

На правах рукописи



ГАЗИЗУЛЛИН РУСЛАН КАМИЛЕВИЧ

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ  
СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ АКУСТОУПРУГОСТИ  
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание учёной степени кандидата  
физико-математических наук

Казань – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им.А.Н.Туполева-КАИ».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Паймушин Виталий Николаевич**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор, заместитель директора по  
научной работе ФГБУН «Институт  
машиноведения им. А.А. Благонравова»  
Российской академии наук  
**Думанский Александр Митрофанович**

кандидат физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник, заведующий  
лабораторией механики оболочек,  
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)  
федеральный университет»  
**Султанов Ленар Усманович**

Ведущая организация: **Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Защита состоится «29» сентября 2016 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г.Казань, ул.Кремлёвская, 18, ауд. мех. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке им.Н.И.Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г.Казань, ул.Кремлёвская, д.35 и на сайте <http://kpfu.ru>.

Отзывы по данной работе в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 420008, г.Казань, ул.Кремлёвская, д.35, диссертационный совет Д 212.081.11.

Автореферат разослан «\_\_» июля 2016 года.

Учёный секретарь диссертационного  
совета, к.ф.-м.н., доцент



А.А. Саченков

**Актуальность проблемы.** Проблемы развития авиационной техники и других видов скоростного транспорта выдвинули в разряд актуальных проблемы снижения вибрации и шума, нежелательных как с технической точки зрения (например, с точки зрения динамической прочности), так и с точки зрения воздействия на человека и обеспечения нормальных условий работы. В части обеспечения прочностных характеристик одним из наиболее опасных режимов динамического деформирования конструкций, как известно, является резонансный, реализующийся в конструкции при совпадении частот ее собственных колебаний с частотой внешнего циклического воздействия. При таком режиме нагружения многократно возрастают амплитудные значения параметров динамического напряженно-деформированного состояния (НДС). Корректное и достоверное их теоретическое определение с необходимой для практических целей точностью требует надлежащего учета в расчетных соотношениях демпфирующих свойств материалов, обусловленных внутренним трением, а также внешнего аэрогидродинамического демпфирования. При этом учет последнего является даже более значимым, чем учет внутреннего демпфирования материала.

Следует также отметить, что в настоящее время одним из актуальных и приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований является создание изделий авиастроения и других транспортных средств с комфортными условиями в отношении шума. Однако эффективное решение описанных выше проблем из области вибро- и шумозащиты конструкций возможно только при ясном понимании физических механизмов взаимодействия волн (в том числе акустических) с преградами в виде твердых деформируемых тел и тонкостенных элементов конструкций. Следует отметить, что в механике проводились обширные исследования, связанные с изучением стационарного и нестационарного взаимодействия акустических волн с преградами в виде твердых деформируемых тел и тонкостенных элементов конструкций. Однако в них абсолютно не рассматривались вопросы формирования звуковых волн и теоретического исследования задач о звукоизоляции и звукопоглощении теми или иными деформируемыми преградами.

**Целью настоящей работы** является постановка и построение аналитических и численных решений стационарных динамических задач акустоупругости тонкостенных элементов конструкций в виде тонких пластин с учетом внутреннего и внешнего (аэрогидродинамического) демпфирования в приложении к задачам звукоизоляции. Такие задачи, в частности, связаны с математическим моделированием экспериментального определения параметров звукоизоляции прямоугольной пластиной в акустических лабораториях реверберационного типа.

**На защиту выносятся:**

- 1) аналитические решения ряда новых задач о прохождении звуковой волны сквозь прямоугольную пластину, найденные на основе одномерных и трехмерных волновых уравнений для описания движения акустических сред;
- 2) математическая модель, численный метод и программное обеспечение для решения плоской задачи о прохождении звуковой волны сквозь деформируемую пластину, расположенную в проеме стены, разделяющей две камеры;

- 3) результаты исследования влияния введенных в рассмотрение физико-механических параметров системы на параметры звукоизоляции пластины, звуковое давление в окружающих пластину акустических пространствах, а также формирующиеся в пластине перемещения и напряжения при действии акустической нагрузки в широком диапазоне частот изменения звуковых волн;
- 4) выработанные на основе результатов теоретических исследований рекомендации по повышению степени точности и достоверности результатов физических экспериментов по определению параметров звукоизоляции тонкостенных элементов конструкций.

**Научная новизна** работы заключается в следующем.

1. Предложены два варианта постановки задачи о прохождении звуковой волны, формирующейся источником звука в камере высокого давления (КВД), сквозь пластину и о формировании в камере низкого давления (КНД) излученной пластиной звуковой волны. В первом варианте, являющемся классическим, заданным считается давление падающей на пластину звуковой волны, а во втором варианте падающая на пластину звуковая волна формируется гармоническими колебаниями торцевой стенки КВД. На основе использования волновых уравнений в одномерном приближении, соответствующих использованию гипотезы о плоском отражении, в предположении о недеформируемости пластины, имеющей на контуре податливые (деформируемые) опорные элементы из материала с демпфирующими свойствами, найдены точные аналитические решения сформулированных задач. Проведено исследование возможности описания звукопоглощающих свойств торцевой стенки КНД путем введения в рассмотрение дополнительной деформируемой прослойки в стенке камеры и учета в ней внутреннего поглощения энергии в рамках модели Томпсона-Кельвина-Фойгта.
2. Проведено исследование пяти различных вариантов постановки стационарной задачи о прохождении плоской звуковой волны сквозь деформируемую прямоугольную пластину, окруженную с двух сторон акустическими средами, описываемыми на основе одномерных или трехмерных волновых уравнений. Составлены уравнения движения пластины с учетом податливости опорного контура пластины (по модели Винклеровского основания), а также путем введения в уравнение движения слагаемого, позволяющего учитывать некоторое дополнительное внешнее демпфирование.
3. Найдено аналитическое решение задачи о прохождении звуковой волны сквозь деформируемую шарнирно опертую пластину, закрепленную в проеме абсолютно жесткой стены и разделяющую смежные пространства, которые ограничены в направлении одной из координат дополнительными абсолютно жесткими преградами. Предполагается, что в первом пространстве за счет гармонических колебаний преграды формируется падающая на пластину звуковая волна, а преграда, ограничивающая второе пространство, имеет маложесткое энергопоглощающее покрытие с большим параметром внут-

