

0-779256

На правах рукописи
УДК 519.65



Стрелкова Елена Валерьевна

**АППРОКСИМАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫМИ
 \mathcal{L} -СПЛАЙНАМИ**

01.01.01 – математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2009

Работа выполнена в отделе аппроксимации и приложений Института математики и механики Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

А. Г. Бабенко

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

В. М. Бадков

доктор физико-математических наук

Ю. С. Волков

Ведущая организация:

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Защита диссертации состоится **26 ноября 2009 г.** в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.02 при Институте математики и механики УрО РАН по адресу: г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН.

Автореферат разослан

9 октября 2009 г.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КГУ



0000550465

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 004.006.02,
кандидат
физико-математических наук

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Н. Ю. Антонов'.

Н. Ю. Антонов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию аппроксимативных свойств локальных полиномиальных и \mathcal{L} -сплайнов, построенных по значениям аппроксимируемой функции в точках или ее значениям в среднем.

Актуальность темы. В настоящее время основным аппаратом автоматизированного геометрического проектирования при описании сложных кривых и поверхностей являются методы сплайн-функций. Одномерные полиномиальные сплайны в их простейшей форме представляют собой кусочные многочлены, гладко состыкованные между собой в заданных точках. Наряду с полиномиальными сплайнами в вычислительной математике хорошо известны и активно применяются их обобщения, названные \mathcal{L} -сплайнами (см., например, [1, 23]). Дадим необходимые определения.

Пусть C и L_p , $1 \leq p \leq \infty$ – пространства функций f , заданных на отрезке числовой прямой или на всей прямой \mathbb{R} с обычным определением нормы.

Пусть $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(\mathcal{D})$ (\mathcal{D} – оператор дифференцирования, $r \in \mathbb{N}$) – произвольный линейный дифференциальный оператор порядка r с постоянными действительными коэффициентами (старший коэффициент полагаем равным 1). Символом $S^{\mathcal{L}_r}$ или $S^{\mathcal{L}_r}(\Delta)$ обозначим множество всех \mathcal{L} -сплайнов порядка r минимального дефекта (т.е. дефекта 1) с узлами на сетке $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, т.е. $S^{\mathcal{L}_r} = S^{\mathcal{L}_r}(\Delta) =$

$$= \{S \in C^{r-2}[a, b] : \mathcal{L}_r(\mathcal{D})S(x) = 0, x \in (x_j, x_{j+1}), j = \overline{0, N-1}\}.$$

Ясно, что если оператор $\mathcal{L}_r(\mathcal{D})$ является оператором взятия r -ой производной, т.е. $\mathcal{L}_r(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^r$, то множество $S^{\mathcal{L}_r}$ совпадает с множеством S^r полиномиальных сплайнов порядка r (степени $r-1$) с узлами на сетке Δ . Аналогичным образом определяются \mathcal{L} -сплайны и на всей числовой оси \mathbb{R} .

Для функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} C_r^s f(x+sh), \quad C_r^s = \frac{r!}{s!(r-s)!}, \quad (1)$$

конечную разность r -го порядка с шагом $h > 0$. Полиномиальным B -сплайном (см., например [3]) порядка r (степени $r-1$) называется функция

$$B_r(x) = C_r(h) \Delta_h^r \left(\left(x - \frac{rh}{2} \right)_+ \right)^{r-1}, \quad (2)$$

где $t_+ = \max\{0, t\}$. Нормирующий множитель $C_r(h) > 0$ выбирается так, чтобы имело место равенство $\sum_{j \in \mathbb{Z}} B_r(x - jh) = 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

В 1975 году Т.Лич и Л.Шумейкер [22] (см., также [3, 5]) построили локальные полиномиальные сплайны r -го порядка вида $S_r(x) = S_r(f, x) = \sum_j \sum_{s=-k}^k \gamma_s f((j+s)h) B_r(x - jh)$ ($x \in \mathbb{R}$) для любой функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $k = \lceil \frac{r-1}{2} \rceil$ и действительные коэффициенты γ_s выбраны из условия точности формулы $S_r(f, x) = f(x)$ для многочленов степени $r-1$. В книге Ю.С. Завьялова, Б.И. Квасова, В.Л. Мирошниченко [3] было показано, что в ряде случаев построенные локальные полиномиальные сплайны S_r обладают наилучшими аппроксимативными свойствами на классах функций

