^{[n/2]} \lambda_j + 1/2\lambda_{[n/2]+1}, & \text{если число } n \text{ нечетное,} \end{cases}$$

где $[n/2]$ - целая часть числа $n/2$.

Показателем оптимизма назовем число

$$\lambda_O = \begin{cases} \sum\limits_{j=n/2+1}^{n} \lambda_j, & \text{если число } n \text{ четное,} \\ \sum\limits_{j=[n/2]+2}^{n} \lambda_j + 1/2\lambda_{[n/2]+1}, & \text{если число } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Очевидно, что $\lambda_P + \lambda_O = 1$

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ выбираются игроком A субъективно, но так, чтобы, в случае, если он оценивает ситуацию, в которой предстоит принимать решение, как неблагоприятную, то игрок должен проявлять больше пессимизма, чем оптимизма, а, значит, показатель пессимизма λ_P должен быть больше показателя оптимизма λ_O. И наоборот, если игрок оценивает ситуацию как благоприятную, то коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ должны выбираться таким образом, чтобы показатель оптимизма λ_O был больше показателя пессимизма λ_P. Если же игрок оценивает ситуацию как нейтральную, то коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ следует выбирать таким образом, чтобы показатели оптимизма и пессимизма были равными: $\lambda_P = \lambda_O = 0.5$ $(GEHur)(q, \overline{\lambda})$-*критерием* назовем критерий, по которому:

Показателем эффективности чистой стратегии A_i, или $(GEHur)(q,\overline{\lambda})$-*показателем эффективности стратегии* A_i, назовем число

$$(GEHur)_i(q,\overline{\lambda}) = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_j \tau_{ij}, \ i = 1,2,...,m;$$

Ценой игры в чистых стратегиях, или $(GEHur)(q;\overline{\lambda})$-*ценой игры в чистых стратегиях*, назовем максимальный из показателей эффективности:

$$(GEHur)_{S_A^C}(q;\overline{\lambda}) = \max\{(GEHur)_i(q;\overline{\lambda}) : 1 \le i \le m\} = \max\{\sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_j \tau_{ij} : 1 \le i \le m\}$$

Оптимальной во множестве чистых стратегий, или $(GEHur)(q;\overline{\lambda})$-*оптимальной* во множестве S_A^C, назовем чистую стратегию A_k с максимальным $(GEHur)(q;\overline{\lambda})$-показателем эффективности:

$$(GEHur)_k(q;\overline{\lambda}) = \max\{(GEHur)_i(q;\overline{\lambda}) : 1 \le i \le m\} = (GEHur)_{S_A^C}(q;\overline{\lambda}).$$

Распространим теперь $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$-критерий на множество смешанных стратегий.

Если игрок A придерживается смешанной стратегии $P = (p_1, p_2, ..., p_m)$, то при условии, что природа находится в состоянии j, элемент Гермейера выигрыша равен $q_j H(P;\Pi_j)$. Обозначим его, для краткости $g_j(P)$:

$$g_j(P) = q_j H(P;\Pi_j).$$

Так, если стратегия P, в частности, является чистой стратегией A_k, $k = 1,2,...,m$, то $g_j(P) = g_j(A_k) = q_j a_{ij} = g_{ij}$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

Расположим элементы $g_j(P)$ в неубывающем порядке:

$$g_{l_1}(P) = q_{l_1} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{il_1} \le g_{l_2}(P) = q_{l_2} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{il_2} \le ... \le g_{l_n}(P) = q_{l_n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{il_n},$$

где $l_1 = l_1(P)$, $l_2 = l_2(P)$, ..., $l_n = l_n(P)$ - перестановка чисел $1,2,...,n$, зависящая от стратегии $P = (p_1, p_2, ..., p_m)$.

