

На правах рукописи

ШАЛАГИНОВА
НАДЕЖДА ВЛАДИМИРОВНА

**ПОЛУКОЛЬЦА НЕПРЕРЫВНЫХ
ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В
РАСШИРЕННОМ ЧИСЛОВОМ ЛУЧЕ**

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2016

Работа выполнена на кафедре фундаментальной и компьютерной математики
ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

Научный руководитель: Вечтомов Евгений Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Вятский государственный
университет», заведующий кафедрой

Официальные оппоненты: Кожухов Игорь Борисович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО Национальный исследовательский
университет «Московский институт электронной
техники»

Ильин Сергей Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО КФУ «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова»

Защита состоится 22. 12. 2016 г. в 14:30 на заседании диссертационного совета
Д 212.081.35 при Федеральном государственном автономном образовательном
учреждении высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный
университет"(ФГАОУ ВО КФУ) по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлев-
ская, д. 18., институт вычислительной математики и информационных тех-
нологий, аудитория 1011.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО
КФУ, <http://kpfu.ru>

Автореферат разослан «___» ____. 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.35
кандидат физико-математических наук



А. И. Еникеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация представляет собой исследование в области теории колец и полуколец непрерывных функций. Это раздел функциональной алгебры, являющейся частью современной математики и находящейся на стыке абстрактной алгебры, топологической алгебры, функционального анализа, общей топологии, теории пучков.

Развитие теории колец $C(X)$ всех непрерывных действительнзначных функций на топологических пространствах X началось в конце 30-х гг. прошлого века в статьях Стоуна¹, И.М. Гельфанда и А.Н. Колмогорова², далее свой вклад внесли Э. Хьюитт³, И. Капланский⁴, Л. Гиллман, М. Хенриксон^{5, 6} и др. Благодаря монографии Л. Гиллмана и М. Джерисона⁷ 1960 г. теория колец $C(X)$ получила мощный импульс развития, в результате чего кольца $C(X)$ стали классическим объектом функциональной алгебры. Теории колец непрерывных функций посвящены обзорные статьи^{8, 9, 10, 11} и книги Е.М. Вечтомова^{12, 13}. Кольца классов непрерывных функций со значениями в расширенной числовой прямой рассматривались в работах Д. Ипате^{14, 15, 16}.

¹Stone M. Applications of the theory of boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. Т. 41. № 3. P. 375–481.

²Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Доклады АН СССР. 1939. Т. 22. № 1. С. 11–15.

³Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Т. 64. № 1. P. 45–99.

⁴Kaplansky I. Topological rings // Amer. J. Math. 1947. V. 69. P. 153–183.

⁵Gillman L., Henriksen M. Concerning rings of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. № 2. P. 340–362.

⁶Gillman L., Henriksen M. Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 82. № 2. P. 366–391.

⁷Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. Van Nostrand, New York, 1960. (2-ое изд.: Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. N.J.: Springer-Verlag, 1976. 300 p.)

⁸Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНТИ, 1990. Т. 28. С. 3–46.

⁹Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 29. С. 119–191.

¹⁰Vechtomov E. M. Rings and sheaves // J. Math. Sciences (New York). 1995. V. 74. № 1. P. 749–798.

¹¹Vechtomov E. M. Rings of continuous functions with values in topological division ring // J. Math. Sciences (New York). 1996. V. 78. № 6. P. 702–753.

¹²Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы. М.: МПГУ, 1992. 121 с.

¹³Вечтомов Е. М. Функциональные представления колец. М.: МПГУ, 1993. 191 с.

¹⁴Ipate D. M. On the ring of the continuous functions in the extended straight line // Izvestia AN SSR Moldova. Matematica. 1990. № 3(3). P. 3–7.

¹⁵Ipate D. M. Some properties of a ring of continuous functions in the extended straight line // Topological algebra: theses of communications of the republican school. Kishinev, 1998. P. 30–31.

¹⁶Ipate D., Lupu R. About rings of continuous functions in the expanded field of numbers // Buletinul

Теория полуколец непрерывных функций — сравнительно новое направление функциональной алгебры, активно развивающееся с 90-х гг. прошлого века. Впервые полукольца $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных действительных функций упоминаются в качестве примера в работе ¹⁷ 1955 г. Полукольцам $C^+(X)$ посвящены отдельные работы ^{18,19}. Регулярное изучение полуколец $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных функций начинается в 1998 г. со статьи В.И. Варанкиной, Е.М. Вечтомова, И.А. Семеновы ²⁰. Первый этап изучения полуколец непрерывных функций подытожен в монографии ²¹ 2011 года. В этом направлении защищено несколько кандидатских диссертаций ^{22, 23, 24, 25, 26, 27, 28}.

Определение полукольца (в широком смысле) дано Вандивером ²⁹ в 1934 г. *Полукольцом* он назвал совокупность элементов, по сложению и умножению образующих полугруппы, с правым и левым дистрибутивными законами умножения относительно сложения. В настоящее время чаще используется определение полукольца (в узком смысле), которое принадлежит Голану ³⁰: под *полукольцом* S подразумевается непустое множество S с двумя бинарными

academiei de stiinte a republicii Moldova. Matematica. 2010. № 1 (62). P. 47-54.