ренного демпфирования. Задача сформулирована на основе использования классических трехмерных по пространственной координате волновых уравнений и уравнения движения классической линейной теории пластин, в котором внутреннее трение материала пластины учитывается по гистерезисной модели Томпсона-Кельвина-Фойгта. Для описания процесса динамического деформирования энергопоглощающего покрытия преграды выведены двумерные уравнения движения, основанные на использовании модели трансверсально-мягкого слоя, линейной аппроксимации полей перемещений в направлении толщины прослойки и учете демпфирующих свойств ее материала также по гистерезисной модели.

4. На основе комбинированного использования методов конечных разностей и конечных сумм разработана численная методика решения плоской (двумерной по пространственным координатам) задачи о прохождении звуковой волны, формирующейся источником звука в КВД, сквозь деформируемую тонкую пластину и о формировании в КНД излученной пластиной звуковой волны. Данная задача связана с математическим моделированием экспериментального определения звукоизолирующих свойств тонкостенных элементов конструкций методом смежных реверберационных камер в акустических испытательных лабораториях.

**Достоверность** основных научных результатов следует из применения апробированных гипотез при соблюдении математической строгости преобразований на теоретическом этапе; тщательного анализа физической достоверности результатов найденных аналитических и численных решений, полученных с помощью разработанных методик; хорошего согласования результатов теоретических и экспериментальных исследований.

**Практическая ценность** диссертации состоит в возможности применения разработанных методов при анализе звукоизоляционных свойств элементов конструкций в виде пластин, а также при анализе их напряженно-деформированного состояния при акустическом воздействии с заданной частотой колебаний (в том числе с резонансной) в широком диапазоне частот.

**Публикации и апробация работы.** Основное содержание исследований по теме диссертации опубликовано в 11 работах. По её результатам сделаны доклады на украинско-российском научном семинаре «Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы» (Львов, 2012г.), на XIX международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы конструкций и сплошных сред» (Москва, 2013 г.), на II Международной научно-технической конференции «Динамика и виброакустика машин» (Самара, 2014г.), на X Международной конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2014г.), на X Международной молодежной научной конференции «Тинчуринские чтения» (Казань, 2015г.), на III Международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2015г.).

Диссертационная работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-19-00667).

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, включающего 184 наименования. Содержит 176 страниц печатного текста, в том числе 1 таблицу, 63 рисунка.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность и важность рассматриваемых в диссертации вопросов, дан анализ современного состояния проблемы, излагается краткое содержание работы по главам.

Указывается, что в отмеченном обзоре работы, относящиеся к трем ярко выраженным группам (исследования в области акустики, рассматривающие вопросы формирования и распространения шума, исследования в области аэроупругости, целью которых является изучение стационарного и нестационарного взаимодействия акустических волн с преградами в виде твердых деформируемых тел и тонкостенных элементов конструкций, а также исследования в области динамики элементов конструкций, важной особенностью которых является учет внутреннего демпфирования), не охватывают всего круга проблем, возникающих при взаимодействии колеблющихся элементов конструкций с окружающей их акустической средой. В связи с чем на практике звукоизоляционные и звукопоглощающие свойства конструкций (в том числе и тонкостенных) до настоящего времени, исследовались, главным образом, экспериментальными методами.

Для измерения звукоизоляционных свойств тонкостенных элементов конструкций в лабораторных условиях международная организация по стандартизации рекомендует в первую очередь реверберационный метод (ГОСТ Р ИСО 10140-1-2012, СНИП 23-03-2003). Экспериментальные исследования согласно данному методу проводят в акустических испытательных лабораториях, состоящих из двух смежных по горизонтали помещений (камер высокого и низкого давлений), в проем между которыми монтируют испытываемый образец. В камере высокого давления (КВД) источником звука формируется моногармоническая звуковая волна, которая, взаимодействуя с испытываемым образцом, вызывает в нем установившиеся незатухающие колебания, формирующие в камере низкого давления (КНД) излученные образцом звуковые волны. Разностью давлений, установившихся в камерах, и характеризуются звукоизоляционные свойства испытываемого образца.

**В первой главе** рассматривается задача о прохождении звуковой волны, формирующейся источником звука в КВД, сквозь пластину, имеющую толщину  $t$ , размеры в плане  $a, b$ , и о формировании в камере КНД излученной пластиной звуковой волны (рис.1). Предполагается, что на расстояниях  $z = -l_1$  и  $z = l_2$  от пластины расположены преграды (стенки), имеющие бесконечную протяженность в направлениях осей  $x$  и  $y$ . На пластину набегают гармоническая волна с

амплитудой давления  $\tilde{p}_*$  и частотой  $\omega$ . В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах возбуждаются акустические волны с амплитудами давления  $\tilde{p}_1$  и  $\tilde{p}_2$ .