Показателем эффективности смешанных стратегий по $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$-критерию или $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$-*показателем эффективности* смешанных стратегий назовем число

$$(GEHur)^P(P;q;\overline{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_{l_j}.$$

Для любой смешанной стратегии $P=(p_1,p_2,...,p_m)$ справедливо следующее неравенство:

$$(GEHur)^P(P;q;\overline{\lambda})=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g_{l_j}(P)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j q_{l_j} H(P;\Pi_{l_j})\leq\tau_n\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=\tau_n,$$

где, напомним, τ_n - наибольший элемент матрицы **$T(q)$**, который, в свою очередь совпадает с ценой игры в чистых стратегиях по критерию $M(q)$.

Таким образом, функция эффективности $(GEHur)^P(P;q;\lambda)$ ограничена сверху на множестве смешанных стратегий S_A, а, значит, имеет на этом множестве конечный супремум.

Ценой игры в смешанных стратегиях по $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$-критерию или $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$-*ценой игры* в смешанных стратегиях назовем супремум функции $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$ на множестве S_A:

$$(GEHur)^P_{S_A}(\lambda)=\sup_{P\in S_A}(GEHur)^P(P;\overline{\lambda}).$$

Множество S_A^C конечно поэтому всегда существует $(GEHur)^P_{S_A^C}(\overline{\lambda})$:

$$(GEHur)^P_{S_A^C}(\overline{\lambda})=\sup_{P\in S_A^C}(GEHur)^P(P;\overline{\lambda})=\max_{1\leq i\leq m}(GEHur)^P_i(\overline{\lambda})=\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tau_{ij}$$

Оптимальной стратегией по $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$-критерию или $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$-*оптимальной* стратегией на множестве смешанных стратегий назовем стратегию $P^O=(p_1^O,p_2^O,...,p_m^O)$,$(GEHur)^P(\overline{\lambda})$-показатель эффективности которой совпадает с $(GEHur)^P(\overline{\lambda})$-ценой игры в смешанных стратегиях:

$$(GEHur)^P(P^O;\overline{\lambda})=(GEHur)^P_{S_A}(\overline{\lambda}).$$

В третьей главе диссертации доказана теорема о существовании оптимальной по $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$-критерию стратегии во множестве смешанных стратегий.

Комбинация критерия Гермейера и обобщенного критерия Гурвица относительно рисков

Матрица Гермейера относительно рисков $\boldsymbol{G^r(q)}$ имеет следующий вид:

$\boldsymbol{G^r(q)}=$

Π_j A_i	Π_1	Π_2	…	Π_n
A_1	q_1r_{11}	q_2r_{12}	…	q_nr_{1n}
A_2	q_1r_{21}	q_2r_{22}	…	q_nr_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	q_1r_{m1}	q_2r_{m2}	…	q_nr_{mn}

Для упрощения записи, по аналогии с обозначениями, использованными при описании $(GEHur)^P(q,\overline{\lambda})$-критерия, обозначим элемент Гермейера риска при стратегии A_i, $i=1,2,\ldots,m$, и состоянии природы Π_j, $j=1,2,\ldots,n$, следующим образом: $g^r_{ij}=q_jr_{ij}$. Тогда матрицу Гермейера относительно рисков можно записать следующим образом:

$\boldsymbol{G^r}=$

Π_j A_i	Π_1	Π_2	…	Π_n
A_1	g^r_{11}	g^r_{12}	…	g^r_{1n}
A_2	g^r_{21}	g^r_{22}	…	g^r_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	g^r_{m1}	g^r_{m2}	…	g^r_{mn}

Переставим элементы каждой строки данной матрицы в невозрастающем порядке:

$$g^r_{il_1(i)} \ge \ldots \ge g^r_{il_n(i)},\ i=1,2,\ldots,m, \qquad (4)$$

где $l_1(i),l_2(i),\ldots,l_n(i)$ - некоторая перестановка номеров $1,.2,..,n$, зависящая от стратегии A_i. Обозначим $g^r_{il_j(i)}(i)=h_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$. Тогда неравенства (4) перепишутся в виде

$$h_{i1} \ge h_{i2} \ge \ldots \ge h_{in},\ i=1,2,\ldots,m$$

а матрица Гермейера $\boldsymbol{G^r(q)}$ преобразуется в матрицу $\boldsymbol{H(q)}$:

