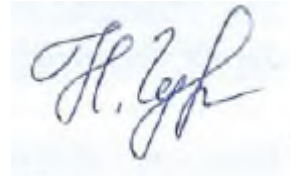


На правах рукописи



ГУРЕЕВА НАТАЛЬЯ АНАТОЛЬЕВНА

**АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ
В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ
НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО
МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Волгоград – 2016

Работа выполнена в Волгоградском государственном аграрном университете

Научный консультант: доктор технических наук, профессор
Клочков Юрий Васильевич.

Официальные оппоненты: доктор технических наук, заведующий кафедрой
"Теория сооружений и строительных конструкций" ФГБОУ ВПО «Саратовский государствен-
ный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Петров Владилен Васильевич;

доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры "Теорети-
ческая механика и сопротивление материалов", Ка-
занский национальный исследовательский техноло-
гический университет

Хайруллин Фарид Сагитович;

доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой "Теоретическая
и прикладная механика", Воронежский государ-
ственный архитектурно-строительный университет

Козлов Владимир Анатольевич.

Ведущая организация –

**ФГБОУ ВО Воронежский государственный
университет**

Защита состоится «27» октября 2016 года в 14 час. 30 мин. на заседании диссер-
тационного совета Д 212.081.11 при Казанском (Приволжском) федеральном универ-
ситете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18, ауд. мех. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачев-
ского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г.
Казань, ул. Кремлевская, д. 35 и на сайте <http://kpfu.ru>.

Отзывы по данной работе в двух экземплярах, заверенные печатью организации,
просим направлять по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, диссертацион-
ный совет Д 212.081.11.

Автореферат разослан «___» июля 2016г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кан. физ.-мат. наук,
доцент



А.А.Саченков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Важнейшей задачей многих областей современной техники является создание прочных и надежных высококачественных конструкций. Для снижения материалоемкости современных инженерных конструкций различного назначения служит широкое использование тонкостенных элементов типа пластин и оболочек. Они используются в самолетостроении, при создании подводных и космических кораблей, в покрытиях инженерных сооружений и т.п.. Их широкое распространение обуславливает необходимость развития методов практического определения напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин и оболочек.

В настоящее время создана достаточно полная теория определения напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек различной толщины.

Уравнения теории пластин и оболочек являются достаточно сложными и поэтому их аналитическое решение возможно лишь для некоторых, зачастую далеких от инженерной практики, случаев.

В решении задач строительной механики и механики деформируемого твердого тела широкое распространение получил численный метод конечных элементов (МКЭ), основанный на различных формулировках.

Большинством авторов предложены конечные элементы различных конфигураций в формулировке метода перемещений, используемые в библиотеках современных коммерческих программных комплексов (ANSYS, NASTRAN, LS-DYNA 3D, ABAQUS и др.).

Несмотря на то, что использование этих конечных элементов приводит к удовлетворительным результатам, смешанные схемы конечно-элементных решений, основанные на совокупности полей перемещений и полей напряжений, обладают преимуществами при определенных видах анализа. Гибридные методы МКЭ из-за ослабления требований гладкости перемещений $w \in C^{(1)}$ и использования нескольких полей искомых величин приводят к возможности применения простейших полиномов при аппроксимации искомых параметров через их узловые значения, в результате чего найденные перемещения и напряжения оказываются непрерывными. А в двух обширных областях, таких как исследование несжимаемых и почти несжимаемых сред, а также при анализе конструкций типа пластин и оболочек, использование смешанных конечных элементов оказывается значительно более эффективным, чем использование элементов, основанных только на перемещениях.

Кроме того, в предложенных ранее конечных элементах используется упрощающая гипотеза о деформировании нормали. Для расчета ответственных оболочечных конструкций важно учитывать возможность возникновения в материале трещин, а для этого требуется с высокой точностью рассчитать концентрацию напряжений там, где инженерам приходится устраивать местные усиления (устраивать в углах вуты или приваривать косынки, усиливать отверстия накладками, устанавливая ребра жесткости и т.п.), что становится возможным, если рассматривать оболочку как толстую без использования упрощающей гипотезы.

Поэтому анализ линейного и нелинейного деформирования тел в криволинейных координатах на основе смешанного метода конечных элементов является актуальной задачей.

Тема диссертационной работы является существенным разделом исследовательской работы «Модернизация и использование трехмерных конечных элементов в расчетах прочности инженерных конструкций агропромышленного комплекса», выполняемой коллективом авторов Волгоградского ГАУ и поддержанной грантами Волгоградской области (2009 г.) и РФФИ (2015-2016г.г.).

На Царицынской ярмарке в 2016 г. работа отмечена золотой медалью в номинации «Инновационные разработки для АПК».

Цели исследования. В криволинейной системе координат на шаге нагружения вывод соотношений теории деформируемых твердых тел в актуальном базисе и для оболочек без использования гипотезы о деформировании нормали.

Получение нелинейного смешанного функционала для реализации в конечно-элементной формулировке.

Реализация разработанных теоретических положений (без использования гипотезы о деформировании нормали) при получении матриц деформирования *объемных* конечных элементов для определения НДС конструктивных элементов инженерных сооружений (пластин и оболочек произвольной толщины и др. деформируемых твердых тел).

Решение проблемы учета смещения конечного элемента как абсолютно жесткого тела.

Для достижения этих целей были поставлены и решены следующие задачи.

1. В криволинейной системе координат на основе соотношений механики сплошной среды *получены* выражения между приращениями деформаций и приращениями перемещений на шаге нагружения.

2. В криволинейной системе координат на шаге нагружения *получены* соотношения в геометрически нелинейной постановке между приращениями напряжений и приращениями деформаций на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений напряжений компонентам девиаторов приращений деформаций для линейного материала [12], для упруго нелинейного материала [26], для упруго – пластического материала [13].

3. В криволинейной системе координат для нелинейно деформированного твердого тела *получен* смешанный функционал на основе равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил с заменой на шаге нагружения действительной работы внутренних сил разностью полной и дополнительной работ [25, 26, 32].

4. На основе полученных соотношений *разработаны* алгоритмы формирования матриц деформирования объемных конечных элементов с узловыми неизвестными в виде перемещений и напряжений на основе билинейной и трилинейной аппроксимаций искомых величин в линейной и нелинейной постановках [3, 4, 5, 6, 7, 11, 15, 18, 20, 28].

5. При шаговом нагружении в криволинейной системе координат в теории нелинейного деформирования твердого тела в актуальном базисе *использованы* приращения деформаций, представленные линейными и нелинейными составляющими, что позволило определить добавочную матрицу деформирования на рассматриваемом шаге от действия суммарных напряжений предыдущих шагов нагружения.

6. Для решения проблемы учета смещения конечных элементов как абсолютно жестких тел *предложена и разработана* инвариантная векторно - тензорная аппроксимация перемещений и напряжений как векторных и тензорных полей [10, 13, 25, 26, 32] соответственно.

7. На основе инвариантной векторно – тензорной аппроксимации искомых величин, полученных определяющих соотношений и предложенного нелинейного смешанного функционала *разработаны* алгоритмы формирования матриц деформирования объемных конечных элементов: в линейной постановке - с узловыми неизвестными в виде перемещений и напряжений; в нелинейной постановке - с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и приращений напряжений [8, 9, 14, 20, 21, 22, 27, 32].

8. На основе предложенной векторно-тензорной аппроксимации полей перемещений и напряжений разработан алгоритм получения матриц деформирования объемных конечных элементов для нелинейно упругого материала при учете геометрической нелинейности

Объект исследования. Деформирование твердых тел (пластин и оболочек произвольной толщины и др. конструктивных элементов).

Предмет исследования. НДС при линейном и нелинейном деформировании твердых тел.

Методы проведения исследования – теория механики деформируемого твердого тела, методы аппроксимации, вариационные методы, методы функционального анализа, методы векторного и тензорного анализа, методы линейной алгебры, вычислительные методы математики.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

1. Способ инвариантной аппроксимации перемещений и напряжений твердых тел в криволинейной системе координат как векторных и тензорных полей соответственно.
2. Способ получения определяющих соотношений в криволинейной системе координат при линейном и упруго нелинейном деформировании материала с учетом геометрической нелинейности.
3. Способ получения смешанного функционала в криволинейной системе координат на шаге нагружения на основе равенства возможных и действительных работ внешних и внутренних сил.
4. Алгоритм получения на основе разработанной аппроксимации и полученного смешанного функционала в линейной постановке матриц деформирования объемных конечных элементов без упрощающих гипотез о деформировании нормали.
5. Алгоритм формирования без упрощающих гипотез матриц деформирования объемных конечных элементов на основе разработанного смешанного функционала с учетом физической нелинейности при различных способах получения определяющих соотношений.
6. Алгоритм получения матриц деформирования объемных конечных элементов на основе разработанного смешанного функционала при учете геометрической нелинейности.
7. Матрицы деформирования объемных конечных элементов, полученные на основе разработанного смешанного функционала в геометрически нелинейной постановке для нелинейно упругого материала.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

1. Предложена методика построения конечно-элементных схем на основе аппроксимации перемещений и напряжений как векторных и тензорных полей для численного решения задач определения НДС.
2. Получены соотношения в криволинейной системе координат для формирования матриц деформирования объемных конечных элементов без упрощающих гипотез о деформировании нормали при учете физической нелинейности.
3. Получены основные соотношения в криволинейной системе координат для формирования матриц деформирования объемных конечных элементов в смешанной формулировке МКЭ на основе предложенной векторно-тензорной аппроксимации перемещений и напряжений для упруго деформируемых тел.
4. Получен в криволинейной системе координат смешанный функционал на основе равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения для определения НДС нелинейно деформируемых тел.
5. Получены в криволинейной системе координат зависимости между приращением напряжений и приращениями деформаций на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений напряжений компонентам девиатора приращений деформаций для нелинейно деформируемых тел с учетом физической и геометрической нелинейностей.

6. Предложены соотношения в криволинейной системе координат для получения матриц деформирования объемных конечных элементов для нелинейно упругого материала при учете геометрической нелинейности. Подтверждено свойство аддитивности ковариантных компонент тензора приращений напряжений.

Практическая ценность диссертационной работы состоит в следующем.

1. Разработанные смешанные объемные конечные элементы без использования упрощающих гипотез о деформировании нормали позволяют определять НДС твердых тел (в т.ч. пластин и оболочек переменной толщины) при различных видах нагружения (плоского, осесимметричного, произвольного) в линейной и нелинейной постановках.

2. Разработанные программные модули, реализующие предложенные алгоритмы, найдут дальнейшее применение в инженерных расчетах конструкций и сооружений, в особенности при наличии в них отверстий и угловых вырезов, где НДС является существенно объемным и гипотезы о деформировании нормали не «работают».

3. С использованием программных модулей на основе разработанных конечных элементов рассчитывались на прочность фрагменты конструкций в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Поволжский научно-исследовательский институт эколого-мелиоративных технологий» (ФГБНУ «ПНИИЭМТ») и в Открытом Акционерном Обществе «Волгограднефтемаш».

Достоверность научных положений базируется на использовании основных соотношений механики деформируемого твердого тела, теории упругости, теории пластичности, векторного анализа, тензорного анализа, вариационного исчисления, теории аппроксимации. Проверка сходимости вычислительных процессов при различных размерах сеток дискретизации рассматриваемых конструкций подтверждена многократным сравнением численных результатов исследований с результатами, полученными другими авторами, сравнением численных результатов, полученных с помощью других программных комплексов, проверкой статических условий равновесия рассматриваемых конструкций.

Апробация работы. Основные результаты исследований докладывались и обсуждались на:

- международных научно-практических конференциях «Инженерные системы» (РУДН, г. Москва) в 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2015 г.г.;

- II международной научно-практической конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела» (КГУ, г. Казань) в 2009г.;

- VII международной научно-практической конференции «Современные достижения европейской науки» (г. София, Болгария) в 2011г.;

- международной научно-практической конференции «Фундаментальные исследования» (Тель-Авив, Израиль) в 2011г.;

- Всероссийской научной конференции «Обратные краевые задачи и их приложения» (КФУ, г. Казань) в 2014г.;

- XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (КФУ, г. Казань) в 2015г.;

- Саратовском государственном техническом университете им. Гагарина Ю.А. на расширенном заседании кафедры «Теория сооружений и строительных конструкций» (г. Саратов) в 2016 г.;

- Воронежском государственном университете на расширенном заседании кафедры «Механика и компьютерное моделирование» (г. Воронеж) в 2016 г.;

- ежегодных международных научно-практических конференциях «Аграрная наука – основа успешного развития АПК» (Волгоградский ГАУ) в 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016 г.г.

