На правах рукописи

Никитина Анна Александровна

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2016

Работа выполнена на кафедре математической анализа Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Кожевникова Лариса Михайловна
Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО
«Башкирский государственный университет»
профессор кафедры математического анализа

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Кожанов Александр Иванович
ФГБУН Институт математики
им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск)
главный научный сотрудник
лаборатории дифференциальных
и разностных уравнений

доктор физико-математических наук, доцент
Асхабов Султан Нажмудинович
ФГБОУ ВПО «Чеченский государственный
университет» (г. Грозный)
профессор кафедры математического анализа

Ведущая организация: ФГБУН Институт математики
с вычислительным центром УНЦ РАН (г. Уфа)

Защита состоится «15» сентября 2016 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан « » 2016 г. и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
кандидат физико-математических наук, доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Исследование, представленное в диссертационной работе, относится к одному из актуальных и интенсивно развиваемых направлений в современной теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Это направление включает в себя изучение анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными (и в том числе степенными) нелинейностями в неограниченных областях.

В диссертации для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с младшими членами

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathrm{x},u,\nabla u))_{x_\alpha} - a_0(\mathrm{x},u,\nabla u) = -f_0(\mathrm{x}) + \sum_{\alpha=1}^{n}(f_\alpha(\mathrm{x}))_{x_\alpha} \tag{1}$$

исследуется корректность задачи Дирихле и изучается поведение ее решений при $|\mathrm{x}| \to \infty$ в неограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}_n,\ n \geq 2$. Ограничения на рост каратеодориевых функций $a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ по $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) \in \mathbb{R}_{n+1},\ \alpha = 0, \ldots, n$, формулируются в терминах специального класса выпуклых функций.

Начиная с работ М.И. Вишика, J.P. Gossez, T. Donaldson, A. Fougeres, B.C. Климова ведутся интенсивные исследования качественных свойств решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями как второго, так и высокого порядков. Однако, решения краевых задач для уравнений вида (1) с функциями $a_0(\mathrm{x}, \mathbf{s}), a_1(\mathrm{x}, \mathbf{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, \mathbf{s})$, имеющими не обязательно полиноминальный рост по переменным $s_0, s_1, \ldots, s_n$, рассматривались, в основном, в ограниченных областях[1][2][3].

Специфика краевых задач в неограниченных областях состоит в том, что если данные задачи суммируемы, то обобщенное решение будет принадлежать соответствующему пространству суммируемых функций, что естественно накладывает существенное ограничение на поведение решения на бесконечности. В диссертационной работе на каратеодориевы функции, входящие в уравнение (1), наряду с условием монотонности наложены требования, которые позволяют установить существование единственного обобщённого решения задачи Дирихле в произвольной неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$.

Ограниченность решений для некоторого класса эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в ограниченных областях установлена B.C. Кли-

[1] Benkirane A., Bennouna J. Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces / // Abstr. Appl. Anal. – 2002. – V. 7. – № 2. – P. 85 – 102.

[2] Aharouch L., Bennouna J., Touzani A. Existence of renormalized solution of some elliptic problems in Orlicz spaces // Rev. Mat. Complut. – 2009. – V. 22. – № 1. – P. 91 – 110.

[3] Gwiazda P., Wittbold P., Wróblewska A., Zimmermann A. Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces / // Preprints of PhD Programme: Mathematical Methods in Natural Sciences. – 2011. – no. 2011 – 013. – P. 1 – 32.

мовым[4] и А.Г. Королёвым[5]. В диссертации найдены условия на структуру уравнения (1), достаточные для ограниченности решений в неограниченных областях.

Точные оценки скорости убывания решений задачи Дирихле с финитными данными для квазилинейных эллиптических уравнений со степенными нелинейностями второго порядка установлены Л.М. Кожевниковой, Р.Х. Каримовым[6], Л.М. Кожевниковой, А.А. Хаджи[7]. Для уравнений с нестепенными нелинейностями исследование скорости убывания решений на бесконечности в неограниченных областях ранее не проводилось.

Следует отметить, что обобщенное решение эллиптической задачи в неограниченной области с несуммируемыми данными принадлежит соответствующему пространству локально сумммируемых функций. Как правило, для обеспечения единственности решения соответствующей краевой задачи в неограниченной области необходимо наложить условие на рост решения на бесконечности, а для существования решения из выделенного класса единственности обычно требуются ограничения на рост входных данных. Результаты такого характера для квазилинейных эллиптических уравнений со степенными нелинейностями в неограниченных областях были установлены А.Л. Гладковым, А.Ф. Тедеевым, А.Е. Шишковым.

В 1984 году Х. Брезис[8] на примере полулинейного уравнения показал, что имеются эллиптические уравнения, для которых существуют единственные решения краевых задач без предположений на их поведение и рост входных данных на бесконечности. Обобщение результатов Х. Брезиса на уравнения высокого порядка было проведено Ф. Бернисом[9].

