На правах рукописи

Зайнетдинов Дамир Хабирович

Предельно монотонная сводимость и её структурные свойства

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2016

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Научный руководитель:
Калимуллин Искандер Шагитович,
доктор физико-математических наук,
доцент, главный научный сотрудник
Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского
ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Официальные оппоненты:
Пузаренко Вадим Григорьевич,
доктор физико-математических наук,
доцент, ведущий научный сотрудник
ФГБУН Института математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук.

Коровина Маргарита Владимировна,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
ФГБУН Института систем информатики им. А. П. Ершова
Сибирского отделения Российской академии наук.

Ведущая организация: ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 22 декабря 2016 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.35 при ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, корп. 2, ауд. 1011.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35. Электронная версия диссертации размещена на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета http://kpfu.ru.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просьба высылать на имя ученого секретаря диссертационного совета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

Автореферат разослан «____»____________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.35
кандидат физико-математических наук, доцент Еникеев А. И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа посвящена исследованию свойств предельно монотонных множеств, пар множеств и последовательностей, состоящих из бесконечных множеств, а также изучению предельно монотонной сводимости (обозначаем также через lm-сводимость, где запись lm происходит от английского “***l****imitwise* ***m****onotonic*”, что значит “предельно монотонная”) множеств и последовательностей множеств. В настоящей работе lm-сводимость множеств и последовательностей, состоящих из бесконечных множеств, рассматривается посредством Σ-сводимости алгебраических структур и семейств начальных сегментов натуральных чисел. Также в диссертационном исследовании представлено описание lm-сводимости множеств на языке Σ-определимости абелевых групп специального вида. Помимо этого, в работе исследованы структурные свойства предельно монотонной сводимости множеств, принадлежащих классу Σ^0_2 арифметической иерархии.

Одной из основных задач теории вычислимых структур является изучение вопросов эффективности алгебраических структур и моделей. Следует отметить, что своё основное развитие теория структур получила в начале XX века. По большей части этому способствовали работы выдающихся зарубежных математиков-логиков А. Тарского и А. Робинсона. Отечественные разработки в данном направлении и становление теории вычислимых структур как самостоятельной единицы исследования современной математической логики начали активно развиваться с середины XX века и во многом благодаря трудам выдающегося советского математика академика А. И. Мальцева [8, 9].

Одна из методологических проблем современной теории вычислимых структур заключается в оценке сложности исследуемого объекта таким образом, чтобы представленная алгебраическая структура наследовала эффективные свойства этого объекта. Одним из таких объектов исследования является класс неубывающих по последнему аргументу вычислимых трёхместных функций. С помощью этих функций Н. Г. Хисамиевым был доказан важный критерий конструктивизируемости абелевых групп специального вида.

Другим, не менее значимым результатом, полученным Н. Г. Хисамиевым [31], является описание вычислимо представимых абелевых p-групп, имеющих конечную Ульмову длину. Для получения данного описания Н. Г. Хисамиев ввёл понятие вычислимой монотонной аппроксимации множества.

Следует сказать, что впоследствии понятие вычислимой монотонной аппроксимации множества нашло своё применение и в решении других важных задач как в классической теории вычислимости (см., например, [22]), так и в теории вычислимых структур (см., например: [32], [28], [21]).

Теорема 1. (Н. Г. Хисамиев [30]). *Пусть $\mathcal{G}$ – прямая сумма циклических и квазициклических p-групп. Тогда $\mathcal{G}$ вычислимо представима, если и только если существует частично вычислимая трёхместная функция φ, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) $\forall p\ \forall x\ \forall s\ [\varphi(p,x,0)\downarrow \Rightarrow \varphi(p,x,s)\downarrow \leqslant \varphi(p,x,s+1)\downarrow]$;

(2) $\mathcal{G} \cong \bigoplus\{\mathbb{Z}_{p^{m(n,p)}} \mid p - \text{простое},\ n \in \mathbb{N}\},\ \text{где}\ m(n,p) = \lim_s \varphi(p,n,s)$.