H(q) =

Ранги T_i	1	…	n
H_1	h_{11}	…	h_{1n}
…	…	…	…
H_m	h_{1n}	…	h_{mn}

Пусть $\overline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ - вектор, координаты которого удовлетворяют условиям (3) и несут следующую смысловую нагрузку: λ_j количественно характеризует субъективное представление (ощущение, уверенность) игрока A в том, что при выборе им любой чистой стратегии ему будет сопутствовать риск, элемент Гермейера которого имеет j-й ранг.

$(GEHur)^r(q,\overline{\lambda})$*-критерием* назовем критерий, по которому:

- *показателем неэффективности чистой стратегии* A_i, или $(GEHur)^r(q,\overline{\lambda})$*-показателем неэффективности стратегии* A_i, называется число

$$(GEHur)^r_i(q;\overline{\lambda}) = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_j h_{ij}, \ i = 1,2,...,m;$$

- *ценой игры в чистых стратегиях*, или $(GEHur)^r(q,\overline{\lambda})$*-ценой игры в чистых стратегиях*, называется минимальный из показателей неэффективности:

$$(GEHur)^r_{S^C_A}(q;\overline{\lambda}) = \min\{(GEHur)^r_i(q;\overline{\lambda}) : 1 \le i \le m\};$$

- *оптимальной* во множестве чистых стратегий, или $(GEHur)^r(q,\overline{\lambda})$-*оптимальной* во множестве S^C_A, назовем чистую стратегию A_k с минимальным $(GEHur)^r(q,\overline{\lambda})$-показателем неэффективности:

$$(GEHur)^r_k(q;\overline{\lambda}) = \min\{(GEHur)^r_i(q;\overline{\lambda}) : 1 \le i \le m\}.$$

Очевидно, что $(GEHur)^r(q,\overline{\lambda})$-показатель неэффективности $(GEHur)^r(q,\overline{\lambda})$-*оптимальной* во множестве S^C_A стратегии совпадает с $(GEHur)^r(q,\overline{\lambda})$*-ценой игры*:

$$(GEHur)^r_k(q;\overline{\lambda}) = (GEHur)_{S^C_A}(q;\overline{\lambda}).$$

Распространим теперь $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-критерий на множество смешанных стратегий.

Пусть игрок A придерживается смешанной стратегии $P=(p_1,p_2,\dots,p_m)$, а природа находится в состоянии Π_j, $j=1,2,\dots,n$. Тогда элемент Гермейера риска $q_j r(P;\Pi_j)$ обозначим $g_j^r(P)$:

$$g_j^r(P)=q_j r(P;\Pi_j).$$

Так, если стратегия P, в частности, является чистой стратегией A_k, $k=1,2,\dots,m$, то $g_j^r(P)=g_j^r(A_k)=q_j r_{kj}=g_{kj}^r$, $k=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$.

Расположим элементы $g_j^r(P)$ в невозрастающем порядке, аналогично:

$$g_{l_1}^r(P)=q_{l_1}\sum_{i=1}^{m}p_i r_{il_1}\geq g_{l_2}^r(P)=q_{l_2}\sum_{i=1}^{m}p_i r_{il_2}\geq\dots\geq g_{l_n}^r(P)=q_{l_n}\sum_{i=1}^{m}p_i r_{il_n},$$

где $l_1=l_1(P)$, $l_2=l_2(P)$,..., $l_n=l_n(P)$ - перестановка чисел $1,2,\dots,n$, зависящая от стратегии $P=(p_1,p_2,\dots,p_m)$.