О.А. Олейник и Ж.И. Диаз[10], пользуясь методом интеграла энергии и устанавливая априорные оценки решения, доказали существование, единственность и исследовали асимптотическое поведение решения краевой задачи с однородными граничными условиями первого и второго типа для полулинейных уравнений с переменными коэффициентами.

---

[4] Климов В.С. Теоремы вложения для пространств Орлича и их приложения к краевым задачам // Сибирский математический журнал. – 1972. – Т. 13. – № 2. – С. 334 – 348.

[5] Королев А.Г. Об ограниченности обобщенных решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями // Математические заметки. – 1987. – Т. 42. – № 2. – С. 244 – 255.

[6] Кожевникова Л.М., Каримов Р.Х. Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях // Уфимский математический журнал. – 2010. – Т. 2. – № 2. – С. 53 – 66.

[7] Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях / // Вестник Самарского государствнного технического университета. Серия: Физ.-мат. науки. – 2013. – № 1(30). – С. 90 – 96.

[8] Brezis H. Semilinear equations in R_N without condition at infnity// Appl. Math. Optim. – 1984. – V. 12. – № 3. – P. 271 – 282.

[9] Bernis F. Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infnity // Arch. Rational Mech. Anal. – 1989. – V. 106. – № 3. – P. 217 – 241.

[10] Diaz J.I., Oleinik O.A. Nonlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains and the asymptotic behaviour of its solution // C. R. Acad. Sci. Ser. I Math. – 1992. – V. 315. – № 7. – P. 787 – 792.

Существование решений квазилинейных эллиптических изотропных и анизотропных уравнений (1) со степенными нелинейностями во всем пространстве $\mathbb{R}_n$ без дополнительных ограничений на рост функции f_0 на бесконечности ($f_\alpha = 0,\ \alpha = 1, \ldots, n$) установлено в работах Л. Боккардо, Т. Галуа, Ж. Вазкеза[11], Г.Г. Лаптева[12], М. Бендамана, К. Карлсена[13] и др.

Таким образом, имеется широкий круг работ, в которых установлены существование или единственность решений краевых задач для эллиптических уравнений в неограниченных областях без ограничений на рост решений и данных задач на бесконечности. Соответствующие результаты для уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях автору диссертации не известны. В диссертационной работе удалось выделить некоторый класс эллиптических уравнений, имеющих не обязательно степенные нелинейности, и получить результаты близкие к процитированным выше.

Цель и задачи работы:

- изучение вопросов существования, единственности и непрерывной зависимости от данных решений задачи Дирихле в неограниченных областях для анизотропных эллиптических уравнений со степенными и нестепенными нелинейностями;

- исследование поведения на бесконечности решений задачи Дирихле в неограниченных областях для анизотропных эллиптических уравнений.

Научная новизна работы. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертационная работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы исследований представляют научный интерес и могут быть использованы в качественной теории краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений.

Методология и методы диссертационного исследования. В диссертационной работе используются методы качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными, функционального анализа, специального класса выпуклых функций и пространств Соболева-Орлича.

Оценка скорости убывания решений задачи Дирихле с финитными данными для анизотропных эллиптических уравнений со степенными нелинейностями получена модифицированным итеративным методом Ю. Мозера. Абстрактная

[11] Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J.L. Nonlinear elliptic equations in Rn without growth restrictions on the data // Differential Equations. – 1993. – V. 105. – № 2. – P. 334 – 363.

[12] Лаптев Г.Г. Существование решений некоторых квазилинейных эллиптических уравнений в R_n без условий на бесконечности // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – V. 12. – № 4. – С. 133 – 147.

[13] Bendahmane M., Karlsen K. Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in Rn with advection and lower order terms and locally integrable data // Potential Analysis. – 2005. – V. 22. – № 3. – P. 207 – 227.

теорема Ж.-Л. Лионса для монотонных операторов лежит в основе доказательства теоремы существования решений задачи Дирихле для анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями. Единственность решения задачи Дирихле доказана методом априорных оценок с помощью срезающей функции введенной Х. Брезисом. Для получения экспоненциальной оценки, характеризующей поведение решений на бесконечности эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями, установлен аналог неравенства Фридрихса на сферическом сегменте в терминах N-функций.

Положения выносимые на защиту.

1. Для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с нестепенными (и в том числе степенными) нелинейностями установлены существование, единственность и ограниченность обобщенных решений задачи Дирихле с суммируемыми данными в неограниченных областях. В неограниченных областях, расположенных вдоль выделенной оси, для решений задачи Дирихле с финитными данными получены оценки скорости убывания на бесконечности.

2. Доказано существование обобщенного решения задачи Дирихле в локальных пространствах Соболева-Орлича с локально суммируемыми данными для анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями без дополнительных ограничений на рост данных на бесконечности в неограниченных областях. Установлена единственность без дополнительных ограничений на поведение решения на бесконечности и непрерывная зависимость решения рассматриваемой задачи от правой части уравнения. Построены примеры уравнений, демонстрирующие, что класс рассматриваемых уравнений шире, чем уравнения со степенными нелинейностями.