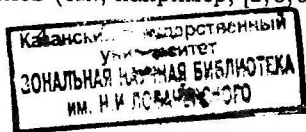
$$W_p^{r-1} = W_p^{r-1}[a, b] = \{f: f^{(r-2)} \in AC, \|f^{(r-1)}\|_{L_p[a, b]} \leq 1\} \quad (3)$$

$$(1 \leq p \leq \infty, r \geq 2)$$

на отрезке $[a, b]$, обеспечивая по порядку h такую же точность, какую дает соответствующий колмогоровский поперечник указанного класса функций. Здесь AC - класс функций, абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$. Аналогичные построения локальных полиномиальных сплайнов были выполнены в [3, 22] также для полиномиальных сплайнов с неравномерными узлами. Этот аппарат успешно применялся в вычислительной математике для решения прикладных задач, поскольку он имел очевидные преимущества перед интерполяционными сплайнами на оси \mathbb{R} , значения которых зависели от значений аппроксимируемой функции f во всех точках равномерной сетки на оси \mathbb{R} (см., например, [6, 10]).

С точки зрения создания простых вычислительных схем для аппроксимации быстро растущих и разрывных функций большой интерес представляет построение локальных \mathcal{L} -сплайнов, аналогичных по своей конструкции выше описанным полиномиальным сплайнам. Этим вопросам посвящена первая глава диссертации.

В настоящее время имеется значительное число работ (см., например, [2, 4, 8, 9, 13, 19]), посвященных численным аспектам аппроксимации полиномиальными сплайнами функций одного переменного, связанных с локальным наследованием сплайном свойств монотонности и выпуклости (обобщенной выпуклости, ковыпуклости, k -монотонности и т.д.) исходных данных. Однако, сохранения монотонности и выпуклости для интерполяционных сплайнов удается достичь только при дополнительных, довольно жестких ограничениях на исходные данные и сетки узлов (см., например, [2, 8, 9]).



В 1993 году Ю.Н. Субботин [13] на классе функций W_∞^2 с ограниченной почти всюду второй производной и заданных на отрезке на равномерной сетке построил локальный неинтерполяционный метод аппроксимации, сохраняющий локально геометрические свойства (монотонность и выпуклость) исходных данных – значений приближаемой функции f в узлах равномерной сетки. В периодическом случае этот метод оказался оптимальным в смысле поперечников по А.Н. Колмогорову и по В.Н. Коновалову. В.Т. Шевалдин и К.В. Костусов [7, 21] развили этот метод применительно к экспоненциальным и тригонометрическим сплайнам с равномерными узлами, соответствующим линейным дифференциальным операторам третьего порядка вида $\mathcal{D}(\mathcal{D}^2 \pm \beta^2)$. Вторая глава диссертации посвящена развитию отмеченных результатов.

Если аппроксимируемая функция f не является непрерывной, а только интегрируемой, то естественно рассматривать вопросы приближения такой функции, исходя из ее значений в узлах сетки, т.к. значения в отдельных точках несущественны для таких функций. Обычно в задачах теории приближения функций используют интерполяцию в среднем. Полиномиальный сплайн S_r с равномерными узлами $x_j = jh$ ($j \in \mathbb{Z}$) называется *интерполяционным в среднем для функции f* , если он удовлетворяет следующим равенствам

$$\frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} f(jh + t) dt = S_r(jh) \quad (j \in \mathbb{Z}, h_1 > 0).$$

Вопросы существования, единственности, аппроксимативные и экстремальные свойства интерполяционных в среднем полиномиальных сплайнов изучались в работах Ю.Н.Субботина [12, 14, 15].

Для функций f , определенных и интегрируемых на всей числовой оси \mathbb{R} , рассмотрим функционалы вида

$$b_j(f) = \begin{cases} \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} f(jh + t) dt, & h_1 > 0, \\ f(jh), & h_1 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

Представляет интерес изучение аппроксимативных и формосохраняющих свойств локальных полиномиальных сплайнов r -го порядка вида $S_r(x) = S_r(f, x) = \sum_j b_j(f) B_r(x - jh)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Эти сплайны не являются интерполяционными в среднем (несмотря на то, что при $h_1 > 0$ они построены по значениям функции

f в среднем). Важной задачей является вычисление явной зависимости величины погрешности аппроксимации такими сплайнами на соболевских классах $W_{\infty}^m(\mathbb{R})$ ($m \leq r - 1$) не только от величины шага сетки h , но и от величины шага усреднения h_1 . Решению этой задачи в случае $r = 3$ (т.е. в случае параболических сплайнов) посвящена третья глава диссертации.

Цель работы. Построение и изучение аппроксимативных свойств локальных \mathcal{L} -сплайнов с равномерными узлами, сохраняющих базисные функции из ядра линейного дифференциального оператора \mathcal{L}_r порядка r с постоянными действительными коэффициентами. Построение и изучение аппроксимативных свойств локальных \mathcal{L} -сплайнов третьего порядка с произвольным расположением узлов, обладающих формосохраняющими и сглаживающими свойствами. Изучение аппроксимативных и формосохраняющих свойств параболических локальных сплайнов, построенных на основе интерполяции в среднем.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа и теории приближения функций, в частности, теории сплайнов.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Основные из них заключаются в следующем.