Публикации. Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертационной работы, опубликованы в 34 научных статьях, из них 27 в рецензиру-

емых изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации; получены 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ, включенных в данную работу. Из совместных публикаций в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору. Список опубликованных работ приводится в конце данного реферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 382 страницах машинописного текста, содержит титульный лист, оглавление, введение, шесть глав основного текста, содержит 47 рисунков, 17 таблиц, заключение и список литературы из 412 наименований литературных источников, 11 листов приложений.

Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность разработки теоретических положений деформирования твердых тел при учете геометрической и физической нелинейностей для реализации в численных методах определения НДС на основе МКЭ. Отмечается значительный вклад, который внесли в создание и развитие теории тонких оболочек и МКЭ отечественные и зарубежные исследователи. Формулируются цели диссертационной работы, ее новизна, практическая ценность, приводится общая структура диссертации.

В первой главе представлен краткий исторический обзор использования метода конечных элементов в задачах исследования напряженно-деформированного состояния твердых тел по публикациям отечественных и зарубежных авторов, дан анализ современного состояния проблемы.

Механика твердого деформируемого тела на сегодняшний день разработана достаточно полно (Б.Д.Аннин, И.Б.Бадриев, А.О.Ватульян, К.З.Галимов, А.И.Голованов, Р.В.Гольдштейн, И.Г.Горячева, Э.И.Григолюк, Н.Г.Гурьянов, В.А.Иванов, А.А.Ильюшин, Ю.Г.Коноплев, М.С.Корнишин, В.Н.Кукуджанов, А.Г.Куликовский, Е.В.Ломакин, В.П.Матвеев, Н.Ф.Морозов, Х.М.Муштари, Р.И.Нигматулин, В.В.Новожилов, В.Н.Паймушин, В.Е.Панин, В.В.Петров, Б.Е.Победря, А.А.Роговой, А.В.Саченков, Н.А.Труфанов, К.Ф.Черных и др.). Системы дифференциальных уравнений, характеризующие напряженное состояние деформируемого тела, являются достаточно сложными и их аналитические решения возможны лишь в некоторых частных случаях. Для практических инженерных расчетов конструкций при определении НДС весьма важной и актуальной задачей является разработка приближенных и численных методов, в развитие которых внесли большой вклад Ю.П.Артюхин, В.Г.Баженов, Н.В.Валишвили, Ю.И.Виноградов, Я.М.Григоренко, А.Н.Гузь, В.Г.Зубчанинов, Р.А.Каюмов, В.А.Крысько, Е.Б.Кузнецов, Л.В.Кукса, А.М.Масленников, В.И.Мяченков, В.Н.Паймушин, В.А.Постнов, В.Г.Рекач, Л.А.Розин, Я.Г.Савула, А.А.Саченков, М.Н.Серазутдинов, И.Г.Терегулов, В.И.Феодосьев, А.Н.Фролов, Ф.С.Хайруллин, Н.Н.Шапошников, С.В.Шешенин и др. Самым распространенным среди численных методов является метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий проведение расчетов прочности конструкций при любых жесткостных свойствах материала, законах изменения внешних нагрузок и различных видах закрепления. Огромный вклад в разработку этого метода внесли отечественные и зарубежные ученые В.П.Агапов, В.Н.Бакулин, К.Бате, Д.В.Бережной, Н.Г.Бандурин, Р.Галлагер, А.И.Голованов, О.С.Зенкевич, В.А.Игнатъев, В.В.Кабанов, Ю.В.Клочков, В.А.Козлов, С.Б.Косицын, В.В.Кузнецов, А.П.Николаев, Дж.Оден, М.Н.Серазутдинов, В.Н.Скопинский, Л.У.Султанов, О.Н.Тюленева, Н.М.Якупов.

В расчетах напряженно-деформированного состояния твердых тел МКЭ используется в различных формулировках. В формулировке метода перемещений (основными неизвестными являются перемещения) разработано наибольшее количество конечных

элементов, именно эти элементы используются в известных программных продуктах. При расчетах оболочек в криволинейных системах координат имеет место проблема учета смещения конечного элемента как абсолютно жесткого тела. В некоторых работах сделаны попытки решения этой проблемы для простых частных случаев (цилиндрическая панель) путем включения дополнительных слагаемых в аппроксимирующие выражения. В сложных случаях такой подход к решению проблемы учета смещения конечного элемента как абсолютно жесткого тела оказывается неприемлемым. В других публикациях для расчета оболочек в криволинейной системе координат в двумерной постановке предлагается решение проблемы учета смещения конечного элемента как твердого тела на основе аппроксимации перемещений как векторных полей. В известных конечных элементах в формулировке метода перемещений удовлетворяется условие гладкости класса $C^{(0)}$ (класс непрерывных функций) и не удовлетворяется требование гладкости класса $C^{(1)}$ (непрерывные первые производные). Поэтому весьма предпочтительными при необходимости удовлетворения требования гладкости класса $C^{(1)}$ являются конечные элементы в смешанной формулировке МКЭ (основными неизвестными являются перемещения и напряжения). Проблема учета смещения конечного элемента как абсолютно жесткого тела в криволинейной системе координат имеет место как и при реализации метода перемещений, так и при реализации смешанного метода конечных элементов.

Анализ опубликованных работ показывает, что для определения НДС конструкций с помощью МКЭ используются разнообразные плоские и объемные конечные элементы, основанные только на использовании гипотезы о деформировании нормали при упругом состоянии материала; физически нелинейное состояние материала учитывается на основе теории малых упруго - пластических деформаций или теории течения; для учета геометрической и физической нелинейностей материала используются вариационные подходы, основанные на методе перемещений и смешанном методе. Авторы этих публикаций делают вывод, что использование смешанных конечных элементов может привести к преимуществам в сравнении с конечными элементами, базирующимися только на перемещениях.

Значительное количество элементов разработано в декартовой системе координат. При решении задач теорий упругости и пластичности возникает существенная необходимость удовлетворения граничным условиям. Для поверхностей тел, имеющих криволинейное очертание, удовлетворение граничных условий с использованием декартовых координат вызывает затруднения. Поэтому широкое распространение получили криволинейные системы координат (полярные цилиндрические координаты, эллиптические цилиндрические, сферические, тороидальные координаты).

Указанные обстоятельства обуславливают необходимость дальнейшего развития теории МКЭ в криволинейной системе координат для исследования НДС инженерных конструкций в линейной и нелинейной постановках, создания алгоритмов формирования объемных конечных элементов в смешанной формулировке с использованием криволинейной системы координат, их реализации и внедрения в практику инженерных расчетов.

Во второй главе рассматриваются вопросы определения напряженно - деформированного состояния тел в линейной и физически нелинейной постановках при упругом и упруго-пластическом состояниях материала в различных системах координат.

Физические соотношения линейной теории упругости рассматриваются в виде

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [C] \left\{ \sigma \right\}_{6 \times 1}, \quad (1)$$

где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ 2\varepsilon_{xy} \ 2\varepsilon_{xz} \ 2\varepsilon_{yz}\}$ - строка компонент тензора деформаций в декартовой системе координат; $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}\}$ - строка ковариантных компонент тензора деформаций в криволинейной системе координат; $[C]$ - матрица податливости материала; $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz}\}$ - строка компонент тензора напряжений в декартовой системе координат; $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \ \sigma^{22} \ \sigma^{33} \ \sigma^{12} \ \sigma^{13} \ \sigma^{23}\}$ - строка контравариантных компонент тензора напряжений в криволинейной системе координат.

При использовании криволинейной системы координат матрица $[C]$ получается на основе соотношений механики сплошной среды

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} g_{ik} g_{jl} \sigma^{kl} - \frac{\mu}{E} I_1(\sigma) g_{ij}, \quad (2)$$

где μ - коэффициент поперечной деформации; E - модуль упругости; $I_1(\sigma) = g_{ij} \sigma^{ij} = g^{ij} \sigma_{ij}$ - первый инвариант тензора напряжений; σ_{ij}, σ^{ij} - ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений; g_{ij}, g^{ij} - ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора.

Для учета физической нелинейности материала используются соотношения деформационной теории пластичности в виде

$$\{\varepsilon\} = [C^II] \{\sigma\}, \quad (3)$$

где $[C^II]$ - матрица упруго - пластической податливости материала.

Матрица $[C^II]$ формируется в декартовой системе координат на основе соотношений

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_c + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_c) = \frac{3}{2} \frac{1}{E_{c\delta}} \sigma_{ij} + \delta_{ij} I_1(\sigma) \left(\frac{1-2\mu}{E} - \frac{3}{2} \frac{1}{E_{c\delta}} \right), \quad (4)$$

где ε_{ij} - ковариантные компоненты тензора деформаций; δ_{ij} - символ Кронекера; ε_c - средняя нормальная деформация; ε_0 - интенсивность деформаций; σ_0 - интенсивность напряжений; σ_c - среднее нормальное напряжение; $E_{c\delta}$ - секущий модуль диаграммы деформирования.

В криволинейной системе координат для получения матрицы $[C^II]$ используются выражения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \sigma_{ij} + g_{ij} I_1(\sigma) \left(\frac{1-2\mu}{3E} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right) = \frac{3}{2} \frac{1}{E_{c\delta}} \sigma_{ij} + g_{ij} I_1(\sigma) \left(\frac{1-2\mu}{3E} - \frac{1}{2} \frac{1}{E_{c\delta}} \right). \quad (5)$$

Соотношения между приращениями деформаций и приращениями напряжений на шаге нагружения определяются в двух вариантах [15, 17]:

1) дифференцированием соотношений (4) в виде $\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{km}} \Delta \sigma_{km}$ и соотношений (5) в

$$\text{виде } \Delta \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma^{km}} \Delta \sigma^{km};$$

2) на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций компонентам девиатора приращений напряжений в виде

$$\Delta \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} I_1(\Delta \varepsilon) g_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0^\Delta}{\sigma_0^\Delta} \left(\Delta \sigma_{ij} - \frac{1}{3} g_{ij} I_1(\Delta \sigma) \right) = \frac{3}{2} \frac{1}{E_{k\delta}} \left(\Delta \sigma_{ij} - \frac{1}{3} g_{ij} I_1(\Delta \sigma) \right), \quad (6)$$

где $\Delta \varepsilon_{ij}$ - ковариантные компоненты тензора приращений деформаций; $I_1(\Delta \varepsilon) = \Delta \varepsilon_{ij} g^{ij}$ - первый инвариант тензора приращений деформаций; $\varepsilon_0^\Delta, \sigma_0^\Delta$ - интенсивности приращений деформаций и напряжений соответственно; $I_1(\Delta \sigma) = \Delta \sigma_{ij} g^{ij}$ - первый инвариант тензора приращений напряжений; $\Delta \sigma_{ij}$ - ковариантные компоненты тензора приращений напряжений; $E_{k\delta}$ - касательный модуль диаграммы деформирования.

В рассмотренных вариантах определяющие соотношения в декартовой и криволинейной системах координат формируются в виде

$$\left\{ \Delta \varepsilon \right\} = \left[C_1^{\prime\prime} \right] \left\{ \Delta \sigma \right\}; \quad \left\{ \Delta \varepsilon \right\} = \left[C_2^{\prime\prime} \right] \left\{ \Delta \sigma \right\}, \quad (7)$$

где $\left\{ \Delta \varepsilon \right\}^T = \left\{ \Delta \varepsilon_{11} \quad \Delta \varepsilon_{22} \quad \Delta \varepsilon_{33} \quad 2\Delta \varepsilon_{12} \quad 2\Delta \varepsilon_{13} \quad 2\Delta \varepsilon_{23} \right\}$ - строка ковариантных компонент тензора приращений деформаций; $\left[C_1^{\prime\prime} \right]$ формируется при использовании 1 варианта; $\left[C_2^{\prime\prime} \right]$ - при использовании 2 варианта; $\left\{ \Delta \sigma \right\}^T = \left\{ \Delta \sigma^{11} \quad \Delta \sigma^{22} \quad \Delta \sigma^{33} \quad \Delta \sigma^{12} \quad \Delta \sigma^{13} \quad \Delta \sigma^{23} \right\}$ - строка контравариантных компонент тензора приращений напряжений.

При решении задачи о деформировании твердого тела с учетом геометрической нелинейности считается, что перемещения значительны (в сравнении с толщиной), а поведение материала ограничивается упругими деформациями.

Для математического описания этой задачи наиболее адекватным подходом является использование инкрементальной теории.

Формулировка инкрементальной теории начинается с представления пути деформирования в виде последовательности равновесных состояний, которые определены положением произвольной материальной точки тела: M^0 - исходное состояние (метрический тензор $g_{ij}^0 = \bar{g}_i \cdot \bar{g}_j$), M - актуальное состояние после j шагов нагружения (метрический тензор $g_{ij} = \bar{g}_i \cdot \bar{g}_j$, вектор перемещения \vec{V}), M^* - состояние, близкое к актуальному, после $(j+1)$ -го шага нагружения (метрический тензор $g_{ij}^* = \bar{g}_i^* \cdot \bar{g}_j^*$, вектор перемещения \vec{w}).