Показателем неэффективности смешанной стратегии $P=(p_1,p_2,\dots,p_m)$ по $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-критерию или $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-*показателем неэффективности* смешанной стратегии $P=(p_1,p_2,\dots,p_m)$ назовем число

$$(GEHur)^r(P;q;\overline{\lambda})=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g_{l_j}^r.$$

Ценой игры в смешанных стратегиях по $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-критерию или $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-*ценой игры* в смешанных стратегиях назовем инфимум функции $(GEHur)^r(P;q;\overline{\lambda})$ на множестве S_A:

$$(GEHur)_{S_A}^r(q;\overline{\lambda})=\inf_{P\in S_A}(GEHur)^r(P;q;\overline{\lambda}).$$

Оптимальной стратегией по $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-критерию или $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-*оптимальной* стратегией во множестве смешанных стратегий назовем стратегию $P^O=(p_1^O,p_2^O,\dots,p_m^O)$, $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-показатель неэффективности которой совпадает с $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-ценой игры в смешанных стратегиях:

$$(GEHur)^r(P^O;q;\overline{\lambda})=(GEHur)_{S_A}^r(q;\overline{\lambda}).$$

В третьей главе диссертации доказана теорема о существовании оптимальной по $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-критерию стратегии во множестве смешанных стратегий.

Таким образом, мы определили $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$-критерий оптимальности стратегий относительно выигрышей и $(GEHur)^r(q;\overline{\lambda})$-критерий оптимальности стратегий относительно рисков в играх с природой в условиях полу-неопределенности.

Оба данных критерия позволяют учитывать соответственно все выигрыши ($(GEHur)^{r}(q;\overline{\lambda})$-критерий) и все риски ($(GEHur)^{r}(q;\overline{\lambda})$-критерий) при каждой стратегии игрока.

Четвертая глава диссертации – «Теоретико-игровая модель поведения инвестора на финансовом рынке» посвящена построению теоретико-игровой модели поведения инвестора на финансовом рынке. Приведена математическая формализация задачи оптимального инвестировании средств на финансовом рынке, определяется оптимальная стратегия поведения инвестора с точки зрения теоретико-игровой модели, рассматривается численный метод приближенного нахождения стратегий, оптимальных во множестве смешанных стратегий.

Математическая формализация задачи оптимального инвестирования средств на финансовом рынке

Проведем постановку задачи выбора оптимальной стратегии инвестирования средств на финансовом рынке с помощью построения для этой цели теоретико-игровой модели.

1. **Игрок** A - инвестор, вкладывающий средства в покупку финансовых активов.
2. **Чистая стратегия** игрока A - покупка одного из предложенных финансовых инструментов (стратегии A_1 - A_5), либо «сохранение» денежных средств (стратегия A_6):

Возможные чистые стратегии игрока	Смысл стратегии
A_1	Покупка фьючерса на нефть марки «Брент»
A_2	Покупка USD
A_3	Покупка акций компании «Газпром»
A_4	Покупка акций компании «Сбербанк»
A_5	Покупка облигаций 3-го выпуска компании «Лукойл»
A_6	Держать денежные средства (не покупать ничего)

3. **Природа** - показатель дневной доходности индекса РТС. В качестве возможных **состояний природы** мы примем принадлежность этого показателя к интервалам, в одном из которых он может находиться. На наш взгляд, наиболее уместно выделить следующие 6 состояний природы:

Состояние природы	**Интервал принадлежности показателя дневной доходности индекса РТС**
$П_1$	$(-\infty;-3]$
$П_2$	$(-3;-1.5]$
$П_3$	$(-1.5;0]$
$П_4$	$(0;1.5]$
$П_5$	$(1.5;3]$
$П_6$	$(3;+\infty)$

Вероятности состояний природы q_j, $j = 1,2,...,6$, могут быть рассчитаны статистически, исходя из дневных значений индекса РТС за отчетный период (с 21.08.2007 по 20.05.2009). Были получены следующие значения вероятностей состояний природы: $q_1 = 13\%$, $q_2 = 18\%$, $q_3 = 19\%$, $q_4 = 19\%$, $q_5 = 19\%$, $q_6 = 12\%$.