Отметим, что Н. Г. Хисамиевым в работах [29]-[31] также было установлено много других критериев конструктивизируемости абелевых групп с точки зрения неубывающих функций. Кроме того, предельно монотонные функции и предельно монотонные множества были широко изучены как зарубежными, так и отечественными авторами. Можно выделить работы М. В. Зубкова [3]; И. Ш. Калимуллина и М. Х. Файзрахманова [7, 24]; Р. Доуни, А. Кэча и Д. Турецкого [22]; А. Н. Фролова и М. В. Зубкова [25]; А. Кэча и Д. Турецкого [27]; И. Ш. Калимуллина, Б. Хусаинова и А. Г. Мельникова [28]; Б. Хусаинова, А. Нииса и Р. Шора [32] и др.

В. Г. Пузаренко [13] исследована Σ-определимость в наследственно конечных надстройках над алгебраическими структурами. Кроме того, в той же работе В. Г. Пузаренко установлен критерий Σ-определимости, с помощью которого доказывается теорема о редукции для регулярных теорий. Несколько существенных результатов, касающихся Σ-определимости счётных структур над вещественными, комплексными числами и кватернионами, были получены в совместной работе А. С. Морозова и М. В. Коровиной [12].

Проблема 1. Описание предельно монотонной сводимости множеств посредством Σ-определимости абелевых групп специального вида.

В связи с изучением эффективной монотонной аппроксимации множеств и последовательностей множеств (см. [28]), возникло понятие предельно монотонной сводимости на множествах и последовательностях множеств. Следующей проблемой, которая решается в диссертации, является описание предельно монотонной сводимости множеств и последовательностей, состоящих из бесконечных множеств, посредством Σ-сводимости семейств подмножеств натуральных чисел специального вида. Семейства подмножеств натуральных чисел активно используются в теории вычислимых структур в качестве вспомогательного аппарата (см., например, [26]). В совместной работе И. Ш. Калимуллин и В. Г. Пузаренко [5] ввели понятие Σ-сводимости на семействах подмножеств натуральных чисел, которое позволяет рассматривать семейство само по себе, не фиксируя при этом его представление с помощью натуральных чисел. Помимо этого, Σ-сводимость используется для изучения актуальных задач как в классической теории вычислимости, так и на допустимых множествах, а именно, описание индексных множеств семейств, принадлежащих классу Σ_3^0 арифметической иерархии; обобщение теоремы полноты Фридберга для смежной сводимости на допустимых множествах и др. Кроме того, И. Ш. Калимуллиным [6] были исследованы алгоритмические сводимости счётных алгебраических систем.

Проблема 2. Получить описание предельно монотонной сводимости множеств и последовательностей, состоящих из бесконечных множеств, на языке Σ-сводимости семейств начальных сегментов натуральных чисел.

Естественным дополнением к исследованию в данной области является решение следующей проблемы.

Проблема 3. Верно ли, что каждый счётный частичный порядок вкладывается в предельно монотонные степени?

Отметим, что определенный интерес представляет исследование структурных свойств предельно монотонной сводимости множеств, принадлежащих классу Σ_2^0 арифметической иерархии. Здесь можно выделить следующую проблему.

Проблема 4. Верно ли, что существует наименьшее не предельно монотонное Σ_2^0-множество относительно предельно монотонной сводимости?

Цели и задачи диссертационного исследования. Целями диссертационной работы являются:

I. исследование алгоритмической зависимости между предельно монотонной сводимостью множеств и Σ-сводимостью семейств специального вида для данных множеств;

II. исследование структурных свойств предельно монотонной сводимости множеств, принадлежащих классу Σ_2^0 арифметической иерархии.

Можно выделить следующие основные задачи диссертационного исследования:

1. описание предельно монотонной сводимости множеств на языке Σ-сводимости алгебраических структур и семейств начальных сегментов натуральных чисел;

2. описание основных структурных свойств множеств относительно предельно монотонной сводимости: существование максимальных и минимальных элементов; существование несравнимых между собой элементов; возможность вложения конечных упорядоченных множеств в соответствующие степенные структуры.

Научная новизна результатов исследования. Все основные результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно, кроме результатов из параграфов 2.5 и 3.4, полученных в нераздельном соавторстве с И. Ш. Калимуллиным и М. Х. Файзрахмановым при равном участии всех сторон. В совместных с научным руководителем публикациях И. Ш. Калимуллину принадлежат постановки задач и разработка методов исследования, Д. Х. Зайнетдинову – основные результаты и их доказательства.

Методология и методы исследования. В диссертации использованы классические методы современной теории вычислимости и теории вычислимых структур. Среди них можно особо отметить метод приоритета с бесконечными нарушениями на деревьях и метод приоритета в комбинации с $\emptyset'$-оракульной конструкцией.