На основе соотношений механики сплошной среды получены выражения ковариантных компонент тензора приращений деформаций через компоненты вектора перемещений \vec{w} в актуальном базисе криволинейной системы координат [26, 27]

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij}^* - g_{ij}) = \frac{1}{2} (\bar{g}_i \cdot \vec{w}_{,j} + \bar{g}_j \cdot \vec{w}_{,i} + \vec{w}_{,i} \cdot \vec{w}_{,j}) = \Delta \varepsilon_{ij}^{\prime\prime} + \Delta \varepsilon_{ij}^{\prime\prime\prime}, \quad (8)$$

где $\Delta \varepsilon_{ij}^{\prime\prime}$, $\Delta \varepsilon_{ij}^{\prime\prime\prime}$ - компоненты тензоров линейной и нелинейной составляющих приращений деформаций.

Выражения (8) были представлены в виде

$$\left\{ \Delta \varepsilon^{\prime\prime} \right\} = \left[L \right] \left\{ w \right\}, \quad (9)$$

где $[L]$ - матрица алгебраических и дифференциальных операторов; $\left\{ w \right\}^T = \left\{ w^1 \quad w^2 \quad w^3 \right\}$ - строка контравариантных компонент вектора перемещения на шаге нагружения.

Для получения смешанного функционала использовано равенство возможной и действительной работы внешних и внутренних сил на шаге нагружения в виде

$$\int_V \left(\sigma^{ij} + \frac{1}{2} \Delta \sigma^{ij} \right) \Delta \varepsilon_{ij} dV = \int_S \left(\bar{T}^i + \frac{1}{2} \Delta \bar{T}^i \right) w_i dS, \quad (10)$$

где σ^{ij} - контравариантные компоненты тензора напряжений $\Delta \sigma^{ij}$ - контравариантные компоненты тензора приращений напряжений на шаге нагружения; \bar{T}^i - контравариантные компоненты вектора внешней нагрузки за j шагов нагружения; $\Delta \bar{T}^i$ - контравариантные компоненты вектора приращений внешней нагрузки на $(j+1)$ -ом шаге нагружения; w_i - ковариантные компоненты вектора перемещений \vec{w} .

В соотношении (10) действительная работа внутренних сил на шаге нагружения заменяется разностью полной и дополнительной энергии в виде [17, 19, 21, 23, 25, 26]

$$\frac{1}{2} \Delta \sigma^{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^{\prime\prime} = \Delta \sigma^{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^{\prime\prime} - \Delta \Phi_0 = \Delta \sigma^{ij} L_{ij}(w) - \frac{1}{2} a_{ijkl} \Delta \sigma^{ij} \Delta \sigma^{kl}, \quad (11)$$

где $\Delta \Phi_0$ - приращение удельной дополнительной энергии тела на шаге нагружения; $\Delta \varepsilon_{ij}^{\prime\prime} = L_{ij}(w)$ - соотношения Коши на шаге нагружения; a_{ijkl} - компоненты тензора упругой податливости материала.

С использованием соотношений (10) и (11) получен смешанный функционал при учете упруго – пластического состояния материала

$$P_{SN} = \int_V \sigma^{ij} \Delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \Delta \sigma^{ij} L(w) dV - \int_V \Delta \Phi_0 (\Delta \sigma_{ij}) dV - \int_{S_\sigma} \left(\bar{T}^i + \frac{1}{2} \Delta \bar{T}^i \right) w_i dS. \quad (12)$$

В третьей главе на основе теоретических положений главы 2 разработаны в геометрически линейной постановке объемные конечные элементы: призматический, кольцевой, с поперечными сечениями в форме произвольного четырехугольника, и шестигранный для исследования напряженно-деформированного состояния упругих тел в условиях плоской задачи, тел вращения при осесимметричном и произвольном нагружениях, произвольной оболочки при произвольном нагружении. В качестве узловых неизвестных конечных элементов приняты перемещения и напряжения.

Положение в цилиндрической системе координат $Or\theta z$ произвольной точки M^{0r} шестигранного объемного конечного элемента определяется радиусом – вектором

$$\vec{R}^{0r} = \vec{R}^0 + t \vec{a}^0, \quad (13)$$

где \vec{R}^0 - радиус – вектор точки M^0 , расположенной на отсчетной поверхности оболочки; t - расстояние от точки M^0 ; \vec{a}^0 - вектор локального базиса точки M^0 , нормальный к отсчетной поверхности.

Дифференцированием (13) определялись векторы локального базиса точки M^{0r} $\{\vec{g}^0\}^T = \{\vec{g}_1^0 \ \vec{g}_2^0 \ \vec{a}^0\}$. Производные базисных векторов по криволинейным координатам s, θ, t представлялись соотношениями

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{g}^0 \\ ,s \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} = [m] \left\{ \begin{matrix} \vec{g}^0 \\ \end{matrix} \right\}_{3 \times 1}; \left\{ \begin{matrix} \vec{g}^0 \\ ,\theta \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} = [n] \left\{ \begin{matrix} \vec{g}^0 \\ \end{matrix} \right\}_{3 \times 1}; \left\{ \begin{matrix} \vec{g}^0 \\ ,t \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} = [l] \left\{ \begin{matrix} \vec{g}^0 \\ \end{matrix} \right\}_{3 \times 1}. \quad (14)$$

После нагружения оболочки произвольная точка M^{0r} переходит в положение M^t . Радиус – вектор точки M^t в деформированном состоянии оболочки записывался выражением

$$\vec{R}^t = \vec{R}^{0r} + \vec{V}, \quad (15)$$

$$\text{где } \vec{V} = v^1 \vec{g}_1^0 + v^2 \vec{g}_2^0 + v^3 \vec{a}^0 = \left\{ \begin{matrix} \vec{g}^0 \\ \end{matrix} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ v \right\}_{3 \times 1}. \quad (16)$$

Производные вектора перемещения (16) по криволинейным координатам s, θ, t при учете (14) определялись выражениями

$$\vec{V}_{,s} = f_1^1 \bar{g}_1^0 + f_1^2 \bar{g}_2^0 + f_1^3 \bar{a}^0; \vec{V}_{,\theta} = f_2^1 \bar{g}_1^0 + f_2^2 \bar{g}_2^0 + f_2^3 \bar{a}^0; \vec{V}_{,t} = f_3^1 \bar{g}_1^0 + f_3^2 \bar{g}_2^0 + f_3^3 \bar{a}^0, \quad (17)$$

где f_i^j - функции компонент вектора \vec{V} и их производных.

Векторы, касательные к координатным линиям в точке M^t , определялись дифференцированием радиуса - вектора (15) по координатам s, θ, t в виде

$$\begin{aligned} \bar{g}_1^t &= \bar{R}_{,s}^t = (1 + f_1^1) \bar{g}_1^0 + f_1^2 \bar{g}_2^0 + f_1^3 \bar{a}^0; \bar{g}_2^t = \bar{R}_{,\theta}^t = f_2^2 \bar{g}_1^0 + (1 + f_2^1) \bar{g}_2^0 + f_2^3 \bar{a}^0; \\ \bar{g}_3^t &= \bar{R}_{,t}^t = v_{,t}^1 \bar{g}_1^0 + v_{,t}^2 \bar{g}_2^0 + (1 + v_{,t}^3) \bar{a}^0. \end{aligned} \quad (18)$$

Деформированное состояние в рассматриваемой точке характеризуется тензором деформаций, ковариантные компоненты которого определяются разностью компонент метрических тензоров исходного и деформированного состояний и записываются соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - g_{ij}^0) = \frac{1}{2} (\bar{g}_i^0 \cdot \bar{V}_{,j} + \bar{g}_j^0 \cdot \bar{V}_{,i} + \bar{V}_{,i} \cdot \bar{V}_{,j}). \quad (19)$$

Так как задача решалась в геометрически линейной постановке, то в соотношениях (19) произведения производных векторов перемещений как бесконечно малые второго порядка малости были опущены.

С учетом (14) и (18) компоненты тензора деформаций (19) в произвольной точке M^t оболочки выражались через компоненты вектора перемещения \vec{V} в виде

$$\{\varepsilon\} = [L_k] \{v\}, \quad (20)$$

где $[L_k]$ - матрица дифференциальных операторов (для криволинейной системы координат).

Зависимости между компонентами тензора деформаций и компонентами тензора напряжений для изотропной среды определяются законом Гука

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\mu}{E} I_1(\sigma) g_{ij} + \left(\frac{1}{E} + \frac{\mu}{E} \right) g_{im} g_{jn} \sigma^{mn}, \quad (21)$$

или в матричной форме

$$\{\varepsilon\} = [C_k] \{\sigma\}; \{\sigma\} = [C_k]^{-1} \{\varepsilon\}, \quad (22)$$

где $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{rr} \ \sigma_{\theta\theta} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{r\theta} \ \sigma_{rz} \ \sigma_{\theta z}\}$ - матрица - строка компонент тензора напряжений в произвольной точке M^t оболочки; $[C_k]$ - матрица податливости материала (для криволинейной системы координат); $[C_k]^{-1}$ - матрица жесткости материала (для криволинейной системы координат).

В качестве дискретного элемента выбирался объемный элемент в форме произвольного восьмиугольника с узлами i, j, k, l, m, n, p, h . Узловыми неизвестными конечного элемента были приняты перемещения и напряжения. Для выполнения численного интегрирования произвольный восьмиугольник отображался на куб с локальными координатами ξ, η, ζ , которые изменялись в пределах $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$. Глобальные координаты s, θ, t восьмиугольника выражались через их узловые значения трилинейными соотношениями

$$s = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ s_y \right\}_{8 \times 1}; \theta = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \theta_y \right\}_{8 \times 1}; t = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ t_y \right\}_{8 \times 1}, \quad (23)$$

где $\left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}^T = \{\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4 \ \varphi_5 \ \varphi_6 \ \varphi_7 \ \varphi_8\}$ - матрица - строка функций формы.

Дифференцированием (23) по локальным координатам ξ, η, ζ определялись производные глобальных координат в локальной системе и производные локальных координат в глобальной системе.

Аппроксимация компонент вектора перемещения произвольной точки конечного элемента через компоненты векторов перемещений узловых точек выполнялась в двух вариантах.

1 вариант. Компоненты вектора перемещения аппроксимировались как скалярные величины.

Контравариантные компоненты вектора перемещения произвольной точки конечного элемента аппроксимировались через контравариантные компоненты векторов перемещений узловых точек трилинейными соотношениями

$$v^i = \left\{ \underset{1 \times 8}{\varphi(\xi, \eta, \zeta)} \right\}^T \left\{ \underset{8 \times 1}{v_y^i} \right\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (24)$$

Аппроксимация (24) представлялась в матричном виде

$$\left\{ \underset{3 \times 1}{v} \right\} = \left[\underset{3 \times 24}{A} \right] \left\{ \underset{24 \times 1}{v_y} \right\}. \quad (25)$$

При использовании скалярной аппроксимации каждая компонента вектора перемещения произвольной точки конечного элемента аппроксимируется через узловые значения только этой же компоненты выражениями (24) и в аппроксимирующем выражении не учитываются параметры используемой криволинейной системы координат.

2 вариант. Компоненты вектора перемещения аппроксимировались с использованием предложенной инвариантной векторной аппроксимации

Вектор перемещения произвольной точки конечного элемента (16) аппроксимировался через векторы перемещений узловых точек трилинейными соотношениями

$$\vec{V} = \left\{ \underset{1 \times 8}{\varphi(\xi, \eta, \zeta)} \right\}^T \left\{ \underset{8 \times 1}{\vec{V}_y} \right\}. \quad (26)$$

Столбец узловых векторов перемещений выражался через их компоненты в виде

$$\left\{ \underset{8 \times 1}{\vec{V}_y} \right\} = \left[\underset{8 \times 24}{\vec{Z}} \right] \left\{ \underset{24 \times 1}{v_y} \right\}, \quad (27)$$

где элементами матрицы $\left[\vec{Z} \right]$ являются матрицы – строки базисных векторов узловых точек конечного элемента.