1. Результаты диссертации, полученные в первой главе, развивают, но не обобщают отмеченные выше результаты Т. Лича, Л. Шумейкера [22], Ю.С. Завьялова, Б.И. Квасова, В.Л. Мирошниченко [3]. Построены локальные \mathcal{L} -сплайны r -го порядка $S(x) = S(f, x)$ с равномерными узлами, сохраняющие базисные функции из ядра линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(\mathcal{D})$ с постоянными действительными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого попарно различны. Приведена оценка погрешности аппроксимации некоторых соболевских классов функций (зависящих от оператора \mathcal{L}_r) построенными \mathcal{L} -сплайнами в терминах ядра интегрального представления разности $f(x) - S(x)$.

2. Построены локальные формосохраняющие экспоненциальные и тригонометрические сплайны на оси и на отрезке с произвольным расположением узлов, соответствующие линейным дифференциальным операторам третьего порядка вида $\mathcal{L}_3(\mathcal{D}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^2 \pm \beta^2)$. Получена поточечная оценка погрешности приближения указанными \mathcal{L} -сплайнами. Данные результаты являются продолжением аналогичных исследований Ю.Н. Субботина [13], К.В. Костоусова и В.Т. Шевалдина [7, 19, 21].

3. На классе функций $W_{\infty}^2(\mathbb{R})$ с ограниченной почти всюду вто-

рой производной точно вычислена величина погрешности аппроксимации функций f и их производных локальными параболическими сплайнами, построенными на основе интерполяции в среднем.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Построенные в диссертации локальные \mathcal{L} -сплайны могут быть использованы в вычислительной математике для создания пакетов программ формосохраняющей аппроксимации.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих математических конференциях и научных семинарах: совместный семинар отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений Института математики и механики УрО РАН под руководством члена-корреспондента РАН Ю. Н. Субботина и профессора Н. И. Черныха; научный семинар под руководством члена-корреспондента РАН В. И. Бердышева в Институте математики и механики УрО РАН; научный семинар под руководством профессора В. В. Арестова в Уральском государственном университете им. А. М. Горького; научный семинар под руководством В. Л. Мирошниченко и Ю. С. Волкова в Институте математики СО РАН (г. Новосибирск); научный семинар под руководством профессора К. Еттера в г. Штутгарте (Германия); Международная конференция "Прикладной анализ, теория аппроксимации и вычислительная математика" (17. Rhein-Ruhr-Workshop) (г. Боркен, Германия, 2007 г.); Международная летняя научная Школа С. Б. Стечкина по теории функций (г. Миасс, 2007 г.); 37-я, 38-я и 40-я Региональные молодежные конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (г. Екатеринбург, 2006 г., 2007 г., 2008 г.)

Публикации. Результаты диссертации опубликованы автором в работах [30]– [36].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Объем диссертации – 88 страниц. Список литературы содержит 36 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Обзор результатов главы 1. В главе 1 построены локальные \mathcal{L} -сплайны r -го порядка с равномерными узлами, сохраняющие базисные функции из ядра линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(\mathcal{D})$ с постоянными действительными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого попарно различны. Построение этих сплайнов, в отличие от [3, 22], проводится без использования тождеств Марседена (т.е. представлений базисных функций яд-

ра оператора через базисные $B - \mathcal{L}$ -сплайны, см. определение ниже) и без применения рекуррентных соотношений для $B - \mathcal{L}$ -сплайнов, хотя известно, что эти свойства имеют место даже для более общих чебышевских сплайнов (см. [29]).

Пусть $r \in \mathbb{N}$, \mathcal{D} – оператор дифференцирования и

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(\mathcal{D}) = \prod_{j=1}^r (\mathcal{D} - \beta_j) \quad (5)$$

– линейный дифференциальный оператор порядка r с постоянными действительными коэффициентами, все корни β_j характеристического многочлена которого попарно различны. Пусть $\varphi(x) = \varphi_r(x)$ – решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_r(\mathcal{D})f = 0$, удовлетворяющее условиям: $\varphi^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1}$ ($j = \overline{0, r-1}$), где $\delta_{j,r-1}$ – символ Кронекера. Заметим, что этими условиями однозначно определяются числа A_j в представлении $\varphi(x) = \sum_{j=1}^r A_j e^{\beta_j x}$. Для функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, следуя А.Шарме и И.Цимбаларио [16], определим

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \prod_{j=1}^r (T - e^{\beta_j h} E) f(x) = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \mu_s f(x + sh) \quad (6)$$

– конечную разность с шагом $h > 0$, соответствующую оператору \mathcal{L}_r . Здесь $Tf(x) = f(x + h)$, $Ef(x) = f(x)$, $\mu_s = \mu_s(\mathcal{L}_r) > 0$ ($s = \overline{0, r}$).