Теоретическая и практическая значимость диссертации. Результаты диссертационной работы носят теоретический характер. Полученные в работе результаты могут найти свое применение в дальнейших теоретических исследованиях в рамках теории вычислимости и теории вычислимых структур. Кроме того, результаты диссертационной работы могут использоваться при написании учебных пособий и монографий, а также при чтении специальных курсов по теории вычислимости в высших учебных заведениях Российской Федерации.

Основные результаты диссертации. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования:

1. получено описание предельно монотонной сводимости множеств, пар множеств и последовательностей, состоящих из бесконечных множеств, на языке Σ-сводимости алгебраических структур и семейств начальных сегментов натуральных чисел;

2. установлена связь между предельно монотонной сводимостью множеств и Σ-определимостью абелевых групп специального вида;

3. доказано существование максимальной пары Δ_2^0-множеств относительно предельно монотонной сводимости;

4. доказано отсутствие максимального Σ_2^0-множества относительно предельно монотонной сводимости;

5. доказано, что не существует наименьшего не предельно монотонного Σ_2^0-множества относительно предельно монотонной сводимости;

6. получено вложение счётных частичных порядков в предельно монотонные степени.

Степень достоверности результатов диссертации. Все результаты диссертации достоверны, что подтверждается строгими математическими доказательствами.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования по мере их получения были доложены автором:

- на всероссийской молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2013» (Россия, г. Казань, 24–29 октября 2013 г.);

- на международной научной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Россия, г. Казань, 2–6 июня 2014 г.);

- на международной конференции «Logic Colloquium» (Австрия, г. Вена, 14–19 июля 2014 г.);
- на всероссийской молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2014» (Россия, г. Казань, 24–29 октября 2014 г.);
- на международной конференции «Мальцевские чтения» (Россия, г. Новосибирск, 3–7 мая 2015 г.);
- на всероссийской молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2015» (Россия, г. Казань, 22–27 октября 2015 г.);
- на международной конференции по «Алгебре, анализу и геометрии» (Россия, г. Казань, с 26 июня по 2 июля 2016 г.);
- на научных семинарах и итоговых конференциях кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета в 2015–2016 гг.

Публикации. Все основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 13 работах [35]–[47], из которых 4 работы [35]–[38] опубликованы в журналах, которые содержатся в "Перечне ВАК при Минобрнауки России рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук".

Структура и объем диссертационной работы. Диссертация включает в себя введение, три главы, каждая из которых разбита на параграфы, заключение и список литературы, содержащий 47 (сорок семь) наименований, включая список работ, опубликованных автором по теме диссертации. Общий объём диссертации – 94 (девяносто четыре) страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснованы актуальность темы и выбор объектов исследования, кратко сформулированы цели и задачи, а также основные положения, составляющие научную новизну и практическую значимость диссертации.

Первая глава посвящена основным определениям и необходимым для понимания диссертационной работы предварительным сведениям. В частности, в **первом параграфе** приводятся предварительные сведения из теории вычислимости и теории вычислимых моделей. Согласно монографии [18], определяется бесконечная иерархия степеней $\mathbf{0} < \mathbf{0}' < \mathbf{0}'' < \cdots < \mathbf{0}^{(n)} < \cdots$ и арифметическая иерархия множеств. Помимо этого, приводятся основные определения и некоторые центральные результаты теории допустимых множеств, определяются наследственно конечные надстройки над структурами, рассматривается понятие Σ-определимости алгебраических структур. Все определения, представленные в первом параграфе, а также основные результаты, касающиеся теории вычислимости и теории моделей, могут быть найдены в монографиях [1, 2], [17]-[20], [33, 34]. Во **втором параграфе первой главы** даны предварительные сведения о Σ-сводимости семейств подмножеств натуральных чисел. Можно отметить, что основные свойства Σ-сводимости на допустимых множествах были широко исследованы в работах И. Ш. Калимуллина и В. Г. Пузаренко [4], А. С. Морозова [10], В. Г. Пузаренко [14, 15].