С учетом выражения (27) вектор (26) запишется в виде

$$\vec{V} = \left\{ \underset{1 \times 8}{\varphi(\xi, \eta, \zeta)} \right\}^T \left[\underset{8 \times 24}{\vec{Z}} \right] \left\{ \underset{24 \times 1}{v_y} \right\}. \quad (28)$$

Базисные векторы узловой точки конечного элемента выражались через базисные векторы произвольной точки в виде

$$\left\{ \underset{1 \times 3}{\vec{g}^{0\omega}} \right\}^T = \left\{ \underset{1 \times 3}{\vec{g}^0} \right\}^T \left[\underset{3 \times 3}{\gamma^\omega} \right]^T; \quad (\omega = i, j, k, l, m, n, p, h). \quad (29)$$

С учетом (29) вектор (28) запишется выражением

$$\vec{V} = \left\{ \underset{1 \times 3}{\vec{g}^0} \right\}^T \left[\underset{3 \times 3}{\varphi_1 [\gamma^i]}^T \quad \underset{3 \times 3}{\varphi_2 [\gamma^j]}^T \quad \dots \quad \underset{3 \times 3}{\varphi_7 [\gamma^p]}^T \quad \underset{3 \times 3}{\varphi_8 [\gamma^h]}^T \right] \left\{ \underset{24 \times 1}{v_y} \right\}. \quad (30)$$

Приравниванием правых частей (16) и (30) было получено аппроксимирующее выражение для компонент вектора перемещения произвольной точки конечного элемента в виде

$$\left\{ \underset{3 \times 1}{v} \right\} = \left[\underset{3 \times 24}{A_v} \right] \left\{ \underset{24 \times 1}{v_y} \right\}, \quad (31)$$

$$\text{где } \left[\underset{3 \times 24}{A_v} \right] = \left[\underset{3 \times 3}{\varphi_1 [\gamma^i]}^T \quad \underset{3 \times 3}{\varphi_2 [\gamma^j]}^T \quad \dots \quad \underset{3 \times 3}{\varphi_7 [\gamma^p]}^T \quad \underset{3 \times 3}{\varphi_8 [\gamma^h]}^T \right]. \quad (32)$$

Как видно из (32), при использовании векторной аппроксимации каждая компонента вектора перемещения произвольной точки конечного элемента аппроксимируется через уз-

ловые значения всех компонент векторов перемещений \vec{V}^ω узловых точек и через матрицы $[\gamma^\omega]$ выражения (29) учитываются параметры используемой криволинейной системы координат.

Производные вектора перемещения произвольной точки конечного элемента определялись дифференцированием (30) по криволинейным координатам s, θ, t в виде

$$\vec{V}_{,\alpha} = \left\{ \varphi_{,\alpha} \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \vec{V}_y \right\}_{8 \times 1}; \quad \alpha = s, \theta, t. \quad (33)$$

С использованием соотношений (27) и (29) из выражений (33) получались зависимости производных вектора перемещения от компонент узловых перемещений для произвольной точки конечного элемента

$$\vec{V}_{,\alpha} = \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\varphi_{1,\alpha} [\gamma^i]^T \quad \varphi_{2,\alpha} [\gamma^j]^T \quad \dots \quad \varphi_{7,\alpha} [\gamma^p]^T \quad \varphi_{8,\alpha} [\gamma^h]^T \right] \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}. \quad (34)$$

Приравниванием правых частей (17) и (34) после преобразований были получены выражения для производных компонент вектора перемещения произвольной точки конечного элемента в матричном виде

$$\begin{aligned} v^1_{,s} &= \left\{ S_1 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}; \quad v^2_{,s} = \left\{ S_2 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}; \quad v^3_{,s} = \left\{ S_3 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}; \quad v^1_{,\theta} = \left\{ S_4 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}; \quad v^2_{,\theta} = \left\{ S_5 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}; \\ v^3_{,\theta} &= \left\{ S_6 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}; \quad v^1_{,t} = \left\{ S_7 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}; \quad v^2_{,t} = \left\{ S_8 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}; \quad v^3_{,t} = \left\{ S_9 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}. \end{aligned} \quad (35)$$

С использованием (31) и (35) выражение для деформаций (20) записывается в виде

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = \left[L \right]_{6 \times 2} \left[A_v \right]_{3 \times 24} \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1} = \left[B \right]_{6 \times 24} \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}. \quad (36)$$

Напряженное состояние в произвольной точке конечного элемента характеризуется тензором напряжений, определяемым выражением

$$\tilde{\sigma} = \left\{ \sigma \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{6 \times 1}, \quad (37)$$

где $\left\{ \vec{g}^0 \right\}^T = \left\{ \bar{g}_1^0 \bar{g}_1^0 \quad \bar{g}_2^0 \bar{g}_2^0 \quad \bar{a}^0 \bar{a}^0 \quad 2 \bar{g}_1^0 \bar{g}_2^0 \quad 2 \bar{g}_1^0 \bar{a}^0 \quad 2 \bar{g}_2^0 \bar{a}^0 \right\}$ - матрица - строка диадных произведений векторов локального базиса произвольной точки конечного элемента.

Тензор напряжений в узловой точке ω конечного элемента записывается в виде

$$\tilde{\sigma}^\omega = \left\{ \sigma^\omega \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \vec{g}^{0\omega} \right\}_{6 \times 1}. \quad (38)$$

Аппроксимация компонент тензора напряжений в произвольной точке конечного элемента через компоненты тензоров напряжений в его узловых точках выполнялась в двух вариантах.

1 вариант. Компоненты тензора напряжений аппроксимировались как скалярные величины.

Контравариантные компоненты тензора напряжений в произвольной точке конечного элемента аппроксимировались через контравариантные компоненты тензоров напряжений в узловых точках трilinearными соотношениями

$$\sigma^{ij} = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \sigma_{ij}^y \right\}_{8 \times 1}. \quad (39)$$

Аппроксимация (39) представлялась в матричном виде

$$\left\{ \sigma \right\}_{6 \times 1} = \left[G \right]_{6 \times 48} \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1}. \quad (40)$$

При использовании скалярной аппроксимации каждая компонента тензора напряжений в произвольной точке конечного элемента аппроксимируется через узловые значения только этой же компоненты и в аппроксимирующем выражении не учитываются параметры используемой криволинейной системы координат.

2 вариант. Компоненты тензора напряжений аппроксимировались с использованием предложенной инвариантной векторной аппроксимации.

Тензор напряжений в произвольной точке конечного элемента аппроксимируется через тензоры напряжений в узловых точках трилинейным соотношением

$$\tilde{\sigma} = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \tilde{\sigma}_y \right\}_{8 \times 1}. \quad (41)$$

С использованием (37) тензоры напряжений в узловых точках были представлены через их контравариантные компоненты выражением

$$\left\{ \tilde{\sigma}_y \right\}_{8 \times 1} = \left[\tilde{Z}^\omega \right]_{8 \times 48} \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1}, \quad (42)$$

где элементами матрицы $\left[\tilde{Z}^\omega \right]$ являются строки диадных произведений базисных векторов узловых точек.

С использованием соотношений (29) диадные произведения базисных векторов узловой точки конечного элемента выражались через диадные произведения базисных векторов произвольной точки в виде

$$\left\{ \tilde{g}^{0\omega} \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ \tilde{g}^0 \right\}_{1 \times 6}^T \left[\psi^\omega \right]_{6 \times 6}^T. \quad (43)$$

С учетом (43) тензор напряжений (41) записывается в виде

$$\tilde{\sigma} = \left\{ \tilde{g}^0 \right\}_{1 \times 6}^T \left[\varphi_1 \left[\psi^i \right]_{6 \times 6}^T \quad \varphi_2 \left[\psi^j \right]_{6 \times 6}^T \quad \dots \quad \varphi_7 \left[\psi^p \right]_{6 \times 6}^T \quad \varphi_8 \left[\psi^h \right]_{6 \times 6}^T \right] \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1}. \quad (44)$$

Приравнием правых частей (37) и (44) было получено матричное выражение для контравариантных компонент тензора напряжений в произвольной точке конечного элемента через контравариантные компоненты тензоров напряжений в узловых точках в виде

$$\left\{ \sigma \right\}_{6 \times 1} = \left[G_t \right]_{6 \times 48} \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1}. \quad (45)$$

При использовании тензорной аппроксимации каждая компонента тензора напряжений в произвольной точке конечного элемента аппроксимируется через значения всех компонент тензоров напряжений в узловых точках конечного элемента и через матрицы $\left[\psi^\omega \right]$ выражения (43) учитываются параметры используемой системы координат.

Модифицированный функционал с независимыми перемещениями и напряжениями принимался в виде

$$P_M \equiv \int_V \left\{ \sigma \right\}_{1 \times 6}^T \left[L \right]_{6 \times 3} \left\{ v \right\}_{3 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \sigma \right\}_{6 \times 1} dV - \int_{S_\sigma} \left\{ \bar{T} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ v \right\}_{3 \times 1} dS, \quad (46)$$

где $\left[L \right] = \left[L_k \right]$, если используется криволинейная система координат.

С учетом матричных соотношений (22), (25), (31), (36), (40) и (45) функционал (46) для конечного элемента запишется в виде [7]

$$P_{ME} = \left\{ \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T \int_V \left[G \right]_{48 \times 6}^T \left[B \right]_{6 \times 24} dV \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T \int_V \left[G \right]_{48 \times 6}^T \left[C \right]_{6 \times 6} \left[G \right]_{6 \times 48} dV \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1} - \left\{ v_y \right\}_{1 \times 24}^T \int_{S_\sigma} \left[A \right]_{24 \times 3}^T \left\{ \bar{T} \right\}_{3 \times 1} dS, \quad (47)$$

где $[C] = [C_k]$, если используется криволинейная система координат; $[G] = [G_t]$, если применяется тензорная аппроксимация; $[A] = [A_v]$, если применяется векторная аппроксимация.

После выполнения варьирования функционала (47) по узловым неизвестным $\left\{ \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T$ и $\left\{ v_y \right\}_{1 \times 24}^T$ конечного элемента получались системы уравнений

$$\frac{\partial \Pi_{RE}}{\partial \left\{ \sigma_y \right\}^T} \equiv [Q] \left\{ v_y \right\} - [H] \left\{ \sigma_y \right\} = 0; \quad \frac{\partial \Pi_{RE}}{\partial \left\{ v_y \right\}^T} \equiv [Q]^T \left\{ \sigma_y \right\} - \left\{ f \right\} = 0, \quad (48)$$

$$\text{где } [H] = \int [G]^T [C] [G] dV; \quad [Q] = \int [G]^T [B] dV; \quad \left\{ f \right\} = \int [A]^T \left\{ \bar{T} \right\} dS.$$

Системы уравнений (48) представлялись в традиционной для МКЭ форме

$$[K] \left\{ z_y \right\} = \left\{ F \right\}, \quad (49)$$

где $[K] = \begin{bmatrix} -[H] & [Q] \\ [Q]^T & [0] \end{bmatrix}$ - матрица деформирования конечного элемента;

$\left\{ z_y \right\}^T = \left\{ \left\{ \sigma_y \right\}^T \left\{ v_y \right\}^T \right\}$ - вектор узловых неизвестных конечного элемента;

$\left\{ F \right\}^T = \left\{ \left\{ 0 \right\}^T \left\{ f \right\}^T \right\}$ - вектор узловых усилий конечного элемента.

Формирование матрицы деформирования всей конструкции выполняется с использованием традиционной процедуры МКЭ.

На основе изложенного алгоритма разработан кольцевой объемный конечный элемент с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника для исследования НДС упругих тел в условиях плоской задачи. За узловые неизвестные были приняты перемещения и напряжения.

Пример 1. Рассмотрена эллиптическая оболочка вращения, широко используемая в верификационной практике из-за возможности контроля вычислений с использованием уравнений статики, находящаяся под действием внутреннего давления интенсивности q . Внутренний меридиан описывался эллиптической кривой $\vec{R} = x(S)\vec{i} + r(S)\vec{k}$, где декартовы

координаты связаны зависимостью $\frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$.

Были приняты следующие исходные данные: $q = 2$ МПа; $a = 0,5$ м; $b = 0,25$ м; $\mu = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Так как в вершине эллипса ($x=0,5$ м) образуется вырожденный объемный элемент, то в расчете использовалась усеченная эллиптическая оболочка с размерами $a_0 = 0,49$ м, $r_0 = 0,05$ м (рис.1). В качестве граничных условий принимались равными нулю меридиональные перемещения в узловых точках оболочки при $x=0$ (рис.1). Координата S определялась в зависимости от осевой координаты x численным интегрированием.

В первом варианте рассчитывалась тонкая оболочка толщиной $h=0,005$ м усеченной формы ($a_0 = 0,49$ м). По толщине оболочка разбивалась на 2 и 4 элемента при пятнадцати уз-

лах вдоль меридиана. В обоих случаях результаты оказались практически одинаковыми (таблица 1).