¹⁷Slowikowski W., Zawadowski A. A generalization of maximal ideals method of Stone and Gelfand // Fund. Math. 1955. T. 42. № 2. P. 215–231.

¹⁸Acharyya S.K., Chattopalhyay K.S., Ray G.G. Hemirings, congruences and the Stone-Čech compactification // Simon Stevin. 1993. T. 67. P. 21–35.

¹⁹Acharyya S.K., Chattopalhyay K.S., Ray G.G. Hemirings, congruences and the Hewitt realcompactification // Bull. Belg. Math. Soc. 1995. T. 2. № 1. P. 47–58.

²⁰Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. №2. С. 493–510.

²¹Вечтомов Е. М., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. Полукольца непрерывных функций. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. 312 с.

²²Варанкина В. И. Максимальные идеалы и делимость в полукольцах непрерывных функций: дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 1996. 91 с.

²³Семенова И. А. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций: дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 1998. 78 с.

²⁴Подлевских М. Н. Полукольца непрерывных функций с топологией поточечной сходимости: дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 1999. 88 с.

²⁵Широков Д. В. Идеалы в полукольцах непрерывных функций: дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 2005. 83 с.

²⁶Чупраков Д. В. Конгруэнции на полукольцах и полуполях непрерывных числовых функций: дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 2010. 106 с.

²⁷Сидоров В. В. Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций: дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 2011. 136 с.

²⁸Лубягина Е. Н. Полукольца непрерывных $[0, 1]$ -значных функций: дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 2012. 105 с.

²⁹Vandiver H. S. Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold // Bull. Amer. Math. Soc. 1954. V. 40. № 12. P. 914–920.

³⁰Golan J. S. Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 381 p.

ми операциями сложения $+$ и умножения \cdot , где $\langle S, +, 0 \rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S, \cdot, 1 \rangle$ — моноид, выполняются законы дистрибутивности операции умножения \cdot относительно сложения $+$ и тождественно $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$. В последнем определении заложено существование нуля 0 , как нейтрального элемента по сложению и поглощающего по умножению. В полукольцах, рассматриваемых в диссертации, существование нуля не требуется, поэтому за основу взято определение Вандивера. Если в «полукольце» S не всюду определена хотя бы одна операция, то S будем называть *частичным полукольцом*.

Пусть X — топологическое пространство и S — топологическое полукольцо. Через $C(X, S)$ обозначается полукольцо всех непрерывных S -значных функций, определенных на X , с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций.

В качестве S рассматривались следующие числовые полукольца с обычной (интервальной) топологией: поле \mathbb{R} всех действительных чисел, полуполе с нулем \mathbb{R}^+ неотрицательных действительных чисел, полуполе \mathbb{P} положительных действительных чисел — с операциями сложения и умножения чисел, полукольцо $[0, 1]$ с обычным умножением и сложением \max . Соответственно, ранее исследовались кольца $C(X) = C(X, \mathbb{R})$, полукольца $C^+(X) = C(X, \mathbb{R}^+)$ и $C(X, [0, 1])$ и полуполя $U(X) = C(X, \mathbb{P})$.

В диссертации полукольцами значений S выступают полукольца $\mathbb{P} \cup \{\infty\} = (0, \infty]$ и $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} = [0, \infty]$ с обычными операциями сложения и умножения чисел и интервальной топологией, при этом в $(0, \infty]$ элемент ∞ играет роль поглощающего, а в $[0, \infty]$ элемент ∞ остается поглощающим для ненулевых элементов, а 0 является поглощающим по умножению и нейтральным по сложению. Полукольцо $(0, \infty]$ является топологическим, то есть полукольцевые операции в нем непрерывны. В полукольце $[0, \infty]$ операция умножения теряет свойство непрерывности в случае умножения 0 и ∞ , поэтому полукольцо $[0, \infty]$ будет топологизированным, но не топологическим.

Объектом исследования диссертации является теория полуколец непрерывных функций.

Предметом исследования служат полукольца $C^\infty(X) = C(X, (0, \infty])$ и частичные полукольца $C_\infty^+(X) = C(X, [0, \infty])$ непрерывных функций на произвольных топологических пространствах X со значениями в топологи-

ческом полукольце $(0, \infty]$ и в топологизированном полукольце $[0, \infty]$, соответственно, с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций.

Цель и задачи работы. Цель диссертации состоит в исследовании алгебраических свойств полуколец $C^\infty(X)$ и частичных полуколец $C_\infty^+(X)$.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Построение пучков полуколец $C^+(X)$ и $C^\infty(X)$ по аналогии с кольцами $C(X)$.
2. Изучение свойств делимости, идеалов и конгруэнций полуколец $C^\infty(X)$.
3. Установление двойственности категорий хьюиттовских пространств X и соответствующих полуколец $C^\infty(X)$.
4. Описание максимальных идеалов и базовых свойств простых идеалов в частичных полукольцах $C_\infty^+(X)$.
5. Доказательство определяемости хьюиттовских пространств X частичными полукольцами $C_\infty^+(X)$.
6. Характеризация P -пространств и F -пространств в терминах полуколец $C^\infty(X)$ и частичных полуколец $C_\infty^+(X)$.