3. Для анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями получены оценки, характеризующие поведение решений задачи Дирихле на бесконечности в неограниченных областях. Оценка степенного характера установлена для решений анизотропных уравнений в произвольных неограниченных областях. А для неограниченных областей, имеющих ограниченный диаметр сечения со сферой, на основе аналога неравенства Фридрихса на сферическом сегменте получена экспоненциальная оценка решений изотропных уравнений.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты докладывались автором и обсуждались семинаре по дифференциальным уравнениям Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета (Стерлитамак, руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор К.Б. Сабитов), кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета (Казань, руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор В.И. Жегалов). Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях: "Математическая физика и её приложения" (Самара, 2012, 2014), "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы" (Стерлитамак, 2013), "Нелинейный анализ и спектральные задачи" (Уфа, 2013), "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ"(Уфа, 2015), "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Белгород, 2013), "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2013, 2015), "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций – 2014" (Казань, 2014), "Спектральная теория и дифференциальные уравнения" (Москва, 2014), "Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам" (Симферополь, 2015), "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование" (Улан-Удэ, 2015), "Лобачевские чтения – 2015" (Казань, 2015).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в работах [1] – [25], из них 7 статей в российских изданиях перечня ВАК [1] – [7], в том числе статьи [3, 5] входят в международные библиографические и реферативные базы данных Web of Science, Scopus.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Работы [2, 6] выполнены самостоятельно, работы [1, 3, 4, 5, 7] опубликованы в соавторстве с научным руководителем, Л.М. Кожевниковой, где ей принадлежит постановка задач и общее руководство, а диссертанту — доказательство основных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из списка условных обозначений и сокращений, введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 91 наименование. Общий объем диссертации – 112 страниц.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю Л.М. Кожевниковой за предложенную тематику исследований, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** на основе анализа литературы обосновывается актуальность и определяется степень разработанности темы диссертационной работы.

Глава I состоит из двух параграфов. В **§1.1** приведены необходимые сведения из теории N-функций, пространств Орлича и анизотропных пространств Соболева-Орлича[14].

Неотрицательная непрерывная выпуклая вниз функция $M(z), z \in \mathbb{R}$, называется N-функцией, если она четна и $\lim\limits_{z\to 0} M(z)/z = 0$, $\lim\limits_{z\to\infty} M(z)/z = \infty$.

[14] Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича – М: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – 272 с.

Дополнительная к ней N-функция определяется равенством

$$\overline{M}(z) = \sup_{y\geq 0}(y|z| - M(y)).$$

Для N - функций $P(z), M(z)$ записывают $P(z) \prec M(z)$, если существуют числа $l > 0, z_0 \geq 0$ такие, что $P(z) \leq M(lz),\ z \geq z_0$. N-функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если существует такое число $c > 0$, что

$$M(2z) \leq cM(z),\ z \geq 0.$$

Пусть Q произвольная область пространства $\mathbb{R}_n$. Классом Орлича $K_M(Q)$, соответствующим N-функции $M(z)$, называется множество измеримых в Q функций v таких, что:

$$\int\limits_Q M(v(\mathrm{x}))d\mathrm{x} < \infty.$$

Пространством Орлича $L_M(Q)$ называется линейная оболочка $K_M(Q)$ с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{L_M(Q)} = \|v\|_{M,Q} = \inf\left\{k > 0 \;\middle|\; \int\limits_Q M\left(v(\mathrm{x})/k\right)d\mathrm{x} \leq 1\right\}.$$

Норму в пространстве $L_p(Q),\ 1 \leq p \leq \infty$ будем обозначать $\|\cdot\|_{p,Q}$.

Пусть $B_1(z), ..., B_n(z)$ – N-функции, определим пространство Соболева-Орлича $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$ как пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)} = \sum_{\alpha=1}^{n}\|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha,Q}.$$

Положим $h(t) = t^{-1/n}\left(\prod_{\alpha=1}^n B_\alpha^{-1}(t)\right)^{1/n}$ и предположим, что

$$\int\limits_0^1 h(t)/tdt < \infty, \tag{2}$$

тогда можно определить функцию $(B^*)^{-1}(z) = \int\limits_0^{|z|} h(t)/tdt$. Приведем теорему вложения А.Г. Королева[15].

Лемма 1.2. *Пусть* $v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$.

1) Если

$$\int\limits_1^\infty h(t)/tdt = \infty, \tag{3}$$

[15]Королев А.Г. Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева-Орлича // Вестник МГУ. – 1983. – Т. 180. – № 1. – С. 32 – 37.