Таблица 1

Номер точки	Напряжение, МПа		
	σ^{11}	σ^{22}	σ^{33}
1	47,565	90,141	-1,933
2	47,086	88,352	-0,971
3	48,631	86,683	0,007

Напряжения, подсчитанные из условия равновесия эллиптической оболочки, равны $\sigma^{11} = \frac{q(\pi v^2 - \pi r_0^2)}{2\pi v h} = 47,018$ МПа. Как видно наблюдается хорошее совпадение с табличным результатом (точка 2).

Во втором варианте рассчитывалась эллиптическая оболочка значительной толщины ($h=0,04$ м) при внутреннем давлении интенсивности $q=20$ МПа. В точке 3 (рис.1) была введена связь, препятствующая перемещению точки вдоль нормали к меридиану внутренней поверхности.

В таблице 2 представлены нормальные напряжения в некоторых сечениях оболочки в зависимости от количества элементов дискретизации.

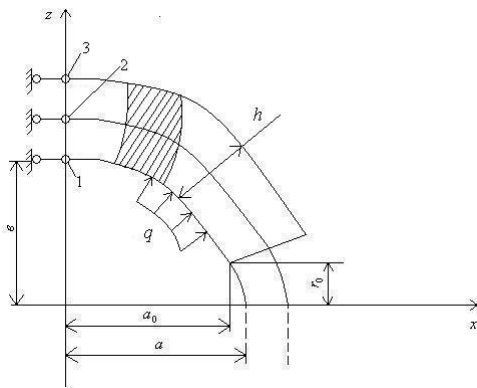


Рис.1 Расчетная схема эллиптической оболочки вращения под действием внутреннего давления

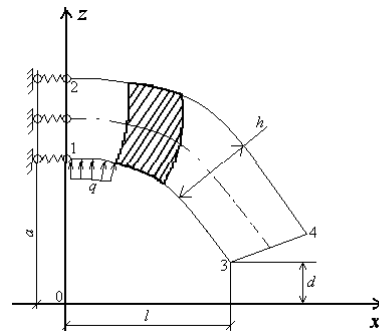


Рис.2 Расчетная схема усеченной оболочки вращения под действием внутреннего давления

Таблица 2

Координаты ки (м)	Напряжение, МПа	Количество элементов		
		80	116	148
S=0,0 t=0,0	σ^{11}	212,569	196,926	191,872
	σ^{22}	72,478	70,243	71,460
	σ^{33}	-19,576	-20,484	-19,747
S=0,0 t=0,04	σ^{11}	-131,567	-191,003	-232,244
	σ^{22}	-88,508	-144,414	-191,540
S=0,02 t=0,0	σ^{11}	155,552	154,969	153,796
	σ^{22}	59,749	66,20	66,679
S=0,5545 t=0,04	σ^{11}	-0,744	1,913	0,52

	σ^{22}	41,807	42,130	41,970
--	---------------	--------	--------	--------

Как видно из таблицы 2 в точке действия сосредоточенной опорной связи (точка 3 с координатами $S=0,0$; $t=0,04$ м) наблюдается неудовлетворительная сходимость численных результатов. Но уже в точке 1, а также в точках сечения с координатой $S=0,02$ м наблюдается удовлетворительная сходимость численных результатов.

В областях оболочки, достаточно удаленных от точки приложения сосредоточенной силы, наблюдается хорошая сходимость вычислительного процесса.

Анализ результатов показывает, что разработанный на основе соотношений теории упругости элемент вполне приемлем для анализа напряженно- деформированного состояния оболочек произвольной толщины.

Пример 2. Рассчитывалась оболочка вращения в виде усеченного эллипсоида, нагруженного равномерным давлением интенсивности q (Рис.2).

Были приняты следующие исходные данные: $a = 0,5$ м; $l = 0,2$ м; $h = 0,02$ м; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $q = 10$ МПа; $\mu = 0,3$; $r_k \approx 0,038$ м при $x_k = 0,49$ м.

В таблицах 3 и 4 приведены численные значения меридиональных σ^{11} и кольцевых напряжений σ^{22} в точках 1- 4 (Рис.2) при различных смещениях v_n^1 пружинных опор. Результаты, приведенные в таблице 3, получены при использовании предложенной аппроксимации векторов перемещений и тензоров напряжений как векторных и тензорных полей. В таблице 4 приведены значения напряжений, полученные при использовании аппроксимации перемещений и напряжений как скалярных полей.

Таблица 3

Напряжения, МПа										
№ точки	$v_n^1 = 0,095 \cdot 10^{-3}$ м		$v_n^1 = 0,48 \cdot 10^{-3}$ м		$v_n^1 = 4,8 \cdot 10^{-3}$ м		$v_n^1 = 4,78 \cdot 10^{-3}$ м		$v_n^1 = 478,4 \cdot 10^{-3}$ м	
	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}
1	48,075	99,012	48,284	99,189	48,337	99,234	48,342	99,239	48,343	99,239
2	43,153	88,335	42,963	88,379	42,915	88,391	42,910	88,392	42,910	88,392
3	-0,692	57,852	-0,694	57,854	-0,697	57,853	-0,694	57,853	-0,695	57,853
4	-0,616	31,031	-0,618	31,032	-0,617	31,032	-0,617	31,032	-0,616	31,032

Численные значения напряжений оказались одинаковыми при дискретизации оболочки по толщине на 2 и 4 элемента при сетке 23×5 и 30×5 . Как видно из таблицы 3 условия равновесия в точках 1-4 выполняются. Меридиональные напряжения в точках 3,4 близки к нулю, а в точках 1,2 средние напряжения имеют значение $\sigma_{cp}^{11} = 45,624$ МПа, при теоретическом среднем напряжении, равном

$$\sigma_{cp}^{11} = q \frac{l^2 - d^2}{2(l + h/2)h} = 45,833 \text{ МПа.}$$

В таблице 5 в зависимости от размеров сетки дискретизации эллиптической оболочки приведены напряжения в точках 1 и 2, свидетельствующие об удовлетворительнойходимости вычислительного процесса. Анализ результатов показывает, что в первом случае (таблица 3) результаты остаются практически неизменными даже при смещении оболочки как твердого тела на величину $v_n^1 = 0,4784$ м. При аппроксимации перемещений и напряжений как скалярных полей результаты оказываются неприемлемыми уже при величине смещения $v_n^1 = 0,0048$ м (таблица 4).

Таблица 4

Напряжения, МПа								
№ точки	$v_x^1 = 0,095 \cdot 10^{-3}$ м		$v_x^1 = 0,48 \cdot 10^{-3}$ м		$v_x^1 = 4,8 \cdot 10^{-3}$ м		$v_x^1 = 4,78 \cdot 10^{-3}$ м	
	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}
1	48,028	106,703	48,025	106,743	46,980	106,316	36,326	101,86
2	42,72	88,309	41,615	88,003	29,291	84,377	-99,447	48,153
3	0,428	69,077	2,665	68,704	27,831	64,511	278,909	22,680
4	-1,264	31,317	-5,374	29,604	-51,608	10,329	-512,687	-181,979

Таблица 5

№ точки	Напряжения, МПа					
	Сетка 15x15		Сетка 23x5		Сетка 30x5	
	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}
1	96,189	213,231	48,028	106,703	47,85	106,656
2	87,297	176,931	42,792	88,309	42,312	88,171

Таким образом, предложенный способ аппроксимации перемещений как векторных полей и напряжений как тензорных полей позволяет решить проблему учета смещений конечных элементов как абсолютно жесткого тела.

Пример 3. Определено напряженно-деформированное состояние кольца, нагруженного сосредоточенной силой P , приложенной в верхней точке вертикального диаметра, при расположении пружинной опоры в нижней точке диаметра. Ввиду симметрии конструкции рассматривалась половина кольца (Рис. 3) при следующих исходных данных:

$$R = 0,3\text{ м}; \quad h = 0,005\text{ м}; \quad P = 2H; \quad \mu = 0,3; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Рассматриваемая часть кольца разбивалась на 60 элементов вдоль дуги и на два элемента вдоль ее толщины. При изменении жесткости опорной пружины точка 5 получала

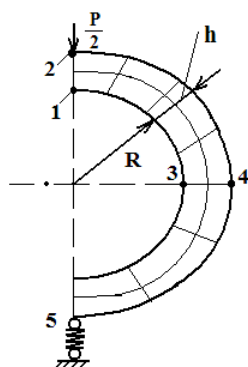


Рис. 3 Расчетная схема кольца, нагруженного сосредоточенной силой

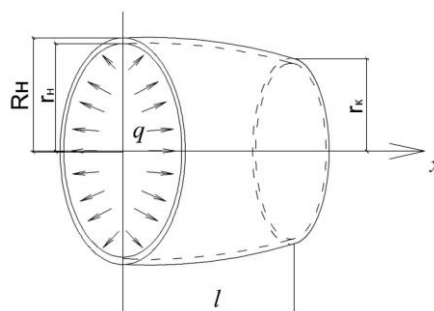


Рис. 4 Расчетная схема усеченного эллипсоида под действием внутреннего давления

различные перемещения V_{II} (м) как абсолютно твердого тела. В таблице 3 приведены кольцевые физические напряжения в точках 1, 2, 3, 4 (Рис. 3) при различных жесткостях опорной пружины и получаемых соответственно смещениях V_{II} кольца как жесткого целого. В числителе приведены значения напряжений при использовании предложенной тензорно-векторной аппроксимации искомых величин, а в знаменателе – при их аппроксимации как скалярных величин.

Таблица 6

V_{II} (м)	0,0	0,001	0,01	0,02	0,101	1,117
№ точки	Напряжения σ_{cp}^{22} , МПа					
1	22,846	22,846	22,843	22,840	22,816	22,815
	22,948	22,299	16,453	9,943	-42,715	-700,16
2	-22,597	-22,597	-22,594	-22,590	-22,561	-22,214
	-22,827	-22,145	-16,007	-9,172	46,115	736,39
3	-13,369	-13,369	-13,366	-13,362	-13,332	-12,999
	-13,762	-13,723	-16,972	-20,590	-49,858	-415,28
4	13,029	13,029	13,026	13,022	12,991	12,646
	13,087	13,45	16,266	19,453	45,231	367,07

Анализ результатов, представленных в таблице 6, показывает, что напряжения σ_{cp}^{22} (в числителе) меняются незначительно даже при смещении кольца как твердого тела на 1,117 м. Результаты, представленные в знаменателе, оказываются неприемлемыми уже при смещении кольца как жесткого тела на величину 0,01 м.

Таким образом, предложенная аппроксимация векторных и тензорных полей искомым величин произвольной точки конечного элемента позволяет учесть смещение элемента как абсолютно жесткого тела.

В четвертой главе для деформируемых тел при упруго-пластическом состоянии материала в различных условиях нагружения на шаге нагружения получены определяющие соотношения в двух вариантах: 1) традиционном – дифференцированием компонент тензора деформаций; 2) предложенном – на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений деформаций компонентам девиаторов приращений напряжений. Предложен смешанный функционал на основе равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил с заменой на шаге нагружения действительной работы разностью полной и дополнительной энергии. На основе полученных определяющих соотношений и предложенного функционала разработаны объемные конечные элементы: призматический с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника для определения НДС оболочек в условиях плоской задачи теории пластичности; кольцевой с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника для осесимметрично нагруженных оболочек вращения; шестигранный для произвольно нагруженных оболочек вращения. За узловые неизвестные принимались приращения перемещений и приращения напряжений.

4.3.1. Основные соотношения деформационной теории пластичности. Соотношения между напряжениями и деформациями на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора деформаций и девиатора напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \sigma_{rr} \left(\frac{1-2\mu}{3E_{cd}} + \frac{1}{E_{cd}} \right) + \sigma_{\theta\theta} \left(\frac{1-2\mu}{3E_{cd}} - \frac{1}{2} \frac{1}{E_{cd}} \right) + \sigma_{zz} \left(\frac{1-2\mu}{3E_{cd}} - \frac{1}{2} \frac{1}{E_{cd}} \right); \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} \left(\frac{1-2\mu}{3E_{cd}} - \frac{1}{2} \frac{1}{E_{cd}} \right) + \sigma_{\theta\theta} \left(\frac{1-2\mu}{3E_{cd}} + \frac{1}{E_{cd}} \right) + \sigma_{zz} \left(\frac{1-2\mu}{3E_{cd}} - \frac{1}{2} \frac{1}{E_{cd}} \right); \\
 \varepsilon_{zz} &= \sigma_{rr} \left(\frac{1+2\mu}{3E_{cd}} - \frac{1}{2} \frac{1}{E_{cd}} \right) + \sigma_{\theta\theta} \left(\frac{1+2\mu}{3E_{cd}} - \frac{1}{2} \frac{1}{E_{cd}} \right) + \sigma_{zz} \left(\frac{1+2\mu}{3E_{cd}} + \frac{1}{2} \frac{1}{E_{cd}} \right) \\
 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{3}{E_{cd}} \sigma_{r\theta}; \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{3}{E_{cd}} \sigma_{rz}; \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{3}{E_{cd}} \sigma_{\theta z},
 \end{aligned} \tag{50}$$

где $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}$ - радиальная, окружная и осевая линейные деформации; $2\varepsilon_{r\theta}, 2\varepsilon_{\theta z}, 2\varepsilon_{rz}$ - деформации сдвига; $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ - радиальное, окружное и осевое нормальные напряже-

ния; $\sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}$ - касательные напряжения;

$\sigma_0 = \left(3 \left[-\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{rr} + \sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{rz}^2 \right] \right)^{1/2}$ - интенсивность напряжений;

$\varepsilon_0 = \left(\frac{4}{3} \left[-\varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{rr} + 4\varepsilon_{r\theta}^2 + 4\varepsilon_{\theta z}^2 + 4\varepsilon_{rz}^2 \right] \right)^{1/2}$ - интенсивность деформаций;

$E_{c\delta}$ - секущий модуль диаграммы деформирования.