$B - \mathcal{L}$ -сплайн $B_{\mathcal{L}_r}(x)$ (см., например, [23]) с носителем $[-\frac{rh}{2}, \frac{rh}{2}]$ и узлами в точках $\{jh + \frac{h}{2}\}_{j=-k-1}^k$ при $r = 2k + 1$ и с узлами в точках $\{jh\}_{j=-k}^k$ при $r = 2k$ определяется формулой

$$B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x) = C_{\mathcal{L}_r}(h) \Delta_h^{\mathcal{L}_r} \varphi \left(\left(x - \frac{rh}{2} \right)_+ \right). \quad (7)$$

Нормирующий множитель $C_{\mathcal{L}_r}(h) > 0$ для дальнейшего изложения удобно взять равным 1.

Для любой функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ полагаем $y_j = f(jh)$ и $y_{j+\frac{1}{2}} = f((j + \frac{1}{2})h)$ ($j \in \mathbb{Z}$). При $r = 2k + 1$ рассмотрим последовательность функционалов

$$I_j = I_{j, 2k+1} = c_1 y_{j-k} + c_2 y_{j-k+1} + \dots + c_{2k+1} y_{j+k}, \quad (8)$$

а при $r = 2k$

$$I_j = I_{j, 2k} = b_1 y_{j-k+\frac{1}{2}} + b_2 y_{j-k+\frac{3}{2}} + \dots + b_{2k} y_{j+k-\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Локальный \mathcal{L} -сплайн r -го порядка, соответствующий функции f , определим формулой $S(x) = S(f, x) = \sum_j I_j B(x - jh) (x \in \mathbb{R})$, где $B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x)$, а неизвестные числа $c_s (s = \overline{1, 2k+1})$ и $b_s (s = \overline{1, 2k})$ выбираются таким образом, чтобы имели место равенства

$$S(e^{\beta_j x}, x) = e^{\beta_j x}, \quad j = \overline{1, r} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (10)$$

Для того, чтобы сформулировать основные результаты первой главы, введем еще некоторые обозначения. Пусть A – матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e^{\beta_1 h} & e^{2\beta_1 h} & \dots & e^{\beta_1(r-1)h} \\ 1 & e^{\beta_2 h} & e^{2\beta_2 h} & \dots & e^{\beta_2(r-1)h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{\beta_r h} & e^{2\beta_r h} & \dots & e^{\beta_r(r-1)h} \end{pmatrix}$$

и $p(x) = p_r(x) = \prod_{j=1}^r (x - e^{\beta_j h})$ – характеристический многочлен разностного оператора $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{2k+1})^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{2k})^T$.

В случае нечетного $r = 2k + 1$ положим $d_j = d_{j, 2k+1} = \frac{e^{\beta_j(2kh - \frac{h}{2})}}{p'(e^{\beta_j h})_{A_j}} (j = \overline{1, 2k+1})$, а в случае четного $r = 2k$ определим $d_j = d_{j, 2k} = \frac{e^{\beta_j(2kh - \frac{3h}{2})}}{p'(e^{\beta_j h})_{A_j}} (j = \overline{1, 2k})$, и пусть $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_r)^T$ – соответствующий вектор-столбец.

Теорема 1. Пусть $r = 2k$ и действительные числа $\beta_j (j = \overline{1, 2k})$ попарно различны. Тогда система линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{b} = \mathbf{d}$ относительно $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{2k})^T$ однозначно разрешима и ее решение обращает в тождества равенства (10).

Теорема 2. Пусть $r = 2k + 1$ и действительные числа $\beta_j (j = \overline{1, 2k+1})$ попарно различны. Тогда система линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{c} = \mathbf{d}$ относительно $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{2k+1})^T$ однозначно разрешима и ее решение обращает в тождества равенства (10).

Сформулированные утверждения имеют место и для случая, если оператор \mathcal{L}_r имеет комплексные корни при выполнении неравенства $\alpha h < \pi$. Здесь α – максимум из модулей мнимых частей корней характеристического многочлена.

В § 3 – 4 главы 1 указаны оценки погрешности аппроксимации некоторых соболевских классов функций (зависящих от оператора

\mathcal{L}_r) построенными сплайнами в терминах ядра интегрального представления разности $f(x) - S(x)$ и рассмотрены частные случаи полученных результатов.