Методы исследования. В диссертации применяются методы и результаты теории колец и полуколец непрерывных функций, теории решеток, универсальной алгебры, общей топологии и теории пучков. Методы, применяемые для изучения частичных полуколец $C_\infty^+(X)$, отличаются от методов исследования полуколец $C^\infty(X)$ и $C^+(X)$. Отсутствие нуля в полукольце $C^\infty(X)$ и частичность полукольца $C_\infty^+(X)$ усложняет их исследование.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер и может послужить основой для дальнейших исследований в теории полуколец непрерывных функций. Результаты работы могут быть использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов для магистрантов и аспирантов и в научно-исследовательской работе студентов.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Личный вклад автора. Диссертационная работа отражает личный вклад автора в проведенном исследовании. Научным руководителем д. ф. м. н., профессором Е. М. Вечтомовым была определена область исследований, поставлены задачи исследования, осуществлялось общее руководство,

оказывалась методическая помощь, проводилось обсуждение полученных результатов и методов их решения.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных конференциях Вятского государственного гуманитарного университета в 2010–2015 гг., регулярно на научном алгебраическом семинаре г. Кирова (руководители семинара доктора физ.-мат. наук профессора Е. М. Вечтомов и В. В. Чермных), апробированы на Международных алгебраических и математических конференциях в Вологде (2013 г.), Екатеринбурге (2014 г.), Туле (2014, 2015 гг.), на Всероссийских и Международных математических конференциях в Казани (2010, 2015, 2016 гг.) и Перми (2010, 2013, 2015, 2016 гг.), на семинаре кафедры алгебры и математической логики КФУ в феврале 2016 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ, из них 8 статей и 6 тезисов докладов, список публикаций приведен в конце автореферата. Две работы опубликованы в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация включает в себя оглавление, введение, три главы, разбитые на 11 параграфов, список литературы и предметный указатель. Полный объем диссертации составляет 95 страниц. Список литературы включает 77 наименований.

Содержание работы

Во введении дается обзор результатов исследований полуколец непрерывных функций и кратко формулируются основные результаты диссертации.

В главе 1 приводятся основные понятия и утверждения теории полуколец непрерывных функций, необходимые для дальнейшего изложения, а также строятся пучки полуколец, связанные с полукольцами $C^+(X)$.

Под *полукольцом* понимается алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с бинарными операциями сложения $+$ и умножения \cdot , удовлетворяющими следующим аксиомам ($\forall x, y, z \in S$):

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;

$$3. \quad x(yz) = (xy)z;$$

$$4. \quad x(y+z) = xy + xz, \quad (x+y)z = xz + yz,$$

то есть $\langle S, + \rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа, умножение \cdot дистрибутивно относительно сложения $+$ с обеих сторон.

Исследуются пучки θ_X и ε_X полуколец $C^+(X)$ по открытым семействам конгруэнций и пучок ϕ_X , как предпучок полуколец $C^+(A)$ по всем открытым подмножествам A в X с гомоморфизмами ограничения. На тихоновском пространствах X все три пучка совпадают, при этом слоями данных пучков являются полукольца $C^+(X)_x$ ростков непрерывных функций.

Для пучков над топологическими пространствами X и Y выясняется условие изоморфизма полуколец ростков $C^+(X)_x$ и $C^+(Y)_y$ при $x \in X, y \in Y$.

Непрерывное отображение $\varphi: Y \rightarrow X$ порождает гомоморфизм $\varphi^*: C^+(X)_{\varphi(y)} \rightarrow C^+(Y)_y$ полуколец для произвольной фиксированной точки $y \in Y$.

Предложение 1.3.8. *Пусть X и Y — локально компактные хаусдорфовы пространства с первой аксиомой счетности, $y \in Y$, отображение $\varphi: Y \rightarrow X$ непрерывно и $\varphi^*: C^+(X)_{\varphi(y)} \rightarrow C^+(Y)_y$ — порожденный φ гомоморфизм полуколец. Тогда φ^* является изоморфизмом в том и только в том случае, когда φ будет осуществлять гомеоморфизм некоторой окрестности точки y на окрестность точки $\varphi(y)$.*

Глава 2 посвящена полукольцам $C^\infty(X)$ непрерывных функций над топологическими пространствами X со значениями в полукольце $(0, \infty]$. Для функции $f \in C^\infty(X)$ введены множество $H(f) = f^{-1}(\infty)$ и соответствующая функция $f^* \in C^+(X)$:

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)}, & \text{если } x \in \text{coz } f = X \setminus H(f), \\ 0, & \text{если } x \in H(f). \end{cases}$$

В параграфе 2.1 рассматриваются свойства делимости, вводятся понятия H -идеала и H -конгруэнции.