Зависимость между средней линейной деформацией ε_c и средним нормальным напряжением σ_c принимается в виде

$$\varepsilon_c = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_c. \quad (51)$$

При реализации шагового метода нагружения получение зависимостей между компонентами тензора приращений деформаций и компонентами тензора приращений напряжений представляется в двух вариантах.

1 вариант. Искомые соотношения определяются дифференцированием (50)

$$\Delta \varepsilon_{mn} = \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \sigma_{pk}} \Delta \sigma_{pk}, \quad m, n, p, k = r, \theta, z. \quad (52)$$

или в матричном виде

$$\{\Delta \varepsilon\}_{6 \times 1} = [C_1^{\prime\prime}]_{6 \times 6} \{\Delta \sigma\}_{6 \times 1}, \quad (53)$$

где $\{\Delta \varepsilon\}^T$ - матрица - строка компонент тензора приращений деформаций; $\{\Delta \sigma\}^T$ - матрица - строка компонент тензора приращений напряжений; $[C_1^{\prime\prime}]$ - матрица упруго - пластической податливости материала.

2 вариант. Искомые соотношения определяются на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций компонентам девиатора приращений напряжений и записываются выражениями

$$\begin{aligned} (\Delta \varepsilon_{rr} - \Delta \varepsilon_c) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0^\Delta}{\sigma_0^\Delta} (\Delta \sigma_{rr} - \Delta \sigma_c) = \frac{3}{2} \frac{1}{E_{x\delta}} (\Delta \sigma_{rr} - \Delta \sigma_c); \\ (\Delta \varepsilon_{\theta\theta} - \Delta \varepsilon_c) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0^\Delta}{\sigma_0^\Delta} (\Delta \sigma_{\theta\theta} - \Delta \sigma_c) = \frac{3}{2} \frac{1}{E_{x\delta}} (\Delta \sigma_{\theta\theta} - \Delta \sigma_c); \\ (\Delta \varepsilon_{zz} - \Delta \varepsilon_c) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0^\Delta}{\sigma_0^\Delta} (\Delta \sigma_{zz} - \Delta \sigma_c) = \frac{3}{2} \frac{1}{E_{x\delta}} (\Delta \sigma_{zz} - \Delta \sigma_c); \\ 2\Delta \varepsilon_{r\theta} &= 3 \frac{\varepsilon_0^\Delta}{\sigma_0^\Delta} \Delta \sigma_{r\theta} = 3 \frac{1}{E_{x\delta}} \Delta \sigma_{r\theta}; \\ 2\Delta \varepsilon_{rz} &= 3 \frac{\varepsilon_0^\Delta}{\sigma_0^\Delta} \Delta \sigma_{rz} = 3 \frac{1}{E_{x\delta}} \Delta \sigma_{rz}; \quad 2\Delta \varepsilon_{\theta z} = 3 \frac{\varepsilon_0^\Delta}{\sigma_0^\Delta} \Delta \sigma_{\theta z} = 3 \frac{1}{E_{x\delta}} \Delta \sigma_{\theta z}, \end{aligned} \quad (54)$$

где $\Delta \varepsilon_{rr}, \Delta \varepsilon_{\theta\theta}, \Delta \varepsilon_{zz}$ - приращения радиальной, окружной и осевой линейных деформации; $\Delta \varepsilon_{r\theta}, \Delta \varepsilon_{rz}, \Delta \varepsilon_{\theta z}$ - приращения деформаций сдвига; $\Delta \sigma_{rr}, \Delta \sigma_{\theta\theta}, \Delta \sigma_{zz}$ - приращения радиального, окружного и осевого нормальных напряжений; $\Delta \sigma_{r\theta}, \Delta \sigma_{rz}, \Delta \sigma_{\theta z}$ - приращения касательных напряжений; $\Delta \sigma_c = [\Delta \sigma_{rr} + \Delta \sigma_{\theta\theta} + \Delta \sigma_{zz}] / 3$ - среднее приращение нормальных напряжений; $\Delta \varepsilon_c = [\Delta \varepsilon_{rr} + \Delta \varepsilon_{\theta\theta} + \Delta \varepsilon_{zz}] / 3$ - среднее приращение линейных де-

формаций; $\sigma_0^\Lambda = \left(3 \left[-\Delta\sigma_{rr}\Delta\sigma_{\theta\theta} - \Delta\sigma_{\theta\theta}\Delta\sigma_{zz} - \Delta\sigma_{zz}\Delta\sigma_{rr} + \Delta\sigma_{r\theta}^2 + \Delta\sigma_{rz}^2 + \Delta\sigma_{\theta z}^2 \right] \right)^{1/2}$ - интенсивность приращений напряжений;

$\varepsilon_0^\Lambda = \left(\frac{4}{3} \left[-\Delta\varepsilon_{rr}\Delta\varepsilon_{\theta\theta} - \Delta\varepsilon_{\theta\theta}\Delta\varepsilon_{zz} - \Delta\varepsilon_{zz}\Delta\varepsilon_{rr} + 4\Delta\varepsilon_{r\theta}^2 + 4\Delta\varepsilon_{rz}^2 + 4\Delta\varepsilon_{\theta z}^2 \right] \right)^{1/2}$ - интенсивность приращений деформаций; $E_{x\bar{\theta}}$ - хордовый модуль диаграммы деформирования.

Зависимость между приращением средней линейной деформации $\Delta\varepsilon_c$ и приращением среднего нормального напряжения $\Delta\sigma_c$ принимается в виде

$$\Delta\varepsilon_c = \frac{1-2\mu_1}{E_{x\bar{\theta}}} \Delta\sigma_c, \quad (55)$$

где μ_1 - коэффициент поперечной деформации, полученный из опыта.

С учётом (55) из (54) определяются компоненты тензора приращений деформаций и представляются в виде

$$\{\Delta\varepsilon\} = \left[C_2^{\Pi} \right] \{\Delta\sigma\}. \quad (56)$$

Равенство возможных и действительных работ внешних и внутренних сил записывается в виде [18]

$$\int_V \left[\{\sigma\}^T + \frac{1}{2} \{\Delta\sigma\}^T \right] \{\Delta\varepsilon\} dV = \int_S \{\Delta v\}^T \left[\{\bar{T}\} + \frac{1}{2} \{\Delta\bar{T}\} \right] dS, \quad (57)$$

где $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{rr} \ \sigma_{\theta\theta} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{r\theta} \ \sigma_{rz} \ \sigma_{\theta z}\}$ - матрица - строка компонент тензора напряжений, полученных за j шагов нагружения; $\{\Delta v\}^T = \{\Delta u \ \Delta v \ \Delta w\}$ - матрица-строка компонент вектора приращений перемещений.

Действительная удельная работа приращений напряжений в (57) представляется разностью полной и удельной дополнительной энергии на шаге нагружения [18]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{\Delta\sigma\}^T \{\Delta\varepsilon\} &= \{\Delta\sigma\}^T \{\Delta\varepsilon\} - \frac{1}{2} \{\Delta\sigma\}^T \left[C^{\Pi} \right] \{\Delta\sigma\} = \\ &= \{\Delta\sigma\}^T [L] \{\Delta v\} - \frac{1}{2} \{\Delta\sigma\}^T \left[C^{\Pi} \right] \{\Delta\sigma\}. \end{aligned} \quad (58)$$

С учётом (58) равенство (57) запишется в виде функционала [18]

$$\begin{aligned} \Pi = \int_V \{\Delta\sigma\}^T [L] \{\Delta v\} dV - \int_V \{\Delta\sigma\}^T \left[C^{\Pi} \right] \{\Delta\sigma\} dV - \\ - \frac{1}{2} \int_S \{\Delta v\}^T \{\Delta\bar{T}\} dS - \int_S \{\Delta v\}^T \{\bar{T}\} dS + \int_V \{\sigma\}^T \{\Delta\varepsilon\} dV. \end{aligned} \quad (59)$$

В качестве дискретного элемента выбирался объемный восьмиузловой конечный элемент в форме произвольного шестигранника с узлами i, j, k, l, m, n, p, h . Узловыми неизвестными конечного элемента принимались приращения перемещений и приращения напряжений. Для выполнения численного интегрирования произвольный шестигранник отображался на куб с локальными координатам ξ, η, ζ , пределы изменения которых выражаются неравенствами $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$. Глобальные координаты r, θ, z произвольной точки конечного элемента через их узловое значения выражались трилинейными соотношениями

$$r = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}^T \left\{ r_y \right\}; \quad \theta = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}^T \left\{ \theta_y \right\}; \quad z = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}^T \left\{ z_y \right\}. \quad (60)$$

Дифференцированием (60) определялись производные глобальных координат в локальной системе и производные локальных координат в глобальной системе

Компоненты вектора приращений перемещений произвольной точки конечного элемента аппроксимировались через компоненты узловых векторов приращений перемещений трilinearными соотношениями

$$\Delta u = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \Delta u_y \right\}_{8 \times 1}; \quad \Delta v = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \Delta v_y \right\}_{8 \times 1}; \quad \Delta w = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \Delta w_y \right\}_{8 \times 1}. \quad (61)$$

Аппроксимация (61) представлялась в матричном виде

$$\left\{ \Delta v \right\}_{3 \times 1} = \left[A \right]_{3 \times 24} \left\{ \Delta v_y \right\}_{24 \times 1}. \quad (62)$$

Компоненты тензора приращений напряжений в произвольной точке конечного элемента аппроксимировались через компоненты тензоров приращений напряжений в узловых точках трilinearными соотношениями

$$\Delta \sigma_{mn} = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \Delta \sigma_{mny} \right\}_{8 \times 1}. \quad (63)$$

Аппроксимация (63) представлялась в матричном виде

$$\left\{ \Delta \sigma \right\}_{6 \times 1} = \left[G \right]_{6 \times 48} \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{48 \times 1}. \quad (64)$$

Компоненты тензора приращений деформаций в произвольной точке конечного элемента определялись через компоненты приращений перемещений узловых точек конечного элемента при учете (62) соотношением [18]

$$\left\{ \Delta \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = \left[B \right]_{6 \times 24} \left\{ \Delta v_y \right\}_{24 \times 1}. \quad (65)$$

С учётом (64) и (65) функционал (59) для конечного элемента принимался в виде [18]

$$\begin{aligned} \Pi_E = & \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T \int_V \left[G \right]_{48 \times 4}^T \left[B \right]_{6 \times 24} dV \left\{ \Delta v_y \right\}_{24 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T \int_V \left[G \right]_{48 \times 6}^T \left[C^II \right]_{6 \times 6} \left[G \right]_{6 \times 48} dV \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{48 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \Delta v_y \right\}_{1 \times 24}^T \int_S \left[A \right]_{24 \times 3}^T \left\{ \Delta \bar{T} \right\}_{3 \times 1} dS - \left\{ \Delta v_y \right\}_{1 \times 24}^T \left[\int_S \left[A \right]_{24 \times 3}^T \left\{ \bar{T} \right\}_{3 \times 1} dS + \int_V \left[B \right]_{24 \times 6}^T \left\{ \sigma \right\}_{6 \times 1} dV \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

После выполнения варьирования функционала (66) по узловым неизвестным $\left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T$ и $\left\{ \Delta v_y \right\}_{1 \times 24}^T$ конечного элемента получались системы уравнений [18]

$$\frac{\partial \Pi_E}{\partial \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T} \equiv \left[Q \right]_{48 \times 24} \left\{ \Delta v_y \right\}_{24 \times 1} - \left[H \right]_{48 \times 48} \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{48 \times 1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi_E}{\partial \left\{ \Delta v_y \right\}_{1 \times 24}^T} \equiv \left[Q \right]_{24 \times 48}^T \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{48 \times 1} - \left\{ \Delta f \right\}_{24 \times 1} - \left\{ R \right\}_{24 \times 1} = 0, \quad (67)$$

где $\left[Q \right]_{48 \times 24} = \int_V \left[G \right]_{48 \times 6}^T \left[B \right]_{6 \times 24} dV$; $\left[H \right]_{48 \times 48} = \int_V \left[G \right]_{48 \times 6}^T \left[C^II \right]_{6 \times 6} \left[G \right]_{6 \times 48} dV$; $\left\{ \Delta f \right\}_{24 \times 1} = \int_S \left[A \right]_{24 \times 3}^T \left\{ \Delta \bar{T} \right\}_{3 \times 1} dS$;

$\left\{ R \right\}_{24 \times 1} = \int_S \left[A \right]_{24 \times 3}^T \left\{ \bar{T} \right\}_{3 \times 1} dS - \int_V \left[B \right]_{24 \times 6}^T \left\{ \sigma \right\}_{6 \times 1} dV$ - невязка Рафсона.