Обзор результатов главы 2. В главе 2 на оси и на отрезке строятся локальные формосохраняющие \mathcal{L} -сплайны третьего порядка с произвольным расположением узлов, соответствующие операторам вида $\mathcal{L}_3(\mathcal{D}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^2 \pm \beta^2)$ ($\beta > 0$). Для формулировки результатов ограничимся здесь только случаем $\mathcal{L}_3(\mathcal{D}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^2 - \beta^2)$, приводящим к экспоненциальным сплайнам. Пусть $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^2 - \beta^2$ ($\beta > 0$), I – отрезок числовой прямой \mathbb{R} или вся ось \mathbb{R} и

$$W_\infty^{\mathcal{L}_2}(I) = \{f : f' \in AC, \|\mathcal{L}_2(\mathcal{D})f\|_{L_\infty(I)} \leq 1\}.$$

Рассмотрим на оси \mathbb{R} бесконечную в обе стороны сетку узлов: $\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$. Пусть $h_j = x_{j+1} - x_j$; $x_{j+1/2} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$ ($j \in \mathbb{Z}$). Для функции f , определенной на оси \mathbb{R} , положим $y_j = f(x_j)$ и построим обобщенную разделенную разность

$$\Delta^{\mathcal{L}_2}[y_j, y_{j+1}, y_{j+2}] = y_j \frac{\text{sh } \beta h_{j+1}}{\text{sh } \beta h_j} - y_{j+1} \frac{\text{sh } \beta (h_j + h_{j+1})}{\text{sh } \beta h_j} + y_{j+2},$$

соответствующую оператору $\mathcal{L}_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^2 - \beta^2$, по значениям функции $y = f(x)$ в точках x_j, x_{j+1}, x_{j+2} . Разность $\Delta^{\mathcal{L}_2}[y_j, y_{j+1}, y_{j+2}]$ обращается в нуль на сеточных значениях $y_j = f(x_j)$ любой функции f из ядра линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_2(\mathcal{D})$. В случае $\beta = 0$ эта разность с точностью до постоянного множителя совпадает с обычной разделенной разностью второго порядка. Отметим, что обобщенные разделенные разности, соответствующие произвольной, линейно независимой системе функций и произвольным узлам, были введены Т. Поповичу [25] в 1959 году в терминах определителей. Функции f , определенной на оси \mathbb{R} , поставим в соответствие локальный экспоненциальный сплайн, соответствующий линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_3(\mathcal{D}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^2 - \beta^2)$, вида

$$S(x) = S(f, x) = a + b \text{sh } \beta(x - x_j) + c \text{ch } \beta(x - x_j) + \frac{d}{\beta^2} \left(\text{ch } \beta \left((x - x_{j+1/2})_+ \right) - 1 \right), \quad x \in [x_j; x_{j+1}] \quad (j \in \mathbb{Z}), \quad (11)$$

где $t_+ = \max\{0, t\}$ и коэффициенты a, b, c, d определяются следующим образом:

$$a = - \frac{\text{sh } \frac{\beta h_{j-1}}{4} \Delta^{\mathcal{L}_2}[y_{j-1}, y_j, y_{j+1}]}{2 \text{sh } \frac{\beta h_j}{4} \text{sh } \frac{\beta}{4} (h_j + h_{j-1}) \text{sh } \beta h_j},$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{1}{\operatorname{sh} \beta h_j} \left(y_{j+1} - y_j \operatorname{ch} \beta h_j - \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta h_{j-1}}{4} \operatorname{ch} \frac{\beta h_j}{4} \Delta \mathcal{L}_2[y_{j-1}, y_j, y_{j+1}]}{\operatorname{sh} \frac{\beta}{4}(h_j + h_{j-1})} \right), \\
c &= y_j + \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta h_{j-1}}{4} \operatorname{ch} \frac{\beta h_j}{2} \Delta \mathcal{L}_2[y_{j-1}, y_j, y_{j+1}]}{2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{4}(h_j + h_{j-1}) \operatorname{sh} \frac{\beta h_j}{4} \operatorname{sh} \beta h_j}, \\
d &= \frac{\beta^2}{2 \operatorname{sh} \frac{\beta h_j}{4}} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\beta h_{j+1}}{4} \Delta \mathcal{L}_2[y_j, y_{j+1}, y_{j+2}]}{\operatorname{sh} \frac{\beta}{4}(h_j + h_{j+1}) \operatorname{sh} \beta h_{j+1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta h_{j-1}}{4} \Delta \mathcal{L}_2[y_{j-1}, y_j, y_{j+1}]}{\operatorname{sh} \frac{\beta}{4}(h_j + h_{j-1}) \operatorname{sh} \beta h_j} \right). \tag{12}
\end{aligned}$$

В главе 2 доказаны формосохраняющие и сглаживающие свойства функции $S(f, x)$. В качестве иллюстрации приведем один из результатов.