Σ-определимость алгебраических структур на допустимых множествах впервые была введена в работах Ю. Л. Ершова [2] и [23]. С. С. Гончаров, В. Харизанов, Дж. Найт, Ч. Мак-Кой, Р. Миллер и Р. Соломон [26] ввели кодирование семейств подмножеств натуральных чисел в алгебраические структуры с сохранением их алгебраических свойств. В. Г. Пузаренко [16] были изучены свойства скачка относительно Σ-сводимости, который впервые был введён в рассмотрение им же в работе [14]. В совместной работе И. Ш. Калимуллина и В. Г. Пузаренко [5] введено понятие Σ-сводимости семейств подмножеств натуральных чисел, которое соответствует Σ-определимости наследственно конечных надстроек соответствующих этим семействам структур, а именно,

Определение 1.2.4. Семейство $\mathcal{S}_0 \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ Σ-*сводится* к семейству $\mathcal{S}_1 \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ (обозначается как $\mathcal{S}_0 \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}_1$), если существуют такие оператор перечисления Φ и элементы $Y_1, \ldots, Y_m \in \mathcal{S}_1$, что

$$\mathcal{S}_0 \cup \{\emptyset\} = \{\Phi(\{\langle n, k\rangle\} \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \oplus Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m \oplus E(\mathcal{S}_1)) \mid$$

$$n, k \in \mathbb{N} \,\&\, X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{S}_1\},$$

где

$$E(\mathcal{S}_1) = \{2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_t} \mid t \in \mathbb{N} \,\&\, x_1 < x_2 < \cdots < x_t \,\&$$

$$\& \ (\exists X \in \mathcal{S}_1)(\{x_1, x_2, \ldots, x_t\} \subseteq X)\}.$$

Помимо этого, во втором параграфе приводятся полученные в работе [5] основные критерии, связывающие между собой Σ-сводимость и Σ-определимость алгебраических структур.

Во **второй главе** исследуются основные свойства предельно монотонной сводимости между множествами, между парами множеств, а также между последовательностями, состоящими из бесконечных множеств, посредством Σ-сводимости алгебраических структур и семейств начальных сегментов натуральных чисел. Главными объектами исследований **первого параграфа** являются понятия предельно монотонной функции, предельно монотонного множества и предельно монотонного оператора. Кроме того, здесь вводится понятие предельно монотонной сводимости множеств, а именно,

Определение 2.1.1. Функция $\overline{\theta} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *предельно монотонной*, если существует такая частично вычислимая функция $\theta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для всех x и s выполняются соотношения:

(i) $\forall t \geqslant s\, [\theta(x,s)\downarrow \,\&\, \theta(x,t)\downarrow \Rightarrow \theta(x,s) \leqslant \theta(x,t)]$;

(ii) $\overline{\theta}(x) = \max\limits_{t} \theta(x,t) < \infty$ (считаем $\max\emptyset = 0$).

Определение 2.1.2. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется *предельно монотонным*, если $A = \emptyset$ или $A = \operatorname{rng} \overline{\theta}$ для некоторой предельно монотонной функции $\overline{\theta}$.

Определение 2.1.3. Отображение $\Theta : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ называется *предельно монотонным оператором*, если существует частично вычислимая функция $\theta : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая для всех $\rho \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ и $s \in \mathbb{N}$ условиям:

(i) $\forall \tau \succcurlyeq \rho\, \forall t \geqslant s\, [\theta(\rho,s)\downarrow \,\&\, \theta(\tau,t)\downarrow \Rightarrow \theta(\rho,s) \leqslant \theta(\tau,t)]$;

(ii) $\overline{\theta}(\rho) = \max\limits_{t} \theta(\rho,t) < \infty$;

(iii) $\forall X \subseteq \mathbb{N}\, [\Theta\langle X\rangle = \{\overline{\theta}(\rho) \mid \rho \in X^{<\mathbb{N}}\}]$.

Определение 2.1.4. Множество A *предельно монотонно сводится* (или *lm-сводится*) к множеству B (записывается как $A \leqslant_{lm} B$), если $A = \emptyset$ или $A = \Theta\langle B\rangle$ для некоторого предельно монотонного оператора Θ.

Далее устанавливается, что предельно монотонная сводимость множеств на самом деле эквивалентна Σ-сводимости между семействами следующего вида

$$\mathcal{S}(A) = \{\mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A\} \text{ и } \mathcal{S}(B) = \{\mathbb{N} \upharpoonright b : b \in B\},$$

где $A, B \subseteq \mathbb{N}$.

Теорема 2.1.5. $A \leqslant_{lm} B$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B)$.