Системы (67) представлялись в традиционной конечно - элементной форме

$$\left[k \right]_{72 \times 72} \left\{ z_y \right\}_{72 \times 1} = \left\{ f_y \right\}_{72 \times 1}, \quad (68)$$

где $\left[k \right]_{72 \times 72} = \begin{bmatrix} -\left[H \right]_{48 \times 48} & \left[Q \right]_{48 \times 24} \\ \left[Q \right]_{24 \times 48}^T & \left[0 \right]_{24 \times 24} \end{bmatrix}$ - матрица деформирования конечного элемента;

$\{z_y\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{\Delta\sigma_y\}^T & \{\Delta v_y\}^T \\ 1 \times 72 & 1 \times 24 \end{matrix} \right\}$ - вектор узловых неизвестных конечного элемента;

$\{f_y\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{0\}^T & \{\Delta f\}^T + \{R\}^T \\ 1 \times 72 & 1 \times 48 & 1 \times 24 \end{matrix} \right\}$ - вектор узловых нагрузок.

Матрица деформирования всей конструкции формируется с применением традиционной процедуры МКЭ.

Пример 4. Рассмотрено напряжённо – деформированное состояние усеченного эллипсоида с полуосями $a=0,5\text{м}$; $b=0,3\text{м}$, загруженного равномерным давлением интенсивности $q = 10,05\text{МПа}$ (Рис.4).

Были приняты следующие исходные данные: $R_n = 0,305\text{м}$; $r_n = 0,295\text{м}$; $l = 0,3\text{м}$; $r_k = 0,24\text{м}$ (Рис.5). Упруго – пластические свойства материала эллипсоида описываются диаграммой деформирования с нелинейным упрочнением. Интенсивность напряжений, соответствующая пределу текучести, $\sigma_{iy} = 200\text{МПа}$; $\varepsilon_{iy} = 0,00203918$ – интенсивность деформации, соответствующая пределу текучести. Нелинейное упрочнение описывалось зависимостью: $\sigma_i = k_1 \varepsilon_i^2 + k_2 \varepsilon_i + k_3$, где $k_1 = 78901,8\text{МПа}$; $k_2 = 8678,21\text{МПа}$; $k_3 = 181,9\text{МПа}$. Эллипсоид разбивался вдоль оси Ox на 60 частей и на 10 частей по толщине.

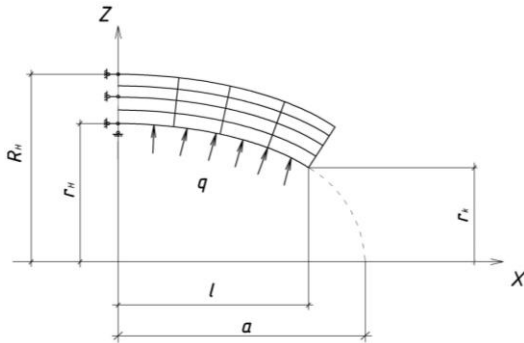


Рис. 5 Расчетная схема части усеченного эллипсоида под действием внутреннего давления

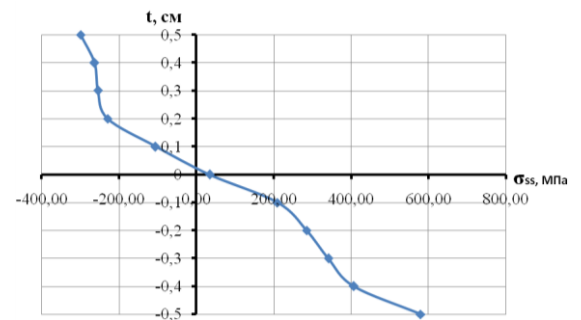


Рис.6 Эпюра меридиональных напряжений

Численные значения меридиональных напряжений в сечении $x = 0$, полученные на основе изложенного алгоритма, приведены в таблице 7 в точках с ординатами, изменяющимися в пределах от $-0,5$ до $+0,5$ по толщине оболочки. Эпюра меридиональных напряжений показана на Рис.7.

В третьем столбце таблицы 7 приведены усилия по элементарным кольцевым площадкам, подсчитанные по формуле

$$\Delta N = \Delta \sigma_{cp} \cdot \Delta Z_i \cdot 2\pi r_i,$$

где σ_{cp} - среднее значение меридионального напряжения в i -ом слое; ΔZ_i - толщина i -го слоя; r_i - радиус вращения центра i -го слоя.

Их сумма оказалась равной $\sum \Delta N = 1026 \text{ кН}$.

Проекция равнодействующей от внутреннего давления на ось Ox определялась по формуле

$$N = q\pi(r_n^2 - r_k^2) = 1022,6 \text{ кН}.$$

Уравнение статики выполняется с точностью $0,33\%$.

Координата t, см	Меридиональные напряжения σ_{ss} , МПа	Продольные силы ΔN , кН	Разница усилий в %
-0,5	579,554	916,416	
-0,4	406,442	696,727	
-0,3	341,292	585,242	
-0,2	284,666	464,134	
-0,1	209,811	231,660	
0,0	34,868	9,857	
0,1	-105,446	-69,639	
0,2	-229,256	-319,263	
0,3	-253,948	-459,449	
0,4	-262,673	-492,504	
0,5	-298,427	-537,177	0,332
Сумма внутренних усилий		1026,004	кН
Усилия от внешней нагрузки		1022,600	кН

Полученные результаты показывают надежность изложенного алгоритма для учёта упруго – пластического состояния материала в инженерных расчётах на основе МКЭ в смешанной формулировке.

Во всех случаях проводилась проверка сходимости численных результатов расчета в зависимости от количества элементов по толщине оболочки, результаты показали, что необходимая для инженерных расчетов точность получалась при количестве элементов равном 5.

На примерах цилиндрической оболочки со сферическим днищем и эллиптическим днищем различной длины показаны зоны распространения пластических деформаций по длине и толщине каждой оболочки и приведены данные, отражающие сходимость вычислительного процесса в зависимости от количества элементов дискретизации.

В пятой главе на шаге нагружения в актуальном базисе предложен геометрически нелинейный смешанный функционал на основе равенства возможных и действительных работ внешних и внутренних сил при учете разложения тензора приращений деформаций на линейную и нелинейную составляющие. В геометрически нелинейной постановке разработаны объемные конечные элементы: призматический и кольцевой с поперечными сечениями в форме произвольного четырехугольника; шестигранный - при различных условиях нагружения. Узловыми неизвестными принимались приращения перемещений и приращения напряжений. На шаге нагружения разработана инвариантная аппроксимация узловых неизвестных: векторная – для приращений перемещений, тензорная – для приращений напряжений.

Геометрические характеристики положения произвольной точки тела при переходе из M^{0t} в положение M^t определяются выражениями (13) – (18).

При переходе из M^t в положение M^{t*} точка получает перемещение, определяемое вектором в локальном базисе точки M^{0t}

$$\vec{w} = w^1 \vec{g}_1^0 + w^2 \vec{g}_2^0 + w^3 \vec{a}^0 = \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ w \right\}_{3 \times 1}. \quad (69)$$

Производные вектора (69) записываются выражениями

$$\vec{w}_{,s} = \alpha_1^1 \vec{g}_1^0 + \alpha_1^2 \vec{g}_1^0 + \alpha_1^3 \vec{a}^0; \quad \vec{w}_{,\theta} = \alpha_2^1 \vec{g}_1^0 + \alpha_2^2 \vec{g}_1^0 + \alpha_2^3 \vec{a}^0; \quad \vec{w}_{,t} = \alpha_3^1 \vec{g}_1^0 + \alpha_3^2 \vec{g}_1^0 + \alpha_3^3 \vec{a}^0, \quad (70)$$

где α_i^j - функции компонент вектора \vec{w} и их производных.

Положение точки M^{t*} определяется радиусом - вектором

$$\vec{R}^{t*} = \vec{R}^t + \vec{w}. \quad (71)$$

Векторы локального базиса точки M^* определяются дифференцированием (71) по координатам s, θ, t и записываются в виде

$$\vec{g}_1^* = \vec{R}_{,s}^{t*} = \vec{g}_1 + \vec{w}_{,s}; \quad \vec{g}_2^* = \vec{R}_{,\theta}^{t*} = \vec{g}_2 + \vec{w}_{,\theta}; \quad \vec{g}_3^* = \vec{R}_{,t}^{t*} = \vec{g}_3 + \vec{w}_{,t}. \quad (72)$$

Ковариантные компоненты тензора приращений деформаций определяются разностью компонент метрических тензоров исходного состояния на j -ом шаге и деформированного на $(j+1)$ -ом шаге и записываются соотношениями

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij}^* - g_{ij}) = \frac{1}{2} (\vec{g}_i \cdot \vec{w}_{,j} + \vec{g}_j \cdot \vec{w}_{,i} + \vec{w}_{,i} \cdot \vec{w}_{,j}) = \Delta \varepsilon_{ij}^n + \Delta \varepsilon_{ij}^h. \quad (73)$$

Тензоры линейной $\{\Delta \varepsilon^n\}^T = \{\Delta \varepsilon_{11}^n \Delta \varepsilon_{22}^n \Delta \varepsilon_{33}^n \ 2\Delta \varepsilon_{12}^n \ 2\Delta \varepsilon_{13}^n \ 2\Delta \varepsilon_{23}^n\}$ и нелинейной $\{\Delta \varepsilon^h\}^T = \{\Delta \varepsilon_{11}^h \Delta \varepsilon_{22}^h \Delta \varepsilon_{33}^h \ 2\Delta \varepsilon_{12}^h \ 2\Delta \varepsilon_{13}^h \ 2\Delta \varepsilon_{23}^h\}$ составляющих приращений деформаций с учетом (18), (72) представлялись в виде

$$\{\Delta \varepsilon^n\} = \underset{6 \times 1}{[L_n]} \underset{6 \times 3}{\{w\}} \underset{3 \times 1}{}; \quad (74)$$

$$\{\Delta \varepsilon^h\}^T = \{\vec{w}_{,s} \cdot \vec{w}_{,s} \quad \vec{w}_{,\theta} \cdot \vec{w}_{,\theta} \quad \vec{w}_{,t} \cdot \vec{w}_{,t} \quad 2\vec{w}_{,s} \cdot \vec{w}_{,t} \quad 2\vec{w}_{,s} \cdot \vec{w}_{,\theta} \quad 2\vec{w}_{,\theta} \cdot \vec{w}_{,t}\}, \quad (75)$$

На $(j+1)$ -ом шаге нагружения зависимости между компонентами тензора линейной составляющей приращений деформаций и компонентами тензора приращений напряжений $\{\Delta \sigma\}^T = \{\Delta \sigma^{11} \Delta \sigma^{22} \Delta \sigma^{33} \Delta \sigma^{12} \Delta \sigma^{13} \Delta \sigma^{23}\}$ записывались аналогично (22) в виде

$$\{\Delta \varepsilon^n\} = \underset{6 \times 1}{[C_\kappa]} \underset{6 \times 6}{\{\Delta \sigma\}} \underset{6 \times 1}{}; \quad \{\Delta \sigma\} = \underset{6 \times 6}{[C_\kappa]^{-1}} \underset{6 \times 1}{\{\Delta \varepsilon^n\}}. \quad (76)$$

В качестве дискретного элемента выбирался объемный элемент в форме произвольного восьмиугольника с узлами i, j, k, l, m, n, p, h , описанный в главе 3.

На шаге нагружения аппроксимация компонент вектора перемещения произвольной точки конечного элемента через компоненты векторов перемещений узловых точек выполнялась в двух вариантах.

1 вариант. Компоненты вектора перемещений аппроксимировались как скалярные величины.