4. В качестве **выигрыша игрока** a_{ij}, $i = 1,2,...,6$, $j = 1,2,...,6$, примем сумму значений показателя дневной доходности цены финансового инструмента за рассмотренный период, покупка которого соответствует стратегии A_i при условии нахождении природы в состоянии $П_j$.

Таким образом, оптимальность рассмотренных стратегий игрока A будет рассматриваться с точки зрения доходности финансовых инструментов без учета влияния фактора рыночных рисков.

В результате проведенной формализации задачи получаем, что матрица выигрышей будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\begin{smallmatrix} & \Pi_j \\ A_i & \end{smallmatrix} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 & \Pi_5 & \Pi_6 \\
\hline
A_1 & -1.342 & -0.268 & -0.170 & -1.127 & 0.288 & 0.391 \\
\hline
A_2 & 0.367 & 0.135 & -0.002 & -0.003 & -0.033 & -0.225 \\
\hline
A_3 & -4.022 & -1.158 & -1.022 & 1.119 & 1.202 & 3.793 \\
\hline
A_4 & -4.344 & -1.328 & -0.953 & 1.008 & 1.338 & 3.850 \\
\hline
A_5 & -0.14 & 0.013 & 0.148 & 0.044 & -0.054 & 0.099 \\
\hline
A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

С помощью построения теоретико-игровой модели мы получили следующие результаты.

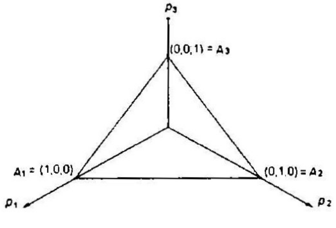
Если инвестор полностью доверяет имеющейся информации относительно вероятностей состояний природы (то есть игра протекает в условиях риска), то оптимальной стратегией для него является инвестирование всех имеющихся у него средств в покупку фьючерса на нефть. Если инвестор не владеет информацией вероятностях состояний природы и считает их равновероятными, то его оптимальной стратегией является инвестирование средств в покупку американской валюты.

Если инвестор не владеет информацией о вероятностях состояний природы или владеет, но относится с ней с осторожностью (то есть игра протекает в условиях неопределенности и условиях полу-неопределенности), то для игрока-пессимиста оптимальной стратегией по критериям оптимальности *относительно выигрышей* в чистых стратегиях является стратегия «Держать все средства и ничего не покупать». По критериям оптимальности в смешанных стратегиях оптимальной стратегией игрока является распределение средств между покупкой USD, акциями Газпрома, облигациями Лукойла в найденных по модели пропорциях. Согласно $(GEHur)^P(q;\overline{\lambda})$-критерию (в чистых и смешанных стратегиях), оптимальной стратегией является покупка USD. Для игрока-оптимиста оптимальными стратегиями по критериям оптимальности в чистых стратегиях будут либо покупка акций Сбербанка, либо акций Газпрома, либо фьючерса на нефть в зависимости от выбранного критерия оптимальности. Оптимальными стратегиями в смешанных стратегиях является распределение средств в покупку нефти и акции Газпрома. Для игрока-оптимиста результаты, полученные при помощи $(GEHur)^{P}(q;\overline{\lambda})$ - и $(GEHur)^{r}(q;\overline{\lambda})$ - критериев совпадают с результатами, полученными при помощи обобщенного критерия Гурвица относительно выигрышей и относительно рисков.

Численный метод приближенного нахождения стратегий, оптимальных во множестве смешанных стратегий

Точное нахождение оптимальных стратегий во множестве смешанных стратегий для игр, число чистых стратегий в которых больше двух, требует достаточно объемных математических вычислений, которые трудно проводить на практике. При построении теоретико-игровой модели поведения инвестора на финансовом рынке для нахождения стратегий, оптимальных во множестве смешанных стратегий был разработан численный метод приближенного нахождения оптимальной стратегии во множестве смешанных стратегий.