Второй параграф второй главы посвящен изучению предельно монотонной сводимости $(A, B) \leqslant_{lm} (C, D)$ между парами множеств (A, B) и (C, D), обобщающей понятие предельно монотонной сводимости между множествами. Устанавливается связь между данной сводимостью для пар множеств и Σ-сводимостью между семействами вида

$$\mathcal{S}(A, B) = \{\{0\} \oplus \mathbb{N} \restriction a : a \in A\} \oplus \{\{1\} \oplus \mathbb{N} \restriction b : b \in B\}.$$

Основным результатом второго параграфа является следующее

Следствие 2.2.7. $(A, B) \leqslant_{lm} (C, D)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}(A, B) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$.

В **третьем параграфе** понятие предельно монотонной сводимости между множествами переносится на случай последовательностей $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, состоящих из бесконечных множеств. Здесь доказывается аналогичный результат об эквивалентности между предельно монотонной сводимостью последовательностей и Σ-сводимостью семейств вида

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{\{n\} \oplus \mathbb{N} \restriction a : a \in A_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 2.3.6. Пусть $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательности, состоящие из бесконечных множеств. Тогда $\mathcal{A} \leqslant_{lm} \mathcal{B}$, если и только если $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(\mathcal{B})$.

Таким образом, получен исчерпывающий ответ на проблему 2.

В **четвертом параграфе второй главы** предельно монотонная сводимость множеств исследована на языке Σ-определимости абелевых групп специального вида. Справедлива следующая

Теорема 2.4.3. Пусть даны произвольные множества $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Пусть $G(A) = \bigoplus\limits_{n \in A} \left(\bigoplus\limits_{m \in \mathbb{N}} Z_{p^n} \right)$ и $G(B) = \bigoplus\limits_{k \in B} \left(\bigoplus\limits_{m \in \mathbb{N}} Z_{p^k} \right)$ – абелевы группы специального вида для множеств A и B. Тогда $A \leqslant_{lm} B$, если и только если группа $G(A)$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(G(B))$.

В **заключительном параграфе второй главы** получены ответы на вопросы существования максимальных и минимальных элементов относительно предельно монотонной сводимости. Следующая теорема устанавливает существование максимальной пары Δ_2^0-множеств относительно lm-сводимости.

Теорема 2.5.1. Существуют такие Δ_2^0-множества A_0 и A_1, что для каждого множества $C \subseteq \mathbb{N}$ либо $A_0 \nleqslant_{lm} C$, либо $A_1 \nleqslant_{lm} C$.

Следующее предложение, несмотря на утверждение теоремы 2.5.1, показывает, что не существует максимального множества относительно предельно монотонной сводимости. Аналогичное утверждение на случай Σ_2^0-множеств будет доказано в четвёртом параграфе третьей главы настоящей работы.

Предложение 2.5.4. Для каждого множества C существует такое множество D, что $C \leqslant_{lm} D$ и $D \nleqslant_{lm} C$.

Третья глава посвящена исследованиям свойств предельно монотонной сводимости множеств, которые принадлежат классу Σ_2^0 арифметической иерархии. В частности, в **первом параграфе третьей главы** вводится понятие предельно монотонной степени и, используя свойства спектра предельной монотонности Σ_2^0-множеств, доказывается отсутствие наибольшего Σ_2^0-множества относительно lm-сводимости.

Теорема 3.1.11. Не существует наибольшего Σ_2^0-множества относительно предельно монотонной сводимости.

Во **втором параграфе** изучается проблема существования несравнимых между собой Σ^0_2-множеств относительно lm-сводимости. Отправной точкой исследования данного параграфа послужил следующий результат из работы [32].

Теорема 3.2.1. (Б. Хусаинов, А. Ниис, Р. Шор [32]). Существует Δ^0_2-множество A, которое не является областью значения никакой предельно монотонной функции.

Следующая теорема даёт положительный ответ на решение проблемы существования несравнимых между собой Σ^0_2-множеств относительно предельно монотонной сводимости.

Теорема 3.2.2. Существуют такие Σ^0_2-множества A и B, что $A \nleqslant_{lm} B$ и $B \nleqslant_{lm} A$.