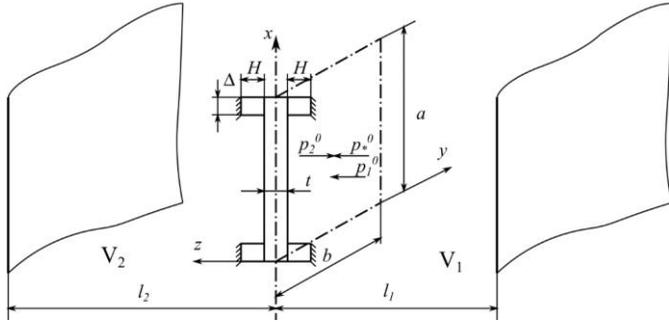


Рис.1

Считается, что падающая на пластину звуковая волна с потенциалом скоростей  $\Phi_*$ , а также отраженная от пластины и излученная пластиной волны с потенциалами скоростей  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ , являются плоскими, для которых относительно потенциалов скоростей имеют место волновые уравнения ( $\tau$  - время)

$$\Phi_{*,zz} - c_1^{-2} \Phi_{*,\tau\tau} = 0, \quad \Phi_{k,zz} - c_k^{-2} \Phi_{k,\tau\tau} = 0; \quad k=1,2, \quad (1)$$

где  $c_1, c_2$  - скорости звука в акустических средах «1» и «2». Соответствующие им давления и скорости в точках интервалов  $0 \geq z \geq -l_1$  и  $0 \leq z \leq l_2$  через функции  $\Phi_*$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  определяются соотношениями ( $\rho_1, \rho_2$  - плотности акустических сред)

$$p_* = -\rho_1 \Phi_{*,\tau}, \quad p_k = -\rho_k \Phi_{k,\tau}, \quad v_z^* = \Phi_{*,z}, \quad v_z^k = \Phi_{k,z}; \quad k=1,2. \quad (2)$$

Решения уравнений (1) в силу представлений  $\Phi_* = \tilde{\Phi}_* e^{i\omega\tau}$ ,  $\Phi_k = \tilde{\Phi}_k e^{i\omega\tau}$  ищутся в виде

$$\Phi_* = A_* e^{i(\omega\tau + k_1 z)} + B_* e^{i(\omega\tau - k_1 z)}, \quad \Phi_k = A_k e^{i(\omega\tau + k_k z)} + B_k e^{i(\omega\tau - k_k z)}, \quad (3)$$

где  $k_k = \omega/c_k$ ,  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица,  $A_*, B_*, A_k, B_k$  - постоянные интегрирования.

При найденных значениях  $\tilde{p}_*$  и  $\tilde{p}_k$  основной целью исследований является определение параметра звукоизоляции пластины в децибелах

$$R_p = -20 \lg |\eta|, \quad \eta = \left| \tilde{p}_2 / (\tilde{p}_* + \tilde{p}_1) \right|_{z=0} \quad (4)$$

Если считать, что пластина деформируется по классической модели Кирхгофа-Лява, то относительно прогиба срединной плоскости  $w$  будет иметь место уравнение движения следующего вида:

$$L(w) + \rho_n t w_{,\tau\tau} - (p_* + p_1 - p_2) \Big|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

где  $\rho_n$  – плотность материала пластины,  $L$  – известный дифференциальный оператор.

Решения уравнения (5) и уравнений (1) при  $z=0$  должны удовлетворять условиям кинематического сопряжения

$$w_{,r} = -v_z^* \Big|_{z=0} + v_z^1 \Big|_{z=0}, \quad w_{,r} = v_z^2 \Big|_{z=0}, \quad (6)$$

а в точках плоскостей  $z=l_2$  и  $z=-l_1$  должны быть выполнены условия

$$v_z^2 \Big|_{z=l_2} = 0, \quad (-v_z^* + v_z^1) \Big|_{z=l_1} = 0. \quad (7)$$

Следует отметить, что ввиду нехватки уравнений для определения неизвестных для корректной формулировки задачи вместо второго условия из (7) требуется раздельное выполнение условий

$$v_z^* \Big|_{z=-l_1} = 0, \quad v_z^1 \Big|_{z=-l_1} = 0, \quad (8)$$

что позволяет одну из указанных выше неизвестных считать величиной заданной, характеризующей давление падающей на пластину звуковой волны.

Предполагается, что под действием поперечной нагрузки опорные контурные элементы (рис.1) в направлении оси  $oz$  деформируются по модели основания Винклера с аппроксимацией перемещений оснований  $w_s$  на контурной линии  $s \in \sigma$  в виде

$$W_s^+ = \left(1 + \frac{t}{2H} - \frac{z}{H}\right) w_s, \quad W_s^- = \left(1 + \frac{t}{2H} + \frac{z}{H}\right) w_s \quad (9)$$

для верхнего и нижнего элементов соответственно. Считая  $w_s$  постоянной по толщине  $\Delta$ , для определения формирующихся деформаций и напряжений при учете внутреннего трения материала в рамках модели Томпсона-Кельвина-Фойгта получены выражения

$$\varepsilon_z^\pm = \frac{\partial w_s^\pm}{\partial z} = \mp \frac{w_s}{H}, \quad \sigma_z^\pm = \mp \frac{E_z^0}{H} \left(1 + \frac{\delta_0}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) w_s. \quad (10)$$

где  $E_z^0$ ,  $\delta_0$  – модуль упругости и логарифмический декремент колебаний материала оснований.

С целью исследования влияния податливости опорного элемента на параметры звукоизоляции в первом приближении получено аналитическое решение сформулированной задачи для абсолютно жесткой пластины ( $w = w_s = w_0 = const$ ).