то $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q) \subset L_{B^*}(Q)$ *и* $\quad \|v\|_{B^*,Q} \le A_1 \|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)}$;
2) если

$$\int\limits_1^\infty h(t)/t dt < \infty, \tag{4}$$

то $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q) \subset L_\infty(Q)$ *и* $\quad \|v\|_{\infty,Q} \le A_2 \|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)}$. *Здесь* $A_1 = \frac{n-1}{n}, A_2 = \int\limits_0^\infty \frac{h(t)}{t} dt.$

В **§1.2** дано определение обобщенного решения рассматриваемой задачи и сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \;\; ..., x_n)\}, \;\; \Omega \subsetneq \mathbb{R}_n, \;\; n \ge 2$. Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка (1) в области Ω рассматривается задача Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \; \mathrm{x} \in \Omega, \; \mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_{n+1} \;\; \alpha = 0, \dots, n$, каратеодориевы. Пусть существуют измеримые неотрицательные функции $\psi(\mathrm{x}), \Psi(\mathrm{x}), \; \varphi(\mathrm{x}), \; \Phi(\mathrm{x})$ такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}), \mathbf{t} = (t_0, \mathrm{t}) \in \mathbb{R}_{n+1}, \;\; \mathbf{s} \ne \mathbf{t}$ справедливы неравенства:

$$\sum_{\alpha=0}^n a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_\alpha \ge \varphi(\mathrm{x}) \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha) - \psi(\mathrm{x}); \tag{6}$$

$$\sum_{\alpha=0}^n \overline{B}_\alpha(a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})) \le \Phi(\mathrm{x}) \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha) + \Psi(\mathrm{x}); \tag{7}$$

$$\sum_{\alpha=0}^n (a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - a_\alpha(\mathrm{x}, t_0, \mathrm{t}))(s_\alpha - t_\alpha) > 0. \tag{8}$$

Здесь N–функции $B_0(z), B_1(z), ..., B_n(z)$ и дополнительные к ним N–функции $\overline{B}_0(z), \;\overline{B}_1(z), ..., \overline{B}_n(z)$ удовлетворяют Δ_2-условию.

В лемме 3.1 показано, что функции $a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - f_\alpha(\mathrm{x}), \; \alpha = 0, 1, \dots, n$, также удовлетворяют условиям (6) – (8). Поэтому вместо уравнения (1) можно рассматривать уравнение с нулевой правой частью:

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\mathrm{x}, u, \nabla u))_{x_\alpha} - a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u) = 0. \tag{9}$$

В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^n (2\varphi(\mathrm{x}) B'_\alpha(u_{x_\alpha}) + \phi_\alpha(\mathrm{x}))_{x_\alpha} - 2\varphi(\mathrm{x}) B'_0(u) - \phi_0(\mathrm{x}) = 0 \tag{10}$$

с непрерывно дифференцируемыми N–функциями $B_0(z), B_1(z), ..., B_n(z)$. В лемме 3.2 установлено, что для функций $a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha) = 2\varphi(\mathrm{x})B'_\alpha(s_\alpha) + \phi_\alpha(\mathrm{x}),\ \alpha = 0, 1, \ldots, n$, условия (6) – (8) выполнены.

Для степенного случая $B_\alpha(z) = |z|^{p_\alpha},\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n,\ p_0 > 1,\ \ p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_n > 1$, условия (6), (7) принимают вид:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})s_\alpha \geq \varphi(\mathrm{x}) \sum_{\alpha=0}^{n} |s_\alpha|^{p_\alpha} - \psi(\mathrm{x}); \tag{6'}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n} |a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|^{p_\alpha/(p_\alpha-1)} \leq \Phi(\mathrm{x}) \sum_{\alpha=0}^{n} |s_\alpha|^{p_\alpha} + \Psi(\mathrm{x}). \tag{7'}$$

Пусть $Q \subseteq \Omega$ (Q может совпадать с Ω), через $\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q)$ обозначим пространство $L_{\overline{B}_0}(Q) \times L_{\overline{B}_1}(Q) \times \ldots \times L_{\overline{B}_n}(Q)$ с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q)} = \|g_0\|_{\overline{B}_0,Q} + \|g_1\|_{\overline{B}_1,Q} + \ldots + \|g_n\|_{\overline{B}_n,Q}, \quad \mathbf{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_n) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q).$$

Определим пространство Соболева - Орлича $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(Q)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(Q)} = \|v\|_{B_0,Q} + \|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)}.$$

В случае выполнения условия (3), будем считать, что

$$B_0(z) \prec B_*(z), \tag{11}$$

а при выполнении (4) $B_0(z)$ — произвольная N–функция. В степенном случае при выполнении условия

$$\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha > 1, \tag{3'}$$

будем считать, что

$$p_0 \leq p_* = n\left(-1 + \sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\right)^{-1}, \tag{11'}$$

а при выполнении

$$\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha \leq 1, \tag{4'}$$

$p_0 > 1$ — произвольное.