Отображение $*$: $C^\infty(X) \rightarrow C^+(X)$, заданное по правилу $f \mapsto f^*$ для всех $f \in C^\infty(X)$, обладает свойствами: для любых $f, g \in C^\infty(X)$:

$$(fg)^* = f^*g^* \text{ и } f \leq g \Leftrightarrow g^* \leq f^*,$$

то есть осуществляет изоморфизм мультипликативной полугруппы полукольца $C^\infty(X)$ на мультипликативную полугруппу полукольца $C^+(X)$. Благодаря этому, полукольца $C^\infty(X)$ и $C^+(X)$ обладают одинаковыми мультипликативными свойствами.

Делимость в полукольцах $C^\infty(X)$ имеет свою специфику по сравнению с кольцами $C(X)$ и полукольцами $C^+(X)$, например, для любых функций $f \in C^\infty(X)$, $u, v \in U(X)$ их линейная комбинация $uf + v$ ассоциирована с f , что не верно для $C(X)$ и $C^+(X)$.

Полукольцо $C^\infty(X)$ содержит полуполе $U(X)$ числовых функций. Множество $M(X) = C^\infty(X) \setminus U(X)$ является единственным максимальным (наибольшим собственным) идеалом в $C^\infty(X)$ и содержит все необратимые функции полукольца, то есть полукольцо $C^\infty(X)$ локально. Сам идеал $M(X)$ можно рассматривать как полукольцо, причем любой собственный идеал полукольца $C^\infty(X)$ является идеалом в $M(X)$.

Тихоновское пространство X называется P' -пространством, если каждое непустое \mathbb{N} -множество $\mathbb{N}(f)$ на X имеет непустую внутренность^{31, 32}.

Предложение 2.1.2. *Тихоновское пространство X будет P' -пространством тогда и только тогда, когда все идеалы полукольца $M(X)$ являются идеалами полукольца $C^\infty(X)$.*

Идеал I в $C^\infty(X)$ называется \mathbb{N} -идеалом, если равенство $\mathbb{N}(f) = \mathbb{N}(g)$ влечет $g \in I$ для любых $f \in I$ и $g \in C^\infty(X)$.

Предложение 2.1.3. *Решетка \mathbb{N} -идеалов полукольца $C^\infty(X)$ является ретрактом решетки $\text{Id } C^\infty(X)$.*

Каждому простому \mathbb{N} -идеалу I полукольца $C^\infty(X)$ соответствует двухклассовая конгруэнция ρ_I , классами которой служат I и $C^\infty(X) \setminus I$.

На полукольце $C^\infty(X)$ определена конгруэнция $\sim_{\mathbb{N}}$: для любых $f, g \in C^\infty(X)$

$$f \sim_{\mathbb{N}} g \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbb{N}(f) = \mathbb{N}(g).$$

Произвольную конгруэнцию на полукольце $C^\infty(X)$, содержащая конгруэнцию $\sim_{\mathbb{N}}$, назовем \mathbb{N} -конгруэнцией.

³¹Векслер А. И. P' -пространства // Известия вузов. Математика. 1978. № 5. С. 9–18.

³²Вечтомов Е. М. О P' -пространствах // Материалы V науч. конф. молодых ученых мех.-мат. фак. и НИИ механики Горьковского гос. ун-та. Ч. II. 1980. С. 51–56. Деп. ВИНТИ № 1836-81. Деп.

Предложение 2.1.4. Произвольная \mathbb{H} -конгруэнция ρ на полукольце $C^\infty(X)$ максимальна тогда и только тогда, когда $\rho = \rho_I$ для некоторого простого \mathbb{H} -идеала I в $C^\infty(X)$.

Теорема 2.1.1. Решетка $\text{Con } C^\infty(X)$ конгруэнций на полукольце $C^\infty(X)$ над тихоновским пространством X не модулярна при $|X| \geq 2$.

Центральным результатом параграфа 2.2 служит установление двойственности для категории полуколец $C^\infty(X)$.

Каждое непрерывное отображение $\varphi: Y \rightarrow X$ топологических пространств X и Y индуцирует гомоморфизм $\bar{\varphi}: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(Y)$ полуколец, сопоставляющий любой функции $f \in C^\infty(X)$ функцию $f \circ \varphi \in C^\infty(Y)$.

Гомоморфизм $\alpha: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(Y)$ полуколец называется *сурс-гомоморфизмом*, если $\alpha(1) = 1$ и α сохраняет существующие точные верхние грани любых счетных семейств $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ функций $f_n \in C^\infty(X)$, то есть $\alpha(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha(f_n)$.

Если сурс-гомоморфизмы использовать в качестве морфизмов категории всех полуколец $C^\infty(X)$, то имеет место *двойственность* данной категории и категории всех хьюиттовских пространств с их непрерывными отображениями:

Теорема 2.2.1. Категория всех полуколец $C^\infty(X)$ с сурс-гомоморфизмами в качестве морфизмов антиэквивалентна категории всех хьюиттовских пространств X и их непрерывных отображений.