Проиллюстрируем суть данного метода на примере игры с $m=3$. Пусть игрок A имеет всего 3 чистые стратегии: A_1, A_2 и A_3. В этом случае множество смешанных стратегий S_A геометрически будет представлять собой фундаментальный симплекс размерности 2 в 3-мерном пространстве с тремя вершинами (1;0;0), (0;1;0) и (0;0;1), изображающими чистые стратегии, соответственно, A_1, A_2 и A_3, т.е. представлять собой правильный треугольник $A_1A_2A_3$.



Осуществим численный перебор его смешанных стратегий с шагом $d=0.2$, а именно, переберем последовательно все такие векторы (p_1; p_2; p_3), которые удовлетворяют следующим условиям:

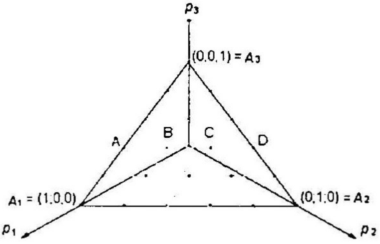
1) $0 \leq p_i \leq 1$, $i = 1,2,3$.

2) $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

P_1	P_2	P_3
0	0	1
0	0.2	0.8
…	…	…
0.8	0.2	0
1	0	0

Всего мы получим 21 смешанных стратегий, которые геометрически будут представлять собой точки, лежащие во множестве смешанных стратегий игрока.

Эти точки можно построить также следующим образом. Одну из сторон треугольника $A_1A_2A_3$ (безразлично, какую), например, сторону A_1A_2 делим на σ равных частей, где σ - величина, обратная к шагу: $\sigma = 1/d$. В данном примере $\sigma = 5$. Не умаляя общности, можно считать, что шаг $d_k = 1/k$, $k = 1,2,\ldots$. При $k = 1$ шаг $d_1 = 1$ и тогда сторону A_1A_2 мы делим на $\sigma = 1$ равных частей. При $k = 2$ шаг $d_2 = 1/2$ и сторону A_1A_2 мы делим на $\sigma = 2$ равных частей и т.д. Из точек деления проводим прямые, параллельные сторонам A_1A_3 и A_2A_3. Точки пересечения этих прямых со сторонами треугольника и между собой и будут составлять множество точек на графике:



Рассмотрим следующие 4 точки: *A* (0.6; 0; 0.4), *B* (0.4; 0.2; 0.4), *C* (0.2; 0.4; 0.4), *D* (0; 0.6; 0.4). Координаты любой точки отрезка *AD* будут задаваться вектором: (0.6 – λ; 0.6 λ; 0.4), 0 $\leq\lambda\leq$1.

Получается, что отрезки, соединяющие данные точки пересекаются не хаотично, а образуют «сетку», поэтому полученные точки равномерно заполняют все множество смешанных стратегий. Количество точек (плотность «сетки») зависит от величины шага: чем меньше шаг, тем больше точек и, соответственно, тем ближе численно полученная оптимальная смешанная стратегия будет находиться к истиной оптимальной стратегии во множестве смешанных стратегий.

Если $P^k = (p_1^k, p_2^k, \dots, p_m^k)$ - смешанная стратегия с наибольшим показателем эффективности среди смешанных стратегий «сетки» с шагом $d_k = 1/k$, $k = 1,2,\dots$, то при $k \to \infty$ $(d_k \to 0)$ последовательность P^k будет стремиться к оптимальной стратегии.