Теорема 3. *Локальный экспоненциальный сплайн $S(x)$, определенный формулами (11)–(12), локально наследует свойство обобщенной монотонности исходных данных $\{y_j\}$ в том смысле, что:*

а) *если $y_{j+1} - y_j \operatorname{ch} \beta h_j \geq 0$, $y_j \operatorname{ch} \beta h_{j-1} - y_{j-1} \geq 0$, $y_{j+2} - y_{j+1} \operatorname{ch} \beta h_{j+1} \geq 0$ и $y_{j+1} \operatorname{ch} \beta h_j - y_j \geq 0$, то $S(x)$ не убывает на промежутке $(x_j; x_{j+1})$;*

б) *если $y_{j+1} - y_j \operatorname{ch} \beta h_j \leq 0$, $y_j \operatorname{ch} \beta h_{j-1} - y_{j-1} \leq 0$, $y_{j+2} - y_{j+1} \operatorname{ch} \beta h_{j+1} \leq 0$ и $y_{j+1} \operatorname{ch} \beta h_j - y_j \leq 0$, то $S(x)$ не возрастает на промежутке $(x_j; x_{j+1})$.*

Пусть $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}[x_{j-1}, x_{j+2}]$ ($j \in \mathbb{Z}$) и

$$\Psi_j(x) = \begin{cases} \Psi_{j,1}(x), & x \in [x_j, x_{j+1/2}], \\ \Psi_{j,2}(x), & x \in [x_{j+1/2}, x_{j+1}], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi_{j,1}(x) &= \frac{2}{\beta^2} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\beta}{2}(x - x_j) \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}(x_{j+1} - x)}{\operatorname{ch} \frac{\beta h_j}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}(x - x_{j+1/2})}{\operatorname{sh} \frac{\beta h_j}{4} \operatorname{ch} \frac{\beta h_j}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta h_{j-1}}{4} \operatorname{ch} \frac{\beta}{4}(h_j + h_{j-1})}{\operatorname{ch} \frac{\beta h_{j-1}}{2}} \right], \\
\Psi_{j,2}(x) &= \frac{2}{\beta^2} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\beta}{2}(x - x_j) \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}(x_{j+1} - x)}{\operatorname{ch} \frac{\beta h_j}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}(x - x_{j+1/2})}{\operatorname{sh} \frac{\beta h_j}{4} \operatorname{ch} \frac{\beta h_j}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta h_{j+1}}{4} \operatorname{ch} \frac{\beta}{4}(h_j + h_{j+1})}{\operatorname{ch} \frac{\beta h_{j+1}}{2}} \right].
\end{aligned}$$

Теорема 4. Для любой функции $f \in W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}[x_{j-1}, x_{j+2}]$ ($j \in \mathbb{Z}$) для сплайна $S(x) = S(f, x)$, определенного формулами (11) – (12), имеет место точное неравенство $|f(x) - S(x)| \leq \Psi_j(x)$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$ ($j \in \mathbb{Z}$), причем знак равенства при $x \in [x_j, x_{j+\frac{1}{2}}]$ достигается для любой функции f такой, что $\mathcal{L}_2(\mathcal{D})f(t) = -1$ для почти всех $t \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$, а при $x \in [x_{j+\frac{1}{2}}, x_{j+1}]$ – для любой функции f такой, что $\mathcal{L}_2(\mathcal{D})f(t) = -1$ для почти всех $t \in [x_j, x_{j+2}]$.

Аналогичные оценки погрешности аппроксимации получены для функций f , заданных на фиксированном отрезке (с выбором краевых условий типа второго рода) и в периодическом случае. Теоремы 3 и 4 в случае $\beta = 0$ и $h_j = h$ доказаны Ю.Н. Субботинным [13], в случае $h_j = h$ и $\beta \neq 0$ – К.В. Костоусовым и В.Т. Шевалдиным [7, 21], а в случае $\beta = 0$ и произвольных узлов – В.Т. Шевалдиным [19]. Предложенная схема построения экспоненциальных сплайнов перенесена автором и на случай тригонометрических сплайнов, соответствующих линейному дифференциальному оператору вида $\mathcal{L}_3(\mathcal{D}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^2 + \alpha^2)$ ($\alpha > 0$) при выполнении условий $0 < h_j < \frac{\pi}{\alpha}$ ($j \in \mathbb{Z}$).