Вопрос определяемости компактов X кольцами $C(X)$ поставлен и решен в статье ³³. Гомеоморфизм топологических пространств влечет изоморфизм соответствующих алгебраических систем над ними. Если изоморфизм однотипных алгебраических систем над топологическими пространствами из некоторого класса пространств влечет гомеоморфизм самих пространств, то говорят об *определяемости* топологического пространства из данного класса соответствующим алгебраическим объектом ³⁴. Следующая теорема продолжает исследование в этом направлении.

Теорема 2.2.2. Для любых хьюиттовских пространств X и Y всякий изоморфизм полуколец $C^\infty(X)$ и $C^\infty(Y)$ индуцируется гомеоморфизмом Y

³³Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Доклады АН СССР. 1939. Т. 22. № 1. С. 11–15.

³⁴Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНТИ, 1990. Т. 28. С. 3–46.

и X .

Имеет место следующая теорема определяемости полуколец $C^\infty(X)$ ассоциированными с ними алгебраическими системами:

Теорема 2.2.4. *Для любых топологических пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения:*

1. *полукольца $C^\infty(X)$ и $C^\infty(Y)$ изоморфны;*
2. *мультипликативные полугруппы $C^\infty(X)$ и $C^\infty(Y)$ изоморфны;*
3. *решетки $\text{Id } C^\infty(X)$ и $\text{Id } C^\infty(Y)$ изоморфны;*
4. *предупорядоченные множества $\langle C^\infty(X), |\rangle$ и $\langle C^\infty(Y), |\rangle$ изоморфны;*
5. *решетки $\langle C^\infty(X), \leq \rangle$ и $\langle C^\infty(Y), \leq \rangle$ изоморфны.*

Таким образом, получен еще один новый результат в изучении определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций над ними: каждое хьюиттовское пространство X определяется, однозначно с точностью до гомеоморфизма, своим полукольцом $C^\infty(X)$.

В теорема 2.2³⁵ показано, что для любого топологического пространства X кольцо $C(X)$ определяется (с точностью до изоморфизма) мультипликативной полугруппой полукольца $C^+(X)$, стало быть, и мультипликативной полугруппой полукольца $C^\infty(X)$. Следовательно, всякое хьюиттовское пространство X определяется мультипликативной полугруппой полукольца $C^\infty(X)$.

В параграфе 2.3 даны характеристики P -пространств и F -пространств в терминах полуколец $C^\infty(X)$.

Тихоновское пространство X называется: *F -пространством*, если любая ограниченная непрерывная \mathbb{R} -значная функция, определенная на произвольном *конуль-множестве* $\text{coz } f = X \setminus Z(f)$ в X , непрерывно продолжается на все пространство X ; *P -пространством*, если все *нуль-множества* $Z(f) = f^{-1}(0)$ функций f из $C(X)$ открыто-замкнуты.

Характеристики F -пространства и P -пространства в терминах полуколец $C^\infty(X)$ отражены в теоремах:

³⁵Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // *Фундаментальная и прикладная математика* 1998. Т. 4. № 2. С. 493-510.

Теорема 2.3.1. Для всякого тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:

1. X — F -пространство.
2. Все идеалы полукольца $C^\infty(X)$ суть биидеалы.
3. $I + J = I \cap J$ для любых идеалов I и J полукольца $C^\infty(X)$.
4. Теоретико-множественное объединение любых двух (произвольного непустого семейства) идеалов полукольца $C^\infty(X)$ является идеалом.
5. Решетка $\text{Id } C^\infty(X)$ всех идеалов полукольца $C^\infty(X)$ дистрибутивна.

Теорема 2.3.2. Для любого тихоновского пространства X равносильны следующие условия:

1. X — P -пространство;
2. для любых $f, g \in C^\infty(X)$ имеем

$$g \in fC^\infty(X) \iff \text{H}(f) \subseteq \text{H}(g);$$

3. все идеалы полукольца $C^\infty(X)$ являются H -идеалами;
4. $C^\infty(X)$ — регулярное полукольцо, то есть

$$\forall f \in C^\infty(X) \exists g \in C^\infty(X) (f = f^2g);$$

5. $I \cdot J = I \cap J$ для любых идеалов I, J полукольца $C^\infty(X)$.

На полукольце $C^\infty(X)$ над P -пространством X максимальные конгруэнции являются двухклассовыми H -конгруэнциями, любая собственная конгруэнция содержится в некоторой максимальной конгруэнции и всякая H -конгруэнция есть пересечение максимальных конгруэнций.

Параграф 2.4 посвящен изучению свойств полукольца $C^\infty(X)$ над дискретным n -элементным пространством X . В этом случае $C^\infty(X) \cong (0, \infty]^n$. Пусть $\mathbf{D} = \{1, \infty\}$ — моно-полукольцо с единицей 1 и поглощающим элементом ∞ . Существуют канонические изоморфизм между решетками идеалов $\text{Id}(0, \infty]^n$ и $\text{Id } \mathbf{D}^n$ и изоморфизм между решетками $\text{Con } \mathbf{D}^n$ всех конгруэнций

на полукольце \mathbf{D}^n и \mathbb{H} -конгруэнций на полукольце $(0, \infty]^n$. Для полуколец \mathbf{D}^2 и \mathbf{D}^3 описаны идеалы и конгруэнции, найдено число идеалов и конгруэнций данных полуколец.