Определим $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ \ L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ \ \mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, как пространства, состоящие из функций $v(\mathrm{x})$, определенных в Ω, для которых при любой ограниченной $Q \subsetneq \Omega$ найдется функция из пространства $L_\infty(\Omega),\ L_1(\Omega),\ \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, соответственно, совпадающая с функцией $v(\mathrm{x})$ в Q. Аналогично определяется пространство $\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Будем считать, что неотрицательные функции

$$\psi,\ \Psi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{12}$$

$$1/\varphi,\ \varphi,\ \Phi \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \tag{13}$$

Определим оператор $\mathbf{B} : \mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \to L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ формулой:

$$\mathbf{B}(v) = B_0(v) + \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(v_{x_\alpha}), \quad v \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}).$$

Далее, по элементу $\mathbf{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ для $v(\mathrm{x}) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ и фиксированному множеству Q определим функционал $\mathbf{A}(u)$ равенством:

$$\langle \mathbf{A}(u), v\rangle_Q = \int\limits_Q \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha v_{x_\alpha} + a_0 v\right) d\mathrm{x}.$$

Определение 1.1. *Обобщенным решением задачи* (9), (5) *назовем функцию* $u(\mathrm{x}) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\langle \mathbf{A}(u), v\rangle_\Omega = 0 \tag{14}$$

для любой функции $v(\mathrm{x}) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ *с ограниченным носителем.*

В **главе II** изложены результаты для обобщенного решения задачи (9), (5) с данными

$$\psi,\ \Psi \in L_1(\Omega), \tag{15}$$

$$1/\varphi,\ \varphi,\ \Phi \in L_\infty(\Omega). \tag{16}$$

Очевидно, существуют числа $\overline{a}, \widehat{A} > 0$ такие, что $\overline{a} \le \varphi(\mathrm{x}),\ \Phi(\mathrm{x}) \le \widehat{A}$ для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$.

В **§2.1** доказана

Теорема 1.1. *Функция* $u(\mathrm{x}) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, *удовлетворяющая тождеству* (14) *для любого* $v(\mathrm{x}) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, *является обобщенным решением задачи* (9), (5). *Если выполнены условия* (6)–(8), (15), (16), *то такое решение существует, единственно и подчиняется неравенству*

$$\|u\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)} \le \mathcal{M}_1,$$

с константой $\mathcal{M}_1$, *зависящей только от* $n, \overline{a}, \|\psi\|_1$.

В **§2.2** при дополнительных требованиях на функции $a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}),\ \alpha = 1, \ldots, n$, установлена ограниченность решения задачи (9), (5). А именно, предполагается, что функция

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_\alpha \left[\begin{array}{lll} \text{монотонно не убывает} & \text{при} & s_0 \ge 0, \\ \text{монотонно не возрастает} & \text{при} & s_0 < 0 \end{array}\right] \tag{17}$$

и
$$\psi(\mathrm{x}) \in L_{l/(l-1)}(\Omega), \quad l \geq 1, \tag{18}$$
где l такое, что $t^{1/l-1}\Lambda(t^{1/(ln)}) \to 0$ при $t \to 0$, $\Lambda(z) = \sup\limits_{\theta>0} B_*(z\theta)/B_*(\theta)$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия* (3), (11), (6)–(8), (15)–(18) *и* N-*функция* $B_*(z)$ *удовлетворяет* Δ_2-*условию. Тогда для обобщённого решения* $u(\mathrm{x})$ *задачи* (9), (5) *справедлива оценка*
$$\sup_{\Omega} |u| \leq \mathcal{M}_2$$
с константой $\mathcal{M}_2$, *зависящей только от* $n, l, \overline{a}, \|\psi\|_1, \|\psi\|_{l/(l-1)}, B_\alpha,\ \alpha = 0\ldots, n$.

В **§2.3** получены оценки, характеризующие скорость убывания на бесконечности решения задачи (9), (5) с финитными данными. В этом параграфе рассматриваются области $\Omega[k]$, расположенные вдоль выделенной оси Ox_k, $k = \overline{1,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_k > 0$ и сечение $\gamma_r = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid x_k = r\}$ не пусто при любом $r > 0$). Введем обозначение: $\Omega_a^b = \{\mathrm{x} \in \Omega \,\Big|\, a < x_k < b\}$, значения $a = 0,\ b = \infty$ могут быть опущены.

Предположим, что
$$\operatorname{supp} \Psi, \psi \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0. \tag{19}$$

В **п.2.3.1** для изучения поведения решения задачи (9), (5) при $x_k \to \infty$ использованы функции
$$\nu_i(\rho) = \inf_{v \in C_0^\infty(\Omega)} \sup \left\{ z \;\Big|\; \int\limits_{\gamma_\rho} B_i(zv) d\mathrm{x}'_k \leq \int\limits_{\gamma_\rho} B_i(v_{x_i}) d\mathrm{x}'_k \right\},$$
$$\overline{\nu}_k(\rho) = \min_{i=\overline{1,n}, i\neq k} \nu_i(\rho), \quad \rho > 0,$$
где $\mathrm{x}'_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$.