В соответствии со второй постановкой считается, что источником формирования звуковых волн в КВУ является абсолютно жесткая преграда (стенка), которая находится в плоскости  $z=-l_1$  и совершает гармонические колебания по закону  $U^* = \tilde{U}^* e^{i\omega\tau}$ . При этом формирующиеся звуковые волны при рассматриваемой постановке задачи в одномерном приближении будут описываться лишь

двумя последними волновыми уравнениями (1), а условия (6), (7) запишутся в виде

$$w_{,r} = v_z^1|_{z=0}, w_{,r} = v_z^2|_{z=0}, v_z^1|_{z=-l_1} = U_{,r}^*, v_z^2|_{z=l_2} = 0. \quad (11)$$

Задача в рамках второй постановки также рассматривается для абсолютно жесткой пластины. При этом предполагается, что находящаяся в плоскости  $z = l_2$  абсолютно жесткая и неподвижная преграда имеет энергопоглощающую поверхностную прослойку толщиной  $h_c$ . Считается, что она обладает демпфирующими свойствами, описываемыми моделью Томпсона-Кельвина-Фойгта. В силу  $h_c \ll a, b$  для перемещений в прослойке принимается аппроксимация

$$w_c^2 = \left(1 - \frac{-l_2 + z}{h_c}\right) V, \quad (12)$$

где  $V$  – перемещения точек плоскости  $z = l_2$ . В соответствии с (12) деформации и напряжения в прослойке будут равны

$$\varepsilon_z^2 = \frac{\partial w_c^2}{\partial z} = -\frac{V}{h_c}, \quad \sigma_z^2 = -E_c \left(1 + \frac{\delta_c}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{V}{h_c}, \quad (13)$$

где  $E_c, \delta_c$  – модуль упругости и логарифмический декремент колебаний материала прослойки.

В рассматриваемом случае вместо последнего условия в (11) должны быть выполнены условия

$$v_z^2|_{z=l_2} = V_{,r}. \quad (14)$$

Найдены точные аналитические решения сформулированных задач. Анализ полученных результатов показал, что обе рассмотренные постановки задачи приводят к практически одинаковым результатам при определении параметров звукоизоляции пластины. При этом параметры опорных элементов  $E_0$  и  $\delta_0$  на параметр  $R_p$  оказывают заметное влияние главным образом лишь при малых частотах  $\omega$ , а влияние на  $R_p$  параметров  $E_c, \delta_c$  и  $h_c$  в реальном диапазоне их изменения является незначительным.

**Во второй главе** рассматривается пять различных вариантов постановки стационарной задачи о прохождении плоской звуковой волны сквозь прямоугольную пластину, окруженную с двух сторон акустическими средами «1» и «2». На пластину набегают гармоническая волна с амплитудой давления  $\tilde{p}_*$  и частотой  $\omega$ . В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах возбуждаются акустические волны с амплитудами давления  $\tilde{p}_1$  и  $\tilde{p}_2$ .

В рамках первой постановки задачи считается, что указанные звуковые волны являются плоскими, и они описываются волновыми уравнениями в одномерном приближении (1).

Для падающей волны при использовании представления  $\Phi_* = \tilde{\Phi}_* e^{i\omega t}$  для определения  $p_*$  и  $v_z^*$  на лицевой поверхности пластины получены формулы

$$\tilde{v}_z^* \Big|_{z=0} = -ik_1 A_*, \quad \tilde{p}_* \Big|_{z=0} = -i\rho_1 \omega A_* \quad (15)$$

Для отраженной волны, движущейся в среде «1» от пластины в направлении, обратном оси  $0z$ , а также излученной волны, движущейся в среде «2» в положительном направлении оси  $0z$ , для амплитуд скоростей  $\tilde{v}_z^1, \tilde{v}_z^2$  и давлений  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$  получены выражения

$$\tilde{v}_z^1 \Big|_{z=0} = ik_1 B_1, \quad \tilde{p}_1 \Big|_{z=0} = -i\rho_1 \omega B_1, \quad \tilde{v}_z^2 \Big|_{z=0} = -ik_2 A_2, \quad \tilde{p}_2 \Big|_{z=0} = -i\rho_2 \omega A_2 \quad (16)$$

При использовании решений (15), (16) и при выполнении условий (6) в силу представления  $w = \tilde{w} e^{i\omega t}$  уравнение (5) приведено к виду

$$DV^2 \nabla^2 \tilde{w} - \Omega^2 \tilde{w} + i\rho_1 \omega (2A_* + c_1 \tilde{w}) + i\rho_2 \omega c_2 \tilde{w} = 0, \quad \Omega^2 = \rho_n t \omega^2 \quad (17)$$

Рассмотрены три вида решения уравнения (17).

1)  $\tilde{w} = \tilde{w}_0 = const$ , когда ( $R_{11}, \dots, \tilde{R}_{22}$  – некоторые выражения)

$$\tilde{w}_0 = -\frac{2i\rho_1 \omega}{-\Omega^2 + i\omega(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)} A_*, \quad R_p^{(1)} = -201g \left| \frac{\rho_2 \sqrt{R_{22}^2 + \tilde{R}_{22}^2}}{\rho_1 \sqrt{R_{11}^2 + \tilde{R}_{11}^2}} \right| \quad (18)$$

2) Пластина на контурных линиях  $x=0, x=a, y=0, y=b$  шарнирно оперта, когда

$$\tilde{w} = \sum_{n,m} \tilde{w}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 3, \dots \quad (19)$$

3)  $\tilde{w}_0 \neq 0$ ,  $\tilde{w}_{mn} \neq 0$  и для функции  $\tilde{w}$  принято представление

$$\tilde{w} = \tilde{w}_0 + \sum_{m,n} \tilde{w}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y \quad (20)$$

Показано, что при неучете податливости опорного контура пластины  $w_{mn} \equiv 0$ .