Центральным результатом этого параграфа является

Теорема 2.4.1. *Решетка всех идеалов полукольца \mathbf{D}^n , $n \in \mathbb{N}$, изоморфна свободной дистрибутивной решетке $F_D(n)$ с n свободными образующими, дополненной новым наибольшим элементом e :*

$$\text{Id } \mathbf{D}^n \cong F_D(n) \cup \{e\}.$$

Предложение 2.4.1. *Число всех максимальных конгруэнций на \mathbf{D}^n равно $2^n - 1$.*

Предложение 2.4.2. *Минимальные конгруэнции на полукольце \mathbf{D}^n суть в точности конгруэнции ρ_I по двухэлементным идеалам $I = \{a, \infty\}$ и их число равно числу n коатомов a решетки \mathbf{D}^n с покоординатным порядком.*

В параграфе 2.5 рассматриваются пучки θ_X , ε_X и ϕ_X полуколец $C^\infty(X)$ по аналогии с полукольцами $C^+(X)$.

В **главе 3** начато исследование частичных полуколец $C_\infty^+(X)$ непрерывных функций на тихоновских пространствах X со значениями в расширенном числовом луче $[0, \infty]$.

Как топологическое пространство $[0, \infty] = \mathbb{R}^+ \cup \infty$ — это одноточечная компактификация Александрова пространства \mathbb{R}^+ , рассматриваемого с обычной топологией. Как алгебраический объект $[0, \infty]$ будет коммутативным полукольцом с единицей без делителей нуля, причем все $a \in (0, \infty)$ обратимы. Но алгебраическое полукольцо $[0, \infty]$ не будет топологическим, так как умножение терпит разрыв в случае $0 \cdot \infty$.

Через $C_\infty^+(X)$ обозначено множество всех непрерывных функций на произвольном топологическом пространстве X со значениями в $[0, \infty]$ с поточечными операциями сложения и умножения функций. Оно замкнуто относительно операции сложения, но не обязательно замкнуто относительно умножения, так как произведение непрерывных функций может быть разрывной функцией. Полукольцевые аксиомы выполняются в $C_\infty^+(X)$, если все участвующие в них функции непрерывны. Но, например, перестановка скобок в произведении $(x^2 x) \frac{1}{x}$ функций в полукольце $C_\infty^+([0, \infty])$ приводит к появлению разрывной функции $x \frac{1}{x} \notin C_\infty^+([0, \infty])$, то есть для тройки функций $x, x^2, \frac{1}{x}$ нельзя

использовать аксиому ассоциативности полуколец. Таким образом, система $C_\infty^+(X)$ является в общем случае, частичным полукольцом.

Идеалом частичного полукольца $C_\infty^+(X)$ называется непустое множество $I \subseteq C_\infty^+(X)$, в котором для любых $f, g \in I$ и $h \in C_\infty^+(X)$ верно $f + g, fh \in I$, причем функция fh должна быть непрерывной.

В параграфе 3.1 рассмотрены специфические свойства функций частичного полукольца $C_\infty^+(X)$.

Каждой функции $f \in C_\infty^+(X)$ сопоставляются: нуль-множество $Z(f)$, его внутренность $Z^\circ(f)$, конуль-множество $\text{coz } f = \{x \in X : f(x) \in (0, \infty)\}$ и замкнутое множество $H(f) = f^{-1}(\infty)$.

Для любой функции $f \in C_\infty^+(X)$ определяется функция

$$f^*(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x \in Z(f), \\ f(x)^{-1}, & \text{если } x \in \text{coz } f, \\ 0, & \text{если } x \in H(f). \end{cases}$$

Ясно, что $f^* \in C_\infty^+(X)$, $Z(f^*) = H(f)$ и $H(f^*) = Z(f)$. Непрерывность функции ff^* равносильна тому, что замкнутые множества $Z(f)$ и $H(f)$ открыты. Поэтому частичное полукольцо $C_\infty^+(X)$ является полукольцом тогда и только тогда, когда X будет P -пространством.

В частичном полукольце множества вида $fC_\infty^+(X)$, $f \in C_\infty^+(X)$, не обязаны быть (главными) идеалами.

Предложение 3.1.1. *Для произвольного метризуемого пространства X все множества $fC_\infty^+(X)$, $f \in C_\infty^+(X)$, будут идеалами частичного полукольца $C_\infty^+(X)$ тогда и только тогда, когда X дискретно.*

В параграфе 3.2 изучаются идеалы частичных полуколец $C_\infty^+(X)$.

Для любой точки p стоун-чеховской компактификации βX тихоновского пространства X определяются идеалы в $C_\infty^+(X)$:

$$\begin{aligned} M_p &= \{f \in C_\infty^+(X) | p \in \overline{Z(f)}^{\beta X}\}, \\ M_{p,\infty} &= \{f \in C_\infty^+(X) | p \in \overline{Z(f) \cup H(f)}^{\beta X}\}, \\ O_p &= \{f \in C_\infty^+(X) | p \in (\overline{Z(f)}^{\beta X})^\circ\}, \\ O_{p,\infty} &= \{f \in C_\infty^+(X) | p \in (\overline{Z(f)}^{\beta X})^\circ \vee p \in (\overline{H(f)}^{\beta X})^\circ\}. \end{aligned}$$

Для каждой точки $p \in \beta X$ очевидны включения $O_p \subseteq M_p \subseteq M_{p,\infty}$.