Пусть существуют числа $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq k$, $0 < z^* \leq \infty$ такие, что
$$B_k(z) \leq \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \beta_i B_i(z), \quad 0 \leq z \leq z^*. \tag{20}$$

Теорема 1.3. *Пусть область* $\Omega[k]$ *расположена вдоль оси* Ox_k, $k = 1, \ldots, n$, *и выполнены условия* (6)–(8), (15), (16), (19), (20). *Если* $z^* \neq \infty$, *то решение* $u(\mathrm{x})$ *задачи* (9), (5) *предполагается ограниченным. Тогда существуют положительные числа* $\kappa_0(\mathcal{M}_2, \overline{a}, \widehat{A}, B_1, \ldots, B_n)$, $\mathcal{M}_3(\overline{a}, \widehat{A}, B_k, R_0)$ *такие, что при всех* $r \geq 2R_0$ *справедлива оценка*
$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega_r} \leq \mathcal{M}_3 \exp\left(-\kappa_3 \int\limits_1^r \overline{\nu}_k^*(\rho) d\rho \right), \tag{21}$$

где $\overline{\nu}_k^*(\rho) = \min\{\overline{\nu}_k(\rho), z^*\}$.

В **п.2.3.2** для решения уравнения (9) со степенными нелинейностями установлен аналог экспоненциальной оценки (21). Следует отметить, что оценка (21) представляет интерес только для "нешироких областей" таких, что интеграл $\int_1^\infty \overline{\nu}_k^*(\rho)d\rho$ расходится.

В **п.2.3.3** получена степенная оценка модуля решения уравнения (9) со степенными нелинейностями в произвольных областях, расположенных вдоль выделенной оси.

Теорема 1.4. *Пусть область* $\Omega[k]$ *расположена вдоль оси* Ox_k, $k = 1, \ldots, n$, *и выполнены условия* $(6')$, $(7')$, (8), $(3')$, $(11')$, (15), (16), (19), *а также для п.в.* $\mathrm{x} \in \Omega[k]$ *и любых* $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s})$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})s_\alpha \geq 0, \quad a(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})s_0 \geq 0,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha < 1 + n/p_k.$$

Тогда для обобщенного решения $u(\mathrm{x})$ *задачи* (9), (5) *при любом* $r \geq 2R_0/\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, *имеет место оценка*

$$\sup_{\Omega^r_{\varepsilon r}[k]} |u(\mathrm{x})| \leq \mathcal{M}_4 r^{-m_*},$$

где $m_* = p_k(p_* - p_k)^{-1}$, $\mathcal{M}_4$ *— положительная константа, зависящая от* $p_\alpha, \alpha = 1, \ldots, n,$ n, $\overline{a}$, $\widehat{A}$, $\|\psi\|_1, \varepsilon$.

В **главе III** рассматриваются свойства обобщенного решения из пространства $\mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ задачи (9), (5) с локально суммируемыми данными (12), (13).

Будем считать, что существует такое $0 < \epsilon < 1$, что

$$B_\alpha(z^{1+\epsilon}) \prec B_0(z), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{22}$$

§3.2 посвящен доказательству теоремы существования решения задачи (9), (5) без дополнительных ограничений на рост данных на бесконечности.

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия* (6) – (8), (12), (13), (22), *тогда существует обобщенное решение* $u(\mathrm{x})$ *задачи* (9), (5).

В **§3.3** предполагается, что выполнены требования (12), (16). В **п. 3.3.1** установлена экспоненциальная оценка решения задачи (9), (5) для изотропного случая:

$$B_\alpha(z) = B(z), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{23}$$

в неограниченных областях, подчиняющихся лишь условию

$$d(r) = \operatorname{diam} \gamma(r) \leq D, \quad D > 0, \quad \gamma(r) = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid |\mathrm{x}| = r\}, \quad r \geq r_d. \tag{24}$$

Теорема 1.6. *Пусть выполнены условия* (6) – (8), (12), (16), (22) – (24). *Тогда существуют положительные числа* κ_∞, $\mathcal{M}_5$, $r_0(\widehat{A}, \overline{a}, n, B, \ B_0, D, r_d)$ *такие, что решение* $u(\mathrm{x})$ *задачи* (9), (5) *при всех* $r \geq r_0$ *подчиняется оценке*

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega(r/2)} \leq \mathcal{M}_5 \left(\exp\left(-\kappa_\infty r\right) r^{n-1} + \|\psi + \Psi\|_{1,\Omega(2r)}\right),$$

в которой $\Omega(r) = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid |\mathrm{x}| < r\}$.