Замечание. Абстрагируясь от нашего схематического примера, важно сделать замечание по поводу расчета числа возможных вариантов перебора стратегий (необходимое число итераций). Очевидно, что в общем случае это число будет зависеть от числа чистых стратегий игрока и от шага, с которым осуществляется перебор смешанных стратегий. Обозначив шаг *d*, можно видеть, что в случае всего двух чистых стратегий игрока, число полученных численно смешанных стратегий будет равно $(1/d + 1)$, т.е. равно 6 при шаге 0.2. Если игрок обладает тремя чистыми стратегиями, то число численно полученных смешанных стратегий будет равно сумме натуральных чисел от 1 до $(1/d + 1)$ включительно[1] (21 при шаге 0.2). В случае 4-х чистых стратегий число численно полученных смешанных стратегий будет равно 56 при шаге 0.2 и т.д.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

Основные положения диссертации отражены в 8 научных работах.

В журналах, определенных ВАК, опубликованы 3 работы общим объемом 1,45 п.л.:

1. Гулюгин А.Н. Комбинация критерия Гермейера и обобщенного критерия Гурвица для определения оптимальности чистых стратегий относительно выигрышей в играх с природой [текст] / Л.Г.Лабскер, А.Н. Гулюгин // Управление рисками. – М., 2008. - № 2(46). - с. 43-52. (0,64 / 0,32 п.л.);
2. Гулюгин А.Н. Проблема выбора оптимального инструмента инвестирования на рынке акций. Новый подход с применением теории игр с природы [текст] / А.Н. Гулюгин // Экономические науки. – М., 2009. - №3. - с. 317-322. (0,43 п.л.);

---

[1] Сумму ряда натуральных чисел до числа *n* включительно можно вычислить по формуле $n(n+1)/2$.

3. Гулюгин А.Н. Оптимизация покупки акций с помощью комбинации критерия Гермейера и обобщенного критерия Гурвица относительно рисков // Вестник Финансовой академии [текст] / А.Н. Гулюгин // - М., 2010. - №2 (56). – с. 17–21. (0,38 п.л.).

В других научных журналах и изданиях опубликованы следующие работы:

4. Гулюгин А.Н. Формализованный выбор коэффициентов критерия, сконструированного на основе комбинации критерия Гермейера и обобщенного критерия Гурвица // Материалы докладов XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев, А.И. Андреев. [Электронный ресурс] / А.Н. Гулюгин // — М.: Издательство МГУ; СП МЫСЛЬ, 2008М.: Издательство МГУ: СП МЫСЛЬ, 2008. - с.9-10. (0,042 п.л.);
5. Гулюгин А.Н. Комбинация критерия Гермейера и обобщенного критерия Гурвица для оптимальности чистых стратегий относительно выигрышей в играх с природой» [текст] / Л.Г.Лабскер, А.Н. Гулюгин // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения-XIX». – Воронеж: ВГУ, 2008. - с. 123-124. (0,06 п.л.);
6. Гулюгин А.Н. Оптимизация инвестирования средств в приобретение акций в условиях финансовой неопределенности с помощью нового критерия оптимальности [текст] / А.Н. Гулюгин // Стабилизация экономического развития Российской Федерации. VII Международная научно-практическая конференция: сборник статей. – Пенза: РИО ПГСХА, 2008. – с 148-151. (0,2 п.л.);
7. Гулюгин А.Н. Новый критерий оптимальности стратегий относительно рисков [текст] / А.Н. Гулюгин // Математическое моделирование в образовании, науке и производстве: Тезисы VI Международной конференции. – Тирасполь: Изд-во Приднестр. ун-та, 2009. - с. 114-115. (0,1 п.л.);
8. Гулюгин А.Н. Комбинация критерия Гермейера и обобщенного критерия Гурвица оптимальности смешанных стратегий относительно выигрышей в играх с природой [текст] / А.Н. Гулюгин // Экономика и управление: инновационные пути развития: материалы международной научно-практической конференции – в 2-х частях. ч.1 / Отв. ред. Л.А. Тягунова.– Саратов: ИЦ «Наука», 2010. – с. 94. (0,1 п.л.).