В **третьем параграфе третьей главы**, в дополнение к результату предыдущего параграфа, устанавливается существование бесконечной равномерной последовательности несравнимых между собой Σ^0_2-множеств относительно lm-сводимости. Кроме того, в данном параграфе получен ряд результатов, дающих положительный ответ на проблему 3, а именно, установлена вложимость любого счётного частичного порядка в предельно монотонные степени. Для доказательства последнего результата нам потребуется следующее

Предложение 3.3.1. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$ является бесконечным Σ^0_2-множеством и пусть $B \subseteq \mathbb{N}$ – бесконечное множество, содержащееся в A. Тогда $A \leqslant_{lm} B$.

Теорема 3.3.2. Существует такая равномерная последовательность бесконечных Σ^0_2-множеств $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что $A_i \nleqslant_{lm} \bigcap\limits_{j \neq i} A_j$, причём $\bigcap\limits_{j \in \mathbb{N}} A_j$ бесконечно и $\bigcap\limits_{j \neq i} A_j \in \Sigma^0_2$.

Следствие 3.3.9. Каждый счётный частичный порядок вкладывается в класс предельно монотонных степеней.

В **заключительном параграфе третьей главы** приводятся несколько важных результатов, касающихся вопросов предельно монотонной сводимости между Σ^0_2- и Δ^0_2-множествами.

Следующее вспомогательное утверждение будет использовано при доказательстве теоремы 3.4.2.

Предложение 3.4.1. Пусть дано низкое множество A и бесконечное множество $S \in \Sigma^0_2$. Тогда существует Δ^0_2-подмножество $T \subseteq S$, которое не предельно монотонно относительно A.

В следующей теореме доказывается отсутствие максимального Σ^0_2-множества относительно lm-сводимости.

Теорема 3.4.2. Для каждого Σ^0_2-множества S существует такое Δ^0_2-множество T, что $S \leqslant_{lm} T$ и $T \nleqslant_{lm} S$.

Основным результатом четвертого параграфа третьей главы является следующая теорема, устанавливающая отсутствие наименьшего не предельно монотонного Σ^0_2-множества относительно lm-сводимости. Данная теорема доказана с использованием метода приоритета с бесконечными нарушениями на деревьях.

Теорема 3.4.3. Пусть C – не предельно монотонное Σ^0_2-множество. Тогда существует такое Σ^0_2-множество A, что A не предельно монотонно и $C \nleqslant_{lm} A$.

В **заключении** диссертационной работы изложены итоги выполненного исследования, а также некоторые перспективы для дальнейшей разработки темы. Изложение работы заканчивается списком литературы.

Автор выражает огромную благодарность и глубокую признательность своему научному руководителю профессору кафедры алгебры и математической логики КФУ Искандеру Шагитовичу Калимуллину за постановку задач, поддержку в работе и интерес к исследованиям автора; заведующему кафедрой алгебры и математической логики КФУ профессору Марату Мирзаевичу Арсланову за ценные советы и научные рекомендации, а также за поддержку на всем протяжении исследовательской работы; доценту кафедры алгебры и математической логики КФУ Марату Хайдаровичу Файзрахманову за внимание к исследованиям автора, активное и плодотворное обсуждение.

Литература

[1] Арсланов, М. М. *Рекурсивно перечислимые множества и степени неразрешимости* [Текст] / М. М. Арсланов // Казань: издательство КГУ. – 1986. – 206 с.

[2] Ершов, Ю. Л. *Определимость и вычислимость* [Текст] / Ю. Л. Ершов // 2-е изд., испр. и доп. – М.: Экономика; Новосибирск: Научная книга. – 2000. – 318 с.

[3] Зубков, М. В. *Сильно η-представимые степени и предельно монотонные функции* [Текст] / М. В. Зубков // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, № 4. – С. 504–520.

[4] Калимуллин, И. Ш. *О принципах вычислимости на допустимых множествах* [Текст] / И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко // Математические труды. – 2004. – Т. 7, № 2. – С. 35–71.

[5] Калимуллин, И. Ш. *О сводимости на семействах* [Текст] / И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, № 1. – С. 31–53.

[6] Калимуллин, И. Ш. *Алгоритмические сводимости счётных алгебраических систем* [Текст] : дис. ... д.ф.-м.н. : 01.01.06 / Калимуллин Искандер Шагитович // Казан. гос. ун-т. – Казань. – 2009. – 220 с. – Библиогр.: с. 213–220.

[7] Калимуллин, И. Ш. *Спектры предельной монотонности Σ^0_2-множеств* [Текст] / И. Ш. Калимуллин, М. Х. Файзрахманов // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 2. – С. 107–116.