При четвертом варианте постановки задачи движение отраженных и излученных волн описывается уравнениями ( $0 > z \geq -\infty$  для первой среды ( $k=1$ ) и  $0 \leq z \leq +\infty$  для второй среды ( $k=2$ ))

$$\Phi_{k,xx} + \Phi_{k,yy} + \Phi_{k,zz} - c_k^{-2} \Phi_{k,\tau\tau} = 0; \quad k=1, 2, \quad (21)$$

а решения уравнений (5) и (21) приняты в виде (20) и

$$\Phi_k = \left( \tilde{\Phi}_k^0(z) + \sum_{m,n} \tilde{\Phi}_k^{mn}(z) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y \right) e^{i\omega\tau} \quad (22)$$

Предполагается, что при действии поперечной нагрузки  $p = (p_* + p^1 - p^2) \Big|_{z=0}$  в точках контурной линии  $\Gamma$ , заданной параметрическим

уравнением  $s = s(x, y)$ , возникает поперечная реактивная сила  $R(s)$ , связанная с прогибом  $w(s)$  зависимостью

$$R(s) = \beta w(s), \quad (23)$$

где  $\beta$  – жесткость опорного элемента. В принятом приближении для рассматриваемой механической системы будет иметь место вариационное уравнение следующего вида

$$\oint_{\Gamma} \beta w(s) \delta w(s) ds + \iint_{\sigma} \left\{ D \left[ (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \delta w_{,xx} + 2(1-\nu) w_{,xy} \delta w_{,xy} + (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \delta w_{,yy} \right] + \varphi w \delta w + C w_{,r} \delta w - p \delta w + \rho_n t w_{,rr} \delta w \right\} dx dy = 0, \quad (24)$$

где введен в рассмотрение параметр внешнего демпфирования, определяемый по формуле ( $c_0$  – задаваемый коэффициент)

$$C = c_0 \omega (\rho_1 + \rho_2) \quad (25)$$

В рамках пятой постановки задачи, сформулированной на основе гипотезы о плоском отражении, также учитывается податливость опорного контура по модели (23). При этом решение для прогиба принято в виде (20).

Для всех вариантов сформулированных задач найдены точные аналитические решения. Исходя из анализа полученных результатов, показано, что из рассмотренных пяти вариантов постановки стационарной задачи о прохождении падающей на пластину плоской звуковой волны наиболее содержательной является вариант, основанный на использовании трехмерных волновых уравнений для описания отраженных и излученных звуковых волн, формирующихся деформируемой пластиной. Установлено, что учет податливости опорного контура пластины оказывает существенное влияние на ее звукоизоляционные свойства лишь при малых частотах звуковой волны. Показано, что введение в уравнение движения пластины некоторого внешнего демпфирования (слагаемое  $C w_{,r} \delta w$  в уравнении (24)) позволяет при определении параметра звукоизоляции пластины получить сглаженные графические зависимости от частоты, согласующиеся по виду с экспериментальными зависимостями, получающимися путем испытания образцов в акустической лаборатории.

**В третьей главе** рассматривается задача о прохождении звуковой волны сквозь деформируемую шарнирно опертую пластину, закрепленную в проеме абсолютно жесткой стены и разделяющую смежные пространства, которые ограничены в направлении одной из координат дополнительными абсолютно жесткими преградами. Считается, что в первом пространстве за счет гармонических колебаний преграды формируется падающая на пластину звуковая волна, а преграда, ограничивающая второе пространство, имеет маложесткую деформируемую прослойку толщиной  $h_c$ , граничная плоскость  $z = l_2 + h_c$  которой неподвижна, а точки граничной плоскости  $z = l_2$  за счет деформаций прослойки по-

лучают подлежащие определению перемещения  $U = U(x, y, \tau)$ ,  $V = V(x, y, \tau)$ ,  $W = W(x, y, \tau)$ .

Поведение акустических сред в пространствах описывается классическими трехмерными по пространственной координате волновыми уравнениями (21). А механика деформирования пластины – уравнениями движения классической линейной теории пластин (5). Предполагается, что материал пластины является ортотропным, а его вязкоупругие свойства при гармонических колебаниях учитываются моделью Томпсона-Кельвина-Фойгта.

Для описания процесса динамического деформирования энергопоглощающего покрытия торцевой стенки КНД выведены двумерные уравнения движения, основанные на использовании модели трансверсально-мягкого слоя. В соответствии с данной моделью считается, что главными являются нормальное напряжение  $\sigma_z^c$  и касательные напряжения  $\tau_{xz}^c, \tau_{yz}^c$ , связанные с соответствующими компонентами деформаций  $\varepsilon_z^c, \gamma_{xz}^c, \gamma_{yz}^c$  соотношениями упругости

$$\sigma_z^c = E_z^c \left( 1 + \frac{\delta_z^c}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \varepsilon_z^c, \tau_{xz}^c = G_c \left( 1 + \frac{\delta_\gamma^c}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \gamma_{xz}^c, \tau_{yz}^c = G_c \left( 1 + \frac{\delta_\gamma^c}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \gamma_{yz}^c. \quad (26)$$

Здесь  $E_z^c, G_c, \delta_z^c, \delta_\gamma^c$  – соответствующие упругие и демпфирующие характеристики материала прослойки. Для компонент перемещений в прослойке принята аппроксимация

$$u_c = \left( 1 - \frac{z-l_2}{h_c} \right) U, \quad v_c = \left( 1 - \frac{z-l_2}{h_c} \right) V, \quad w_c = \left( 1 - \frac{z-l_2}{h_c} \right) W, \quad (27)$$