Сформулированные в главе 2 результаты были получены автором [31] в 2006 году. В 2007 году Ю.Н. Субботин [28] модифицировал описанные выше схемы построения локальных параболических и тригонометрических сплайнов с произвольным расположением узлов, соответствующих линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_3(\mathcal{D}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^2 + \alpha^2)$. Конструкции локальных \mathcal{L} -сплайнов, построенные им, приводят к меньшим погрешностям при аппроксимации локальными сплайнами на соответствующих классах функций, чем в теореме 4, и обладают в определенном смысле лучшими сглаживающими свойствами.

Обзор результатов главы 3. В главе 3 для функций f , определенных и интегрируемых на всей числовой прямой \mathbb{R} , рассматриваются функционалы вида

$$b_j(f) = \begin{cases} \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} f(jh + t) dt, & h_1 > 0, \\ f(jh), & h_1 = 0, \end{cases} \quad (13)$$

Пусть $B_3(x) = \frac{1}{2h^2} \Delta_h^3 \left((x - \frac{3h}{2})_+ \right)^2$ – нормализованный параболический B -сплайн с равномерными узлами $-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{3h}{2}$. Локальный параболический сплайн определим в этом случае формулой

$$S(x) = S(f, x) = \sum_j b_j(f) B_3(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Этот сплайн не является интерполяционным в среднем. Он также обладает формосохраняющими и сглаживающими свойствами. Основными результатами этой главы являются следующие утверждения.

Теорема 5. При $0 \leq h_1 \leq 2h$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in W_\infty^2(\mathbb{R})} \|f - S\|_\infty = \frac{h^2}{8} + \frac{h_1^2}{24}.$$

Теорема 6. При $0 \leq h_1 \leq 2h$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in W_\infty^2(\mathbb{R})} \|f' - S'\|_\infty = \frac{h}{2} + \frac{h_1^2}{24h}.$$

При $h_1 = 0$ оба утверждения были доказаны Ю.Н.Субботиным [13].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Александру Григорьевичу Бабенко за ценные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алберг, Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш – М.: Мир, 1972.
- [2] Волков, Ю. С. Хорошо обусловленные методы построения сплайнов высоких степеней и сходимость процессов интерполяции: дис. ... доктора физ.-мат. наук : 01.01.01 / Волков Юрий Степанович. – Новосибирск, 2006.
- [3] Завьялов, Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко – М.: Наука, 1980.
- [4] Квасов, Б. И. Методы изометрической аппроксимации сплайнами / Б. И. Квасов – М.: Физматлит, 2006.
- [5] Корнейчук, Н. П. О приближении локальными сплайнами минимального дефекта / Н. П. Корнейчук // Укр. матем. журнал. – 1982. – Т. 34, № 5. – С. 617–621.
- [6] Корнейчук, Н. П. Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук – М.: Наука, 1984.
- [7] Костоусов, К. В. Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами / К. В. Костоусов, В. Т. Шевалдин // Матем. заметки. – 2005. – Т. 77, № 3. – С. 354–363.

- [8] **Мирошниченко, В. Л.** Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 / В. Л. Мирошниченко // Вычислительные системы. – 1990. – Вып. 137. Приближение сплайнами. – С. 31–57.
- [9] **Мирошниченко, В. Л.** Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных параболических сплайнов / В. Л. Мирошниченко // Вычислительные системы. – 1991. – Вып. 142. Сплайны и их приложения. – С. 3–14.
- [10] **Стечкин, С. Б.** Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин – М.: Наука, 1976.
- [11] **Субботин, Ю. Н.** Порядок наилучшей сплайн-аппроксимации некоторых классов функций / Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных // Матем. заметки. – 1970. – Т. 7, № 1. – С. 31–42.
- [12] **Субботин, Ю. Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны / Ю. Н. Субботин // Тр. МИАН СССР. – 1975. – Т. 109. – С. 35–60.
- [13] **Субботин, Ю. Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации / Ю. Н. Субботин // ЖВМ и МФ. – 1993. – Т. 33, № 7. – С. 996–1003.
- [14] **Субботин, Ю. Н.** Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n -ой производной при больших интервалах усреднения / Ю. Н. Субботин // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59, № 1. – С. 114–132.
- [15] **Субботин, Ю. Н.** Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения / Ю. Н. Субботин // Изв. РАН. Сер. матем. – 1997. – Т. 61, № 1. – С. 177–198.
- [16] **Шарма, И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности / А. Шарма, И. Цимбаларио // Матем. заметки. – 1977. – Т. 21, № 2. – С. 161–173.
- [17] **Шевалдин, В. Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов / В. Т. Шевалдин // Тр. МИАН СССР. – 1983. – Т. 164. – С. 203–240.
- [18] **Шевалдин, В. Т.** Экстремальная интерполяция в среднем при перекрывающихся интервалах усреднения и \mathcal{L} -сплайны / В. Т. Шевалдин // Изв. РАН. Сер. матем. – 1998. – Т. 62, № 4. – С. 201–224.
- [19] **Шевалдин, В. Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов / В. Т. Шевалдин // Сиб. журн. вычисл. математики – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 77–88.