[8] Мальцев, А. И. *Конструктивные алгебры. I* [Текст] / А. И. Мальцев // Успехи математических наук. – 1961. – Т. 16, № 3(99). – С. 3–60.

[9] Мальцев, А. И. *О рекурсивных абелевых группах* [Текст] / А. И. Мальцев // Доклады Акад. наук СССР. – 1962. – Т. 146, № 5. – С. 1009–1012.

[10] Морозов, А. С. *Об отношении Σ-сводимости между допустимыми множествами* [Текст] / А. С. Морозов // Сиб. матем. журн. – 2004. – Т. 45, № 3. – С. 634–652.

[11] Морозов, А. С. *О Σ-подмножествах натуральных чисел* [Текст] / А. С. Морозов, В. Г. Пузаренко // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 3. – С. 291–320.

[12] Морозов, А. С. *О Σ-определимости счётных структур над вещественными, комплексными числами и кватернионами* [Текст] / А. С. Морозов, М. В. Коровина // Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, № 3. – С. 335–363.

[13] Пузаренко, В. Г. *О вычислимости над моделями разрешимых теорий* [Текст] / В. Г. Пузаренко // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39, № 2. – С. 170–197.

[14] Пузаренко, В. Г. *Об одной сводимости на допустимых множествах* [Текст] / В. Г. Пузаренко // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50, № 2. – С. 415–429.

[15] Пузаренко, В. Г. *Дескриптивные свойства на допустимых множествах* [Текст] / В. Г. Пузаренко // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49, № 2. – С. 238–262.

[16] Пузаренко, В. Г. *Неподвижные точки оператора скачка* [Текст] / В. Г. Пузаренко // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, №5. – С. 615–646.

[17] Роджерс, Х. *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость* [Текст] / Х. Роджерс // Москва: Мир, 1972. – 624 с.

[18] Соар, Р. И. *Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств* [Текст] / Р. И. Соар : пер. с англ. – Казань: Казанское математическое общество, 2000. – 576 с.

[19] Шенфилд, Дж. *Степени неразрешимости* [Текст] / Дж. Шенфилд // Москва: Наука, 1977. – 192 с.

[20] Barwise, J. *Admissible Sets and Structures* [Text] / J. Barwise // Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. – 1975. – 394 p.

[21] Csima, B. *Bounding prime models* [Text] / B. Csima, D. Hirschfeldt, J. Knight, R. Soare // Journal of Symbolic Logic. – 2004. – Vol. 69, № 4. – P. 1117–1142.

[22] Downey, R. G. *Limitwise monotonic functions and their applications* [Text] / R. G. Downey, A. M. Kach, D. Turetsky // Proceedings of the 11th Asian Logic Conference. World Scientific. – 2011. – P. 59–85.

[23] Ershov, Yu. L. Σ-*Definability of algebraic structures* [Text] / Yu. L. Ershov // Handbook of Recursive Mathematics. – 1998. – Vol. 1. – P. 235–260.

[24] Faizrahmanov, M. Kh. *Limitwise monotonic sets of reals* [Text] / M. Kh. Faizrahmanov, I. Sh. Kalimullin // Mathematical Logic Quarterly. – 2015. – Vol. 61, № 3. – P. 224–229.

[25] Frolov, A. N. *Limitwise monotonic functions relative to the Kleene's Ordinal Notation System* [Text] / A. N. Frolov, M. V. Zubkov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – Vol. 35, № 4. – P. 295–301.

[26] Goncharov, S. *Enumerations in computable structure theory* [Text] / S. Goncharov, V. Harizanov, J. Knight, C. McCoy, R. Miller, R. Solomon // Annals of Pure and Applied Logic. – 2005. – Vol. 136, № 3. – C. 219–246.

[27] Kach, A. *Limitwise monotonic functions, sets, and degrees on computable domains* [Text] / A. Kach, D. Turetsky // Journal of Symbolic Logic. – 2010. – Vol. 75, № 1. – P. 131–154.

[28] Kalimullin, I. *Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures* [Text] / I. Kalimullin, B. Khoussainov, A. Melnikov // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – Vol. 141, № 9. – P. 3275–3289.

[29] Khisamiev, N. G. *Criterion for constructivizability of a direct sum of cyclic p-groups* (Russian) [Text] / N. G. Khisamiev // Izv. Akad. Nauk Kazakh, ssr Ser. Fiz.-Mat. – 1981. – № 86. – P. 51–55.