Остальные результаты диссертационой работы получены при дополнительных ограничениях на структуру уравнения (9). А именно, предполагается, что:

$$B_\alpha(z) = c_\alpha |z|^{p_\alpha}, \quad |z| \leq 1, \quad p_\alpha > 1, \quad c_\alpha > 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Будем считать, что показатели $p_\alpha, \ \alpha = 1, \ldots, n$ упорядочены: $p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_n$ и подчиняются условиям:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha > 1, \tag{2'}$$

$$p_0 > p_1. \tag{26}$$

Тогда числа $q_\alpha = \frac{p_0 p_\alpha}{p_0 - p_\alpha}, \ \alpha = 1, \ldots, n$, также упорядочены: $q_1 \geq q_2 \geq ... \geq q_n$. Будем предполагать, что

$$q_n > n. \tag{27}$$

В **п. 3.3.2** для произвольной неограниченной области установлена степенная оценка решения задачи (9), (5).

Теорема 1.7. *Пусть выполнены условия* (6) – (8), (12), (16), (22), (25), (26), (2′). *Тогда существует положительное число* $\mathcal{M}_6(n, \overline{a}, \widehat{A}, B_\alpha, p_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, n)$ *такое, что для обобщенного решения задачи* (9), (5) *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega(r/2)} \leq \mathcal{M}_6 \left(r^{n-q_n} + \|\psi + \Psi\|_{1,\Omega(r)}\right), \quad r \geq 1.$$

Условия теоремы 1.7 выполнены, например, для уравнения (10) с функциями

$$B_\alpha(z) = \begin{cases} |z|^{p_\alpha}, \ |z| < 1; \\ |z|^{p_\alpha - 1}(\ln|z| + 1), \ |z| \geq 1 \end{cases}$$

при подходящем выборе $p_\alpha > 2, \ \alpha = 0, 1, \ldots, n$. В **3.3.3** приведены примеры уравнений с нестепенными нелинейностями, удовлетворяющие условиям теорем 1.6, 1.7.

В **§3.4** для уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(\mathrm{x}, u_{x_\alpha}))_{x_\alpha} - a_0(\mathrm{x}, u) = -f_0(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{28}$$

с $f_0(\mathrm{x}) \in L_{\overline{B}_0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ доказана единственность и непрерывная зависимость от f_0 решения задачи Дирихле без ограничений на его рост на бесконечности.

Предполагается, что функции $a_\alpha(\mathrm{x}, s)$, $\mathrm{x} \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha = 0, \ldots, n$, каратеодориевы и существуют измеримые неотрицательные функции $\varphi_\alpha(\mathrm{x})$ такие, что для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$, $s_\alpha, t_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 0, \ldots, n$, справедливы неравенства:

$$(a_0(\mathrm{x}, s_0) - a_0(\mathrm{x}, t_0))(s_0 - t_0) \geq \varphi_0(\mathrm{x}) B_0(s_0 - t_0), \tag{29}$$

$$0 \leq (a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha) - a_\alpha(\mathrm{x}, t_\alpha))(s_\alpha - t_\alpha) \leq \varphi_\alpha(\mathrm{x}) B_\alpha(s_\alpha - t_\alpha), \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

Предполагаем, что

$$1/\varphi_0(\mathrm{x}), \quad \varphi_\alpha(\mathrm{x}) \in L_\infty(\Omega), \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{31}$$

Очевидно, что неравенства (29), (30) обеспечивают условие (8). Если кроме условий (29), (30) для функций $a_\alpha(\mathrm{x}, s)$, $\alpha = 0, \ldots, n$, выполнены условия (6), (7), (12), (22), то, согласно теореме 1.5, существует решение задачи (28), (5).

Доказана следующая

Теорема 1.8. *Пусть выполнены условия* (22), (25) – (27), (2′), (29) – (31), *тогда обобщенное решение* $u(\mathrm{x})$ *задачи* (28), (5) *единственно. Пусть* $\{u^k(\mathrm{x})\}_{k=0}^\infty$ *— решения задачи* (28), (5) *с правыми частями* $\{f_0^k(\mathrm{x})\}_{k=0}^\infty$, *соответственно. Тогда, если* $f_0^k \to f_0$ *в* $L_{\overline{B}_0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, *то* $u^k \to u^0$ *в* $L_{B_0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ *при* $k \to \infty$.

В **п. 3.4.2** приведены примеры уравнений с нестепенными нелинейностями, удовлетворяющие условиям теоремы 1.8.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

[1] Хаджи, А.А. Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи// Вестник Самарского государствнного технического университета. Серия: Физ.-мат. науки. – 2013. – № 1(30). – С. 90 – 96. – 0,44 п.л.

[2] Хаджи, А.А. Убывание решений анизотропных эллипти-ческих уравнений с младшими членами в неограниченных областях / А.А. Хаджи // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2014. – Т. 34. – № 5(176) – С. 78 – 87. – 0,63 п.л.

[3] Хаджи, А.А. Ограниченность решений анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Уфимский математический журнал. – 2014. – Т. 6 – № 2. – С. 67 – 77. – 0,69 п.л.