Доказаны следующие основные теоремы о частичных полукольцах $C_\infty^+(X)$.

Теорема 3.2.1. *Для любого тихоновского пространства X максимальные идеалы в частичном полукольце $C_\infty^+(X)$ суть в точности идеалы $M_{p,\infty}$, $p \in \beta X$, и каждый собственный идеал из $C_\infty^+(X)$ содержится в некотором максимальном идеале.*

Множество $\text{Max } C_\infty^+(X)$ всех максимальных идеалов частичного полукольца $C_\infty^+(X)$ с топологией Стоуна-Зарисского называется *максимальным спектром* частичного полукольца $C_\infty^+(X)$. Таким образом, получаем: $\text{Max } C_\infty^+(X) \approx \beta X$, — результат подобный классической теореме Гельфанда-Колмогорова для колец $C(X)$ на тихоновском пространстве X ³⁶.

Теорема 3.2.2. *Для произвольного тихоновского пространства X любой простой идеал P частичного полукольца $C_\infty^+(X)$ обладает следующими свойствами:*

1. P содержит идеал O_p для некоторой однозначно определенной точки $p \in \beta X$;
2. если $O_p \subseteq P$ при $p \in \beta X$, то $P \subseteq M_{p,\infty}$,
3. если $P \subseteq M_p$, $p \in \beta X$, то P — строгий идеал,
4. если $O_p \subseteq P$ для некоторой точки $p \in \beta X$ и P не содержится в M_p , то идеал P не является полустрогим и $O_{p,\infty} \subseteq P$.

Теорема 3.2.3. *Для любого тихоновского пространства X идеалы M_p , $p \in \beta X$, суть в точности максимальные среди строгих (полустрогих) простых идеалов частичного полукольца $C_\infty^+(X)$.*

В параграфе 3.3 даны применения частичных полуколец $C_\infty^+(X)$, в том числе получены характеристики F -точек и P -точек, F -пространств и P -пространств в терминах частичных полуколец $C_\infty^+(X)$.

Точка p пространства X называется: P -точкой, если для любой функции $f \in C_\infty^+(X)$ из $p \in Z(f)$ следует, что $p \in Z^\circ(f)$, равносильно, $p \in H(f)$ влечет $p \in H^\circ(f)$; F -точкой, если для любых функций $f, g \in C_\infty^+(X)$ из $p \in Z^\circ(fg)$

³⁶Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. — N.J.: Springer-Verlag, 1976. 300 p. chapter 7

следует, что $p \in Z^\circ(f)$ или $p \in Z^\circ(g)$, или эквивалентно, $p \in H^\circ(fg)$ влечет $p \in H^\circ(f)$ или $p \in H^\circ(g)$.

Предложение 3.3.2. *Для любой точки $p \in X$ эквивалентны следующие утверждения:*

1. p — P -точка;
2. $O_p = M_p$;
3. $O_{p,\infty} = M_{p,\infty}$;
4. $M_p \cup O_{p,\infty} = M_{p,\infty}$.

Предложение 3.3.3. *Для любой точки $p \in X$ равносильны следующие утверждения:*

1. p — F -точка;
2. O_p — простой идеал;
3. $O_{p,\infty}$ — простой идеал;
4. $M_p \cup O_{p,\infty}$ — простой идеал.

Доказана определяемость хьюиттовских пространств X частичными полукольцами $C_\infty^+(X)$.

Теорема 3.3.1. *Любое хьюиттовское пространство X определяется — однозначно с точностью до гомеоморфизма — частичным полукольцом $C_\infty^+(X)$.*

Из данной теоремы следует, что частичные полукольца $C_\infty^+(X)$ и $C_\infty^+(\beta X)$ изоморфны тогда и только тогда, когда пространство X псевдокомпактно.

Основные результаты диссертации

В диссертации основными можно считать следующие результаты:

- Аналогично кольцам $C(X)$ построены пучки для полуколец $C^+(X)$ и $C^\infty(X)$. Результат об изоморфизме локальных колец $C(X)_x$ на локально компактных метрических пространствах X ³⁷ обобщен на полукольца ростков $C^+(X)_x$ над локально компактными хаусдорфовыми пространствами с первой аксиомой счетности.

³⁷Goodearl K. R. Local isomorphism of algebras of continuous functions // London Math. Society. 1977. V. 16. № 2. P. 348–356.