позволяющая с необходимой степенью точности описывать деформации  $\varepsilon_z^c, \gamma_{xy}^c$  и  $\gamma_{yz}^c$ . Подстановка выражений (27) в соотношения Коши приводит к зависимостям

$$\gamma_{xz}^c = \left( 1 - \frac{z-l_2}{h_c} \right) W_{,x} - \frac{U}{h_c}, \quad \gamma_{yz}^c = \left( 1 - \frac{z-l_2}{h_c} \right) W_{,y} - \frac{V}{h_c}, \quad \varepsilon_z^c = -\frac{W}{h_c}. \quad (28)$$

Путем использования составленных соотношений (26) – (28) получена система трех дифференциальных уравнений движения прослойки. Решения указанной системы, как и решения уравнений (5) и (21), должны удовлетворять условиям кинематического сопряжения

$$w_{,r} = v_z^1 \Big|_{z=0}, \quad w_{,r} = v_z^2 \Big|_{z=0}, \quad W_{,r} = v_z^2 \Big|_{z=l_2}, \quad U_{,r} = v_z^1 \Big|_{z=-l_1}. \quad (29)$$

Для сформулированной задачи найдены аналитические решения как с учетом, так и без учета податливости опорных элементов пластины. Проведены исследования влияния физико-механических параметров рассматриваемой механической системы на параметры звукоизоляции пластины, распределение звукового давления в пространствах и напряженно-деформированного состояния пла-

стины в зависимости от частоты формирующейся звуковой волны. Сравнивая полученные результаты с результатами для пластины, разделяющей полубесконечные пространства, отмечено появление целого ряда новых собственных частот, обусловленных появлением в механической системе ограниченных по одной из координат пространств, обладающих собственными резонансными частотами. При этом показано, что увеличение декремента колебаний прослойки  $\delta_c$  может приводить к многократному снижению перемещений и формирующихся в пластине напряжений при таких частотах. Установлено, что учет податливости опорного контура пластины приводит к значительному снижению параметра звукоизоляции даже при весьма большом значении жесткости опорного элемента. Показано, что механическое поведение пластины в окрестности резонансных частот практически полностью зависит от аэродинамического демпфирования, а для жестких конструкционных материалов, имеющих, как правило, малые значения логарифмического декремента колебаний, учет внутреннего демпфирования оказывает несущественное влияние на исследуемые параметры рассматриваемой механической системы.

**В четвертой главе** разрабатывается численный метод решения плоской задачи по определению параметров звукоизоляции прямоугольной пластины, расположенной в проеме стены, разделяющей две смежные по горизонтали камеры акустической лаборатории. При постановке задачи считается, что указанная стена, являющаяся преградой для падающей на неё звуковой волны, имеет кусочно-постоянную толщину  $t$ . Данная задача связана с математическим моделированием экспериментального определения звукоизолирующих свойств тонкостенных элементов конструкций методом смежных реверберационных камер в акустических испытательных лабораториях. При этом, как и в первой главе, рассматриваются две постановки задачи, различающиеся способом задания источника звука в камере высокого давления.

В соответствии с первой постановкой, установившиеся в камерах поля звуковых волн с потенциалами скоростей  $\Phi^*$  и  $\Phi_k$  ( $k=1,2$ ) описываются двумерными волновыми уравнениями

$$\Phi_{,xx}^* + \Phi_{,zz}^* - c_1^{-2} \Phi_{,tt}^* = 0; \quad (30)$$

$$\Phi_{k,xx} + \Phi_{k,zz} - c_k^{-2} \Phi_{k,tt} = 0, \quad k=1,2; \quad (31)$$

при граничных условиях: при  $x=0$  принимаются условия симметрии  $\Phi^*|_x = \Phi^*|_{-x}, \Phi_k|_x = \Phi_k|_{-x}, (k=1,2)$ ; при  $x=B/2: \Phi_{,x}^* = 0, \Phi_{k,x} = 0, (k=1,2)$ ; при  $z=-l_1: \Phi_{,z}^* = 0, \Phi_{1,z} = 0$ ; при  $z=l_2: \Phi_{2,z} = 0$ . При  $z=0$  формулируются условия равенства скоростей движения пластины и акустических сред в виде  $w_{,t} = (-\Phi_{,z}^* + \Phi_{1,z})|_{z=0}, w_{,t} = \Phi_{2,z}|_{z=0}$ .

В соответствии со второй постановкой решения волновых уравнений (31) должны быть подчинены граничным условиям: при  $x=0: \Phi_k|_x = \Phi_k|_{-x}, (k=1,2)$ ;

при  $x = B/2$ :  $\Phi_{k,x} = 0$ , ( $k = 1, 2$ ); при  $z = -l_1$ :  $\Phi_{1,z} = U_{,r}^*$ ; при  $z = l_2$ :  $\Phi_{2,z} = 0$ ; при  $z = 0$ :  $w_{,r} = \Phi_{1,z}|_{z=0}$ ,  $w_{,r} = \Phi_{2,z}|_{z=0}$ .

Динамическое деформирование пластины для обеих постановок описывается одномерным по пространственной координате  $x$  уравнением движения, основанным на классической модели Киргофа-Лява с учетом внутреннего трения материала пластины по модели Томпсона-Кельвина-Фойгта.

Для дискретизации сформулированных краевых задач в направлении оси  $x$  используется конечно-разностная схема решения с равномерным шагом, а в направлении оси  $z$  – метод конечных сумм.

Численная процедура формирования соответствующих матриц и поиска решения алгебраического аналога матричных уравнений реализована на «векторном» языке системы научных расчетов MATLAB. Такой подход позволяет решать задачи указанного класса в несколько раз быстрее, чем при написании программ с использованием «скалярных» языков программирования.