[4] Хаджи, А.А. О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физ.-мат. науки. – 2015. – № 19. – С. 44 – 62. – 1,19 п.л.

[5] Хаджи, А.А. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Математический сборник. – 2015. – Т. 206. – № 8. – С. 99 – 126. – 1,75 п.л.

[6] Хаджи, А.А. О неравенстве типа Фридрихса / А.А. Хаджи // Научно-технический вестник Поволжья. – 2015. – № 6. – С. 30 – 33. – 0,25 п.л.

[7] Хаджи, А.А. Убывание решений анизотропных эллиптических уравнений с младшими членами в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2015. – Т. 40. – № 17(214). – С. 79 – 81. – 0,19 п.л.

Публикации в других изданиях

[8] Хаджи, А.А. Решения анизотропных эллипических уравнений в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Материалы Третьей международной конференции “Математическая физика и ее приложения“. – Самара: СамГТУ. – 2012. – С. 166 – 167. – 0,13 п.л.

[9] Хаджи, А.А. Ограниченность решений анизотропных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Труды международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы“. – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2013. – С. 331 – 338. – 0,5 п.л.

[10] Хаджи, А.А. Ограниченность решений анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы международной Казанской летней научной школы-конференции “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы“. – Казань: Казанский университет. – 2013. – С. 249 – 251. – 0,19 п.л.

[11] Хаджи, А.А. Убывание решений анизотропных эллиптических уравнений с младшими членами в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Сборник материалов международной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения“. – Белгород: ИПК НИУ “БелГУ“. – 2013. – С. 118 – 119. – 0,13 п.л.

[12] Хаджи, А.А. Убывание решений анизотропных эллиптических уравнений с младшими членами в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Тезисы докладов международной научной конференции “Нелинейный анализ и спектральные задачи“. – Уфа: Изд-во БашГУ. – 2013. – С. 74 – 75. – 0,13 п.л.

[13] Хаджи, А.А. О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Материалы Четвертой международной конференции “Математическая физика и ее приложения“. – Самара: СамГТУ. – 2014. – С. 199 – 200. – 0,13 п.л.

[14] Хаджи, А.А. Поведение решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы Международной научной конференции “Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций - 2014“. – Казань: изд-во Казанского ун-та. – 2014. – Т. 49. – С. 39–41. – 0,19 п.л.

[15] Хаджи, А.А. О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Тезисы докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. – М.: МИАН. – 2014. – С. 87–88. – 0,13 п.л.

[16] Хаджи, А.А. Качественные свойства решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Тезисы докладов международной конференции “Спектральная теория и дифференциальные уравнения“, посвященная 100-летию Б.М. Левитана. – М.: МГУ и ООО "ИТУИТ.РУ". – 2014. – С. 77–80. – 0,25 п.л.

[17] Хаджи, А.А. Единственность решений анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях / А.А. Хаджи // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы Четырнадцатой всероссийской молодежной научной школы-конференции “Лобачевские чтения - 2015“. – Казань: Изд-во Казанского математического общества. – 2015. – Т. 52. – С. 160 – 161. – 0,13 п.л.

[18] Хаджи, А.А. О единственности решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Сборник тезисов международной научной конференции “Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ“. – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2015. – С. 84 – 86. – 0,19 п.л.

[19] Хаджи, А.А. О решениях квазилинейных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / А.А. Хаджи // Информационные технологии естественных и математических наук. – 2015. – № 2. – С. 9 – 13. – 0,31 п.л.

[20] Хаджи, А.А. О существовании решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Тезисы докладов VIII международной конференции "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике". – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. – 2015. – С. 38 – 39. – 0,13 п.л.

[21] Khadzhi, A.A. Uniqueness of solutions of anisotropic elliptic equations in unbounded domains / L.M. Kozhevnikova, A.A. Khadzhi// San Francisco, California, USA: Scientific enquiry in the contemporary world: Theoretical basics and innovative approach. Research articles. Natural sciences: Technical Sciences. – 2015. – № 3. – P. 4 – 15. – 0,75 п.л.

[22] Хаджи, А.А. Существование решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы XII международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". – Казань: Изд-во Казанского математического общества. – 2015. – Т. 51. – С. 238 – 240. – 0,19 п.л.

[23] Хаджи, А.А. Существование решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Тезисы докладов международной конференции "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование". – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ. – 2015. – С. 149–150. – 0,13 п.л.

[24] Хаджи, А.А. Качественные свойства решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Сборник тезисов международной конференции "XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа симпозиум по спектральным и эволюционным задачам". – Симферополь: ООО ФОРМА. – 2015. С. 51–52. – 0,13 п.л.

[25] Хаджи, А.А. О единственности решений анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях / Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2016". – Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга". – 2016. – С. 194–196. – 0,19 п.л.