[30] Khisamiev, N. G. *The arithmetic hierarchy of abelian groups* [Text] / N. G. Khisamiev // Sibirsk. Mat. Zh. – 1988. – Vol. 29, № 6. – P. 144–159.

[31] Khisamiev, N. G. *Constructive abelian groups* [Text] / N. G. Khisamiev // Handbook of Recursive Mathematics. – 1998. – Vol. 2. – P. 1177–1231.

[32] Khoussainov, B. *Computable models of theories with few models* [Text] / B. Khoussainov, A. Nies, R. Shore // Notre Dame J. Formal Logic. – 1997. – Vol. 38, № 2. – P. 165–178.

[33] Nies, A. *Computability and Randomness* [Text] / A. Nies // New York: Oxford University Press. – 2009. – 442 p.

[34] Odifreddi, P. *Classical recursion theory* [Text] / P. Odifreddi // Amsterdam: North-Holland. – 1989. – 610 p.

Список публикаций автора по теме диссертации

[35] Зайнетдинов, Д. Х. *О предельно монотонной сводимости Σ^0_2-множеств* [Текст] / Д. Х. Зайнетдинов, И. Ш. Калимуллин // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 22–30.

[36] Faizrahmanov, M. Kh. *Maximality and Minimality under Limitwise Monotonic Reducibility* [Text] / M. Kh. Faizrahmanov, I. Sh. Kalimullin, D. Kh. Zainetdinov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – Vol. 35, № 4. – P. 333–338.

[37] Зайнетдинов, Д. Х. *Предельно монотонная сводимость на множествах и парах множеств* [Текст] / Д. Х. Зайнетдинов // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 3. – С. 97–101.

[38] Зайнетдинов, Д. Х. *Σ-сводимость и lm-сводимость множеств и последовательностей множеств* [Текст] / Д. Х. Зайнетдинов // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 51–65.

Тезисы конференций

[39] Зайнетдинов, Д. Х. *О некоторых групповых свойствах примитивно рекурсивных перестановок* [Текст] / Д. Х. Зайнетдинов, И. Ш. Калимуллин // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2013. – Т. 47. – С. 52–55.

[40] Зайнетдинов, Д. Х. *О предельно монотонной сводимости Σ^0_2-множеств* [Текст] / Д. Х. Зайнетдинов, И. Ш. Калимуллин // Материалы международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». – Казань: КФУ. – 2014. – С. 170–172.

[41] Kalimullin, I. Sh. *On limitwise monotonic reducibility of Σ^0_2-sets* [Text] /

I. Sh. Kalimullin, D. Kh. Zainetdinov // Abstract Booklet of Logic Colloquium and Logic, Algebra and Truth Degrees. – Vienna, Austria. – 2014. – P. 65–66.

[42] Зайнетдинов, Д. Х. *О некоторых свойствах предельно монотонной сводимости* Σ^0_2*-множеств* [Текст] / Д. Х. Зайнетдинов, И. Ш. Калимуллин // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2014. – Т. 50. – С. 77–79.

[43] Kalimullin, I. Sh. *On limitwise monotonic reducibility of* Σ^0_2*-sets* [Text] / I. Sh. Kalimullin, D. Kh. Zainetdinov // The Bulletin of Symbolic Logic. – 2015. – Vol. 21, No. 1. – P. 75–76.

[44] Зайнетдинов, Д. Х. *Об одной сводимости* Σ^0_2*-множеств и последовательностей из* Σ^0_2*-множеств* [Текст] / Д. Х. Зайнетдинов // Электронный сборник тезисов докладов международной конференции «Мальцевские Чтения». – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук. – 2015. – С. 63.

[45] Zainetdinov, D. Kh. *On limitwise monotonic reducibility of sets and sequences* [Text] / D. Kh. Zainetdinov // Book of abstracts Logic Colloquium 2015, Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL), University of Helsinki, 3–8 August 2015. – 2015. – P. 715–716.

[46] Зайнетдинов, Д. Х. *Предельно монотонная сводимость на множествах и парах множеств* [Текст] / Д. Х. Зайнетдинов // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2015. – Т. 52. – С. 75–77.

[47] Зайнетдинов, Д. Х. *Предельно монотонная сводимость и её свойства* [Текст] / Д. Х. Зайнетдинов // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. – Казань: Казанский университет; изд-во Академии наук РТ. – 2016. – С. 172–173.