На основе разработанного комплекса проблемно-ориентированных программ проведена серия вычислительных экспериментов по определению параметров звукоизоляции пластины в широком диапазоне изменения физико-механических параметров рассматриваемой механической системы. Численные решения сформулированных задач были найдены как для случая жесткого соединения испытываемой пластины со стенкой камеры, так и для случая шарнирного соединения в соответствующих точках крепления. Учет последнего осуществлялся путем подчинения уравнения движения пластины (5) при  $x = \pm a/2$  ( $a$  – длина панели) условию  $w_{,xx} = 0$ .

С целью количественного и качественного анализа построенных теоретических решений проведено сравнение результатов расчетов с данными экспериментальных исследований по определению параметра звукоизоляции плоской пластины. Эксперимент проводился в акустической лаборатории реверберационного типа, удовлетворяющей требованиям ГОСТ Р ИСО 10140–2–2012. Параметр звукоизоляции  $R$  воздушного шума ограждающими конструкциями в соответствии с указанным стандартом вычисляется по формуле

$$R = L_1 - L_2 + \Delta R, \quad \Delta R = 10 \lg(S/A_2), \quad (32)$$

где  $L_1, L_2$  – средние уровни звукового давления ( $\partial B$ ) в КВД и КНД, соответственно;  $S$  – площадь ( $m^2$ ) поверхности испытываемого образца;  $A_2$  – эквивалентная площадь ( $m^2$ ) звукопоглощения приемного помещения (КНД).

Входящая в (32) эквивалентная площадь звукопоглощения приемного помещения  $A_2$  определяется по формуле

$$A_2 = 0,16 \cdot V_2 / T_2, \quad (33)$$

где  $T_2$  – время реверберации, зависящее от частоты и определяемое в соответствии с ГОСТ Р ИСО 10848–1–2012;  $V_2$  – объем ( $m^3$ ) КНУ.

Как видно из формул (32), (33), экспериментально определяемый параметр  $R$  зависит не только от измеряемых уровней звуковых давлений в камерах, но и от времени реверберации в камере низкого уровня. Однако, определяемый при численном решении задачи параметр  $R_p$  (по формуле вида (4)) зависит только от уровней звуковых давлений в камерах. В связи с этим для объективного сравнения результатов теоретических и экспериментальных исследований при проведении экспериментов при каждой фиксированной частоте определялось время реверберации в КНД, необходимое для вычисления  $\Delta R$ , а вместо параметра  $R$  вычислялся параметр звукоизоляции

$$R^{(2)} = R - \Delta R. \quad (34)$$

Показано что параметр  $R^{(2)}$  по физическому смыслу аналогичен параметру  $R_p$ . Исходя из анализа полученных результатов, установлено, что описанные выше первая и вторая постановки задачи по теоретическому определению параметра звукоизоляции пластины приводят к практически одинаковым результатам на всем диапазоне изменения частоты падающей на пластину звуковой волны (см.рис.2, штриховая и пунктирная линии, соответственно). Такие теоретические результаты достаточно близки к экспериментальным результатам при частоте  $f > 100$ Гц, если сравнивать величины  $R_p$  и  $R^{(2)}$  (сплошная линия).

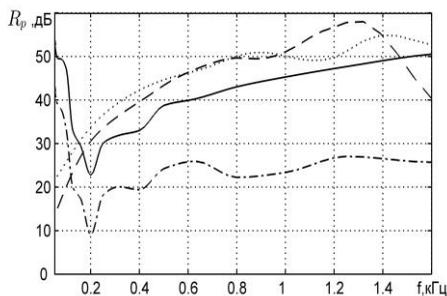


Рис.2

Проведены также экспериментальные и численные исследования по установлению закона распределения звукового давления в точках горизонтальной плоскости КНД, проходящей через центр испытываемой пластины. Показано, что при проведении физических экспериментов по определению параметра звукоизоляции тонкостенных элементов конструкций в виде пластин и оболочек должен наблюдаться значительный разброс измеряемых шумомерами уровней звукового давления при том или ином месте их размещения в пределах объемов камер акустической лаборатории. Следовательно, для повышения степени точности и достоверности определения параметров звукоизоляции тонкостенных элементов конструкций путем их испытаний в акустических лабораториях рассматриваемого класса необходимо проводить соответствующие измерения при достаточно большом числе точек размещения шумомеров.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. На основе использования волновых уравнений в одномерном приближении получено аналитическое решение задачи о прохождении звуковой волны из одной камеры в другую (из КВД в КНД) сквозь недеформируемую пластину, имеющую на контуре податливые опорные элементы из материала с демпфирующими свойствами. Рассмотрены две постановки задачи, различающиеся способом задания источника звука в КВД. Показано, что обе рассмотренные постановки приводят к практически одинаковым результатам при определении параметров звукоизоляции пластины.
2. На основе одномерных или трехмерных волновых уравнений, описывающих движения акустических сред, рассмотрены пять различных вариантов постановки стационарной задачи о прохождении плоской звуковой волны сквозь прямоугольную пластину (как абсолютно жесткую, так и деформируемую по модели Кирхгофа), окруженную акустическими средами в полубесконечных пространствах. Проведено исследование влияния учета податливости опорного контура пластины, а также учета некоторого внешнего демпфирования на параметры звукоизоляции пластины. Показано что наиболее содержательным является вариант, основанный на использовании трехмерных волновых уравнений для описания отраженных и излученных звуковых волн.
3. Найдено аналитическое решение задачи о прохождении звуковой волны сквозь деформируемую (по классической модели Киргоффа-Лява при учете внутреннего демпфирования по модели Томпсона-Кельвина-Фойгта) шарнирно опертую пластину, закрепленную в проеме абсолютно жесткой стены и разделяющую смежные пространства, которые ограничены в направлении одной из координат дополнительными абсолютно жесткими преградами. Предполагается, что в первом пространстве за счет гармонических колебаний преграды формируется падающая на пластину звуковая волна, а преграда, ограничивающая второе пространство, имеет маложесткое энергопоглощающее покрытие с большим параметром внутреннего демпфирования. Проведено исследование влияния физико-механических параметров рассматриваемой механической системы на параметры звукоизоляции пластины, распределение звукового давления в пространствах и напряженно-деформированного состояния пластины в зависимости от частоты формирующейся в первом пространстве звуковой волны.
4. На основе использования волновых уравнений в двумерном приближении разработаны численные методы решения задачи о прохождении звуковой волны, формирующейся источником звука в камере высокого давления, сквозь деформируемую тонкую пластину и о формировании в камере низкого давления излученной пластиной звуковой волны. Они основаны на комбинированном использовании методов конечных разностей и конечных сумм. Рассмотрены две постановки задачи, различающиеся способом задания источника звука в КВД. Проведено исследование влияния физико-механических параметров рассматриваемой системы, а также условий за-