- [20] **Kolmogoroff, A. N.** Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen / A. N. Kolmogoroff // *Ann. of Math.* – 1936. – V. 37. – P. 107–110.
- [21] **Kostousov, K. V.** Approximation by local exponential splines / K. V. Kostousov, V. T. Shevaldin // *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. Supple 10.* – 2004. – P. 147–157.
- [22] **Lyche, T.** Local spline approximation methods / T. Lyche, L. L. Schumaker // *J. Approxim. Theory.* – 1975. – V. 15, № 4. – P. 294–325.
- [23] **ter Morsche, H. G.** Interpolation and extremal properties of \mathcal{L} -spline functions: Dissertation / H. G. ter Morsche. – Eindhoven.: Technische Hogeschool Eindhoven, 1982.
- [24] **Piegl, L.** The NURBS Book / T. Piegl, W. Tiller. – Berlin etc.: Springer; 1997.
- [25] **Popoviciu, T.** Sur le reste dans certains formules lineares d'approximation de l'analyse / T. Popoviciu. // *Mathematica (Cluj).* – 1959. – V. 1. – P. 95–142.
- [26] **Schoenberg, I. J.** Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A: On the problem of smoothing of graduation, a first class of analytic approximation formula / I. J. Schoenberg // *Quart. Appl. Math.* – 1946. – V. 4. – P. 49–99.
- [27] **Shevaldin, V. T.** Approximation by Local \mathcal{L} -splines Corresponding to a Linear Differential Operator of the Second Order / V. T. Shevaldin // *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. Supple 2.* – 2006. – P. 189–208.
- [28] **Subbotin, Yu. N.** Approximations by Polynomial and Trigonometric Splines of Third Order Preserving Some Properties of Approximated Functions / Yu. N. Subbotin // *Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics of Russian Academy of Sciences.* – 2007. – V. 13, № 2. – P. 231–242.
- [29] **Wronicz, Z.** Chebyshevian splines: Dissertationes Mathematicae / Z. Wronicz. – Warszawa.: Polska Academia Nauk, Institute Matematyczny, 1990.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [30] **Шевалдина, Е. В.** Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами с произвольными узлами / Е. В. Шевалдина

- // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-й региональной молодежной конференции. 30 января – 3 февраля 2006 г. – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. – С. 151–155.
- [31] Шевалдина, Е. В. Аппроксимация локальными экспоненциальными сплайнами с произвольными узлами / Е. В. Шевалдина // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 391–402.
- [32] Шевалдина, Е. В. Аппроксимация локальными параболическими сплайнами функций на основе их интерполяции в среднем / Е. В. Шевалдина // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-й региональной молодежной конференции. 29 января – 2 февраля 2007 г. – Екатеринбург: УрО РАН. 2007. – С. 100–104.
- [33] Shevaldina, E. V. Approximation in the mean by local parabolic splines / E. V. Shevaldina // Angewandte Analysis, Approximationstheorie CAGD and Numerische Mathematik: 17. Rhein-Ruhr-Workshop. Burg Gemen. 09.–10.02.2007. –Gerlind Plonka-Hoch: Universitat Duisburg-Essen, 2007. – P. 1.
- [34] Шевалдина, Е. В. Аппроксимация локальными параболическими сплайнами функций по их значениям в среднем / Е. В. Шевалдина // Труды Института математики и механики. 2007. – Т. 13, № 4. – С. 169–189.
- [35] Шевалдина, Е. В. Наследование свойств k -монотонности при аппроксимации локальными кубическими сплайнами / Е. В. Шевалдина // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 40-й региональной молодежной конференции. 25 – 30 января 2009 г. – Екатеринбург: УрО РАН, 2009. – С. 106–110.
- [36] Шевалдина, Е. В. Аппроксимация локальными \mathcal{L} -сплайнами четного порядка, сохраняющими ядро дифференциального оператора / Е. В. Шевалдина // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2009. – Вып. 2. – С. 62–73.

Подписано в печать

Формат 60 × 84 1/16. Бумага типографская. Усл. печ. л. 1

Тираж 100 экз. Заказ № 2546 Печать офсетная

Отпечатано в типографии

ООО «Издательство УМЦ УПИ»

620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.

тел. (343) 362-91-16, 362-91-17