- Изучены общие свойства идеалов и конгруэнций полуколец $C^\infty(X)$. Доказана немодулярность решетки $\text{Con } C^\infty(X)$ всех конгруэнций на полукольце $C^\infty(X)$ над неоднородным тихоновским пространством. Описаны максимальные конгруэнции среди H -конгруэнций.
- Установлена двойственность категорий хьюиттовских пространств X с непрерывными отображениями и полуколец $C^\infty(X)$ с sup -гомоморфизмами. В частности показано, что каждое хьюиттовское пространство X определяется, однозначно с точностью до гомеоморфизма, своим полукольцом $C^\infty(X)$.
- Исследованы решетки идеалов и конгруэнций полуколец $C^\infty(X)$ над дискретными конечными пространствами X .
- Выяснено строение максимальных идеалов и базовые свойства простых идеалов частичных полуколец $C_\infty^+(X)$.
- Доказана определяемость хьюиттовских пространств X частичными полукольцами $C_\infty^+(X)$.
- Получены характеристики P -пространств и F -пространств в терминах полуколец $C^\infty(X)$ и частичных полуколец $C_\infty^+(X)$.

Перспективами дальнейшего развития по теме диссертации являются следующие задачи.

- Составить компьютерную программу для нахождения числа конгруэнций на полукольцах $C^\infty(X)$ над дискретными n -элементными пространствами X ($n > 3$).
- Изучить общие свойства конгруэнций на частичных полукольцах $C_\infty^+(X)$.

Автор глубоко благодарен научному руководителю профессору Евгению Михайловичу Вечтому за постановку задач, постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Работы автора по теме диссертации

Статьи автора в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Шалагинова Н. В. О полукольцах ростков непрерывных неотрицательных функций // Научно-техн. вестн. Поволжья. 2011. № 3. С. 40–43.
2. Shalaginova N. V., Vechtomov E. M. To the Theory of Partial Semirings of Continuous $[0, \infty]$ -Valued Functions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36, no. 4. P. 341–348.

Другие публикации

3. Шалагинова Н. В. О локальном изоморфизме полуколец ростков непрерывных функций // сб. тез. Всеросс. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы механики, математики, информатики». Пермь: ПГУ, 2010. С. 259.
4. Шалагинова Н. В. О полукольцах ростков непрерывных функций // сб. тез. Всеросс. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы механики, математики, информатики». Пермь: ПГУ, 2010. С. 260.
5. Шалагинова Н. В. Три пучка для полуколец непрерывных функций // Лобачевские чтения-2010: Материалы IX Всероссийской молодежной научной школы-конференции. Казань: КФУ, 2010. Т. 40. С. 367–372.
6. Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. Об идеалах частичных полуколец непрерывных $[0, \infty]$ -значных функций // Математика в современном мире: материалы Международной научно-практической конференции, посвященная 150-летию со дня рождения российского математика Д. В. Граве. Вологда: ВГПУ, 2013. С. 12–14.
7. Шалагинова Н. В. Максимальные идеалы частичных полуколец непрерывных $[0, \infty]$ -значных функций // Современные проблемы математики и ее прикладные аспекты–2013: сборник тезисов молодежной научно-практической конференции с международным участием. Пермь: ПГНИУ, 2013. С. 178.
8. Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. О частичных полукольцах непрерывных $[0, \infty]$ -значных функций // Современные проблемы математики и ее приложений: труды 45-й Международной молодежной школы-конференции, посвященной 75-летию В. И. Бердышева. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2014. С. 16–19.

9. Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. Идеалы в частичных полукольцах непрерывных $[0, \infty]$ -значных функций // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: материалы XII Международной конференции. Тула: ТГПУ, 2014. С. 158–161.
Translation: E.M. Vechtomov, N.V. Shalaginova Ideals in partial semirings of continuous $[0, \infty]$ -valued functions // Algebra and Number Theory: Modern Problems and Application: Proceedings XII International Conference. Tula, 2014. P. 201–203.
10. Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. К теории частичных полуколец непрерывных $[0, \infty]$ -значных функций // Материалы конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» и сопутствующей молодежной летней школы «Вычислимость и вычислимые структуры». Казань: КФУ, 2014. С. 157–158.
11. Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. Простые идеалы в частичных полукольцах непрерывных $[0, \infty]$ -значных функций // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 1. С. 5–12.
12. Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. Об идеалах в полукольцах непрерывных $(0, \infty]$ -значных функций // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: материалы XIII Международной конференции. Тула: ТГПУ, 2015. С. 153–155.
13. Шалагинова Н. В., Вечтомов Е. М. Конгруэнции на полукольце $(0, \infty]^n$ // Фундаментальные и прикладные проблемы механики, математики, информатики: сб. докл. всеросс. науч.-практ. конф. с междунар. участием. Пермь: ПГНИУ, 2015. С. 35–39.
14. Шалагинова Н. В. О полукольцах непрерывных функций со значениями в $(0, \infty]$ // Лобачевские чтения-2015: Материалы XIV Всероссийской молодежной научной школы-конференции. Казань: КФУ, 2015. Т. 52. С. 170–171.

Подписано в печать 14. 10. 2016 г.

Печать цифровая.

Бумага для офисной техники.

Усл. печ. л. 1,1.

Тираж 150 экз.

Заказ №3978

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Вятский государственный университет»
610000, г. Киров, ул. Московская, 36, тел. (8332) 74-25-63, <http://vyatsu.ru>