крепления пластины в проеме стены на параметры её звукоизоляции и распределение звукового давления в объеме КНД в зависимости от частоты формирующейся в КВД звуковой волны.

5. Проведен анализ экспериментальной методики определения звукоизолирующих свойств тонкостенных элементов конструкций методом смежных реверберационных камер в акустических испытательных лабораториях. Показано, что для объективного сравнения результатов экспериментов с результатами получаемых теоретических решений последние должны быть скорректированы экспериментальными данными, зависящими от времени реверберации конкретно используемой акустической лаборатории. Исходя из анализа результатов теоретических решений и экспериментальных исследований по установлению закона распределения звукового давления в камере низкого давления, показана важность проведения измерений в акустических лабораториях рассматриваемого класса при достаточно большом числе точек размещения шумометров.

## **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**

### **Статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК и высокорейтинговых изданиях, индексируемых в базах данных «Сеть науки» (Web of Science) или «Скопус» (Scopus):**

1. Паймушин, В.Н. Исследование звукоизоляционных свойств абсолютно жесткой пластины, помещенной на деформируемых опорных элементах между двумя преградами / В.Н. Паймушин, Р.К. Газизуллин // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 3. – С. 126–141.
2. Паймушин, В.Н., Математическое моделирование и экспериментальное исследование прохождения звуковой волны сквозь деформируемую пластину, находящуюся между двумя камерами / В.Н. Паймушин, Р.К. Газизуллин, А.А. Шарапов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 2. – С. 102–119.
3. Паймушин, В.Н. Экспериментальное определение параметров звукоизоляции прямоугольной пластины с энергопоглощающим покрытием / В.Н. Паймушин, Р.К. Газизуллин, А.А. Шарапов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 1. – С. 114–127.
4. Paimushin, V.N. Numerical and Experimental Study of the Sound-Insulating Properties of a Deformable Plate Located between Two Chambers / V.N. Paimushin, R.K. Gazizullin, A.A. Sharapov // Procedia Engineering. – 2015. – Vol. 106. – P. 336–349.

### **Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ:**

5. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2014617353 от 08.09.2014. Расчет звукоизоляционных свойств пластины, находящейся между двумя камерами / И.Б. Бадриев, Р.К. Газизуллин, В.Н. Паймушин // РОСПАТЕНТ, 2014.

### Статьи в прочих изданиях:

6. Паймушин, В.Н. Исследование различных вариантов постановки задачи о звукоизоляции прямоугольной пластины, окруженной акустическими средами / В.Н. Паймушин, Д.В. Тарлаковский, Р.К. Газизуллин, А. Лукашевич // *Мат. методы та физ.-мех. поля.* – 2014. – 57, № 4. – С. 51–67.
7. Паймушин, В.Н. О задачах определения параметра звукоизоляции однослойной пластины / В.Н. Паймушин, Р.К. Газизуллин // *Материалы XIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им.А.Г.Горшкова.* – М.: ООО «ТР-принт», 2013. – Т.2. – С. 119–123.
8. Паймушин, В.Н. Численное и экспериментальное исследование звукоизоляционных свойств деформируемой пластины / В.Н. Паймушин, Р.К. Газизуллин, А.А. Шарапов // *Динамика и виброакустика машин: сборник докладов второй международной научно-технической конференции, 15-17 сентября 2014 г.* – Самара: СГАУ, 2014. – С. 452–453.
9. Паймушин, В. Теоретические и экспериментальные исследования прохождения звуковой волны сквозь прямоугольную пластину / В. Паймушин, И. Закиров, Ю. Досикова, Р. Газизуллин // *Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы.* – Львов, 2012. – С. 139–143.
10. Паймушин, В.Н. Численное решение плоской задачи о генерации моногорманических звуковых волн в замкнутой прямоугольной области с отверстием / В.Н. Паймушин, Р.К. Газизуллин, И. Гюнал // *Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой Международной конференции.* – Казань: Казанский университет, 2014. – С. 489–495.
11. Газизуллин, Р.К. Экспериментальное определение параметра звукоизоляции прямоугольной пластины с энергопоглощающим покрытием и без него с определением поля звукового давления в камере высокого давления акустической лаборатории реверберационного типа / Р.К. Газизуллин, А.А. Шарапов // *Материалы докладов X Международной молодежной научной конференции «Тинчуринские чтения».* – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т., 2015. – Т.2. – С. 5–6.
12. Паймушин, В.Н. Численное решение задачи о прохождении звуковой волны сквозь прямоугольную пластину с шарнирно опертыми краями, расположенную в проеме стены, разделяющей две камеры / В.Н. Паймушин, Р.К. Газизуллин // *Тезисы докладов III Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы».* – М.: ООО «ТР-принт», 2015. – С. 89–91.