Контравариантные компоненты вектора перемещения произвольной точки конечного элемента аппроксимировались через контравариантные компоненты векторов перемещений узловых точек трилинейными соотношениями

$$w^i = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ w_y^i \right\}_{8 \times 1}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (77)$$

Аппроксимация (77) представлялась в матричном виде

$$\{w\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 24} \{w_y\}_{24 \times 1}. \quad (78)$$

При использовании скалярной аппроксимации на шаге нагружения каждая компонента вектора перемещения произвольной точки конечного элемента аппроксимируется через узловые значения только этой же компоненты выражениями (77) и в аппроксимирующем выражении не учитываются параметры используемой криволинейной системы координат.

2 вариант. Компоненты вектора перемещений аппроксимировались с использованием предложенной инвариантной векторной аппроксимации.

На шаге нагружения вектор перемещения произвольной точки конечного элемента (69) аппроксимировался через векторы перемещений узловых точек трилинейными соотношениями

$$\vec{w} = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \vec{w}_y \right\}_{8 \times 1}. \quad (79)$$

Столбец узловых векторов перемещений выражался через их компоненты в виде

$$\left\{ \bar{w}_y \right\}_{8 \times 1} = \left[\bar{Z} \right]_{8 \times 24} \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}, \quad (80)$$

где матрица $\left[\bar{Z} \right]$ имеет вид (28).

С учетом выражения (83) вектор (82) записывался в виде

$$\bar{w} = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left[\bar{Z} \right]_{8 \times 24} \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}. \quad (81)$$

С использованием (29) выражение (79) преобразовывалось к виду

$$\bar{w} = \left\{ \bar{g}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\begin{array}{cccc} \varphi_1 \left[\gamma^i \right]^T & \varphi_2 \left[\gamma^j \right]^T & \dots \varphi_7 \left[\gamma^p \right]^T & \varphi_8 \left[\gamma^h \right]^T \end{array} \right]_{3 \times 24} \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}. \quad (82)$$

Приравниванием правых частей (69) и (82) было получено аппроксимирующее выражение для компонент вектора перемещения произвольной точки конечного элемента

$$\left\{ w \right\}_{3 \times 1} = \left[A_v \right]_{3 \times 24} \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}, \quad (83)$$

где аппроксимирующая матрица $\left[A_v \right]$ имеет вид (32).

При использовании векторной аппроксимации каждая компонента вектора перемещения произвольной точки конечного элемента аппроксимируется через узловые значения всех компонент векторов перемещений \bar{w}^ω узловых точек и через матрицы $\left[\gamma^\omega \right]$ выражения (82) учитываются параметры используемой криволинейной системы координат.

Производные вектора перемещения произвольной точки конечного элемента определялись дифференцированием (69) по криволинейным координатам s, θ, t в виде

$$\bar{w}_{,n} = \left\{ \varphi_{,n} \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \bar{w}_y \right\}_{8 \times 1}; \quad n = s, \theta, t. \quad (84)$$

С использованием соотношений (80) и (29), из выражений (84) получались зависимости производных вектора перемещения от компонент узловых перемещений для произвольной точки конечного элемента

$$\bar{w}_{,n} = \left\{ \bar{g}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\begin{array}{cccc} \varphi_{1,n} \left[\gamma^i \right]^T & \varphi_{2,n} \left[\gamma^j \right]^T & \dots \varphi_{7,n} \left[\gamma^p \right]^T & \varphi_{8,n} \left[\gamma^h \right]^T \end{array} \right]_{3 \times 24} \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}. \quad (85)$$

Приравниванием правых частей (70) и (85) после преобразований были получены выражения для производных компонент вектора перемещения произвольной точки конечного элемента в виде

$$\begin{aligned} w^1_{,s} &= \left\{ S_1 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}; \quad w^2_{,s} = \left\{ S_2 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}; \quad w^3_{,s} = \left\{ S_3 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}; \quad w^1_{,\theta} = \left\{ S_4 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}; \quad w^2_{,\theta} = \left\{ S_5 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}; \\ w^3_{,\theta} &= \left\{ S_6 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}; \quad w^1_{,t} = \left\{ S_7 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}; \quad w^2_{,t} = \left\{ S_8 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}; \quad w^3_{,t} = \left\{ S_9 \right\}_{1 \times 24}^T \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}. \end{aligned} \quad (86)$$

С использованием (83) и (86) тензор линейной части приращений деформаций (74) записывался в виде

$$\left\{ \Delta \varepsilon^n \right\}_{6 \times 1} = \left[L_n \right]_{6 \times 2} \left[A_v \right]_{3 \times 24} \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1} = \left[B \right]_{6 \times 24} \left\{ w_y \right\}_{24 \times 1}. \quad (87)$$

На шаге нагружения напряженное состояние в произвольной точке конечного элемента характеризуется тензором приращений напряжений, определяемым выражением $\Delta \tilde{\sigma} = \Delta \sigma^{11} \bar{g}_1 \bar{g}_1 + \Delta \sigma^{22} \bar{g}_2 \bar{g}_2 + \Delta \sigma^{33} \bar{g}_3 \bar{g}_3 + 2\Delta \sigma^{12} \bar{g}_1 \bar{g}_1 + 2\Delta \sigma^{13} \bar{g}_1 \bar{g}_3 + 2\Delta \sigma^{23} \bar{g}_2 \bar{g}_3 = \left\{ \Delta \sigma \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \bar{g} \right\}_{6 \times 1}$. (88)

Тензор приращений напряжений в узловой точке конечного элемента на шаге нагружения записывается в виде

$$\Delta\tilde{\sigma}^{\omega} = \Delta\sigma^{11\omega} \bar{g}_1^{\omega} \bar{g}_1^{\omega} + \Delta\sigma^{22\omega} \bar{g}_2^{\omega} \bar{g}_2^{\omega} + \Delta\sigma^{33\omega} \bar{g}_3^{\omega} \bar{g}_3^{\omega} + \Delta\sigma^{12\omega} \bar{g}_1^{\omega} \bar{g}_1^{\omega} + \\ + 2\Delta\sigma^{13\omega} \bar{g}_1^{\omega} \bar{g}_3^{\omega} + \Delta\sigma^{23\omega} \bar{g}_2^{\omega} \bar{g}_3^{\omega} = \left\{ \Delta\sigma^{\omega} \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \bar{g}^{\omega} \right\}_{6 \times 1}. \quad (89)$$

где $\left\{ \Delta\sigma^{\omega} \right\}^T = \left\{ \Delta\sigma^{11\omega} \quad \Delta\sigma^{22\omega} \quad \Delta\sigma^{33\omega} \quad \Delta\sigma^{12\omega} \quad \Delta\sigma^{13\omega} \quad \Delta\sigma^{23\omega} \right\}$ - матрица - строка контравариантных компонент тензора приращений напряжений в узловой точке конечного элемента.

На шаге нагружения аппроксимация компонент тензора приращений напряжений в произвольной точке конечного элемента выполнялась в двух вариантах.

1 вариант. Компоненты тензора приращений напряжений аппроксимировались как скалярные величины.

Контравариантные компоненты тензора приращений напряжений в произвольной точке конечного элемента на шаге нагружения аппроксимировались через контравариантные компоненты тензоров приращений напряжений в узловых точках трилинейными соотношениями

$$\Delta\sigma^{ij} = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \Delta\sigma_y^{ij} \right\}_{8 \times 1}. \quad (90)$$

Аппроксимация (90) представлялась в матричном виде

$$\left\{ \Delta\sigma \right\}_{6 \times 1} = \left[G \right]_{6 \times 48} \left\{ \Delta\sigma_y \right\}_{48 \times 1}. \quad (91)$$

При использовании скалярной аппроксимации каждая компонента тензора приращений напряжений в произвольной точке конечного элемента аппроксимируется через узловые значения только этой же компоненты и в аппроксимирующем выражении не учитываются параметры используемой криволинейной системы координат.

2 вариант. Компоненты тензора приращений напряжений аппроксимировались с использованием предложенной инвариантной тензорной аппроксимации.

Тензор приращений напряжений в произвольной точке конечного элемента аппроксимировался через тензоры приращений напряжений в узловых точках трилинейным соотношением

$$\Delta\tilde{\sigma} = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \Delta\tilde{\sigma}_y \right\}_{8 \times 1}. \quad (92)$$

Тензоры приращений напряжений в узловых точках конечного элемента представлялись через их контравариантные компоненты выражением

$$\left\{ \Delta\tilde{\sigma}_y \right\}_{8 \times 1} = \left[\bar{\bar{Z}}_a^{\omega} \right]_{8 \times 48} \left\{ \Delta\sigma_y \right\}_{48 \times 1}, \quad (93)$$

где ненулевыми элементами матрицы $\left[\bar{\bar{Z}}_a^{\omega} \right]$ являются диадные произведения векторов узловых точек в актуальном состоянии деформируемого тела.

С учетом соотношения для диадных произведений актуального базиса $\left\{ \bar{g}^{\omega} \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ \bar{g} \right\}_{1 \times 6}^T \left[\psi_a^{\omega} \right]_{6 \times 6}^T$, записываемого аналогично (43), тензор (92) преобразовывался к виду

$$\Delta\tilde{\sigma} = \left\{ \bar{g} \right\}_{1 \times 6}^T \left[\varphi_1 \left[\psi_a^i \right]_{6 \times 6}^T \quad \varphi_2 \left[\psi_a^j \right]_{6 \times 6}^T \quad \dots \quad \varphi_7 \left[\psi_a^p \right]_{6 \times 6}^T \quad \varphi_8 \left[\psi_a^h \right]_{6 \times 6}^T \right] \left\{ \Delta\sigma_y \right\}_{48 \times 1}. \quad (94)$$

Приравниванием правых частей (89) и (94) было получено матричное выражение для контравариантных компонент тензора приращений напряжений в произвольной точке конечного элемента через контравариантные компоненты тензоров приращений напряжений в узловых точках

Формирование матрицы деформирования всей конструкции выполняется с использованием традиционной процедуры МКЭ.

На основе изложенного алгоритма был разработан кольцевой объемный конечный элемент с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника для исследования НДС упругих тел в условиях плоской задачи. За узловые неизвестные были приняты приращения перемещений и приращения напряжений.

В работе [26] рассчитывалось напряженно-деформированное состояние эллиптической оболочки и усеченного эллипсоида, находящаяся под действием внутреннего давления. Показано, что использование конечных элементов, разработанных на основе векторно-тензорной аппроксимации искомых величин, приводит к решению проблемы учета смещения конечного элемента как жесткого тела в смешанной формулировке МКЭ и получению решения при значительных изменениях кривизны отсчетных поверхностей деформируемых тел.

Пример 5. Рассчитывалось напряженно-деформированное состояние усеченной сферической оболочки внутренним радиусом R и толщиной t (Рис.7) под действием внутреннего давления p при следующих исходных данных: $R=0,2\text{ м}$; $t=0,002\text{ м}$; $z_k=0,03\text{ м}$; $E=10^4\text{ МПа}$; $\mu=0,3$. В каждой узловой точке сечения $A\sim A$ была поставлена стержневая опора, препятствующая линейному смещению по горизонтали.

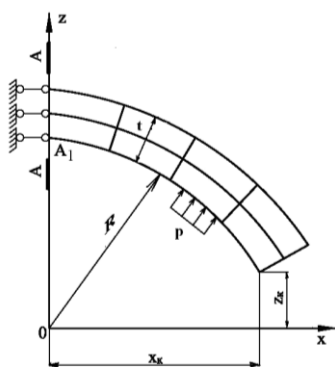


Рис. 7 Расчетная схема усеченной сферической оболочки под действием внутреннего давления p

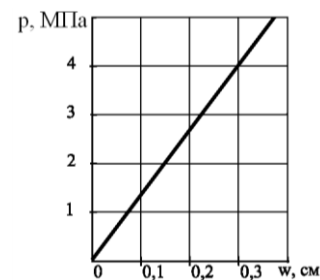


Рис. 8 Зависимость нормального перемещения w точки A_1 (см. рис. 7) от давления p

При дискретизации конструкции принималось: NM узлов по меридиану, NN узлов по толщине и одна полоска элементов по окружной координате. Сходимость вычислительного процесса обеспечивалась при NM=100 и NN=3.

Зависимость нормального перемещения w точки A_1 от давления p (Рис.8) оказалась линейной и для обоих вариантов аппроксимации перемещений и напряжений практически одинаковой (различие составило $\approx 1,5\%$ при $p=5\text{ МПа}$).

Затем в узлах сечения $A\sim A$ устанавливали вместо опорных стержней пружины с жесткостью $S=200\text{ кН/см}$, что позволяло смещаться всей конструкции как абсолютно жесткому телу на величину $x_{\eta} = 1,227\text{ см}$.

Зависимость w от p осталась неизменной при использовании векторной аппроксимации перемещений и тензорной аппроксимации напряжений.

При использовании в конечном элементе скалярной аппроксимации искомых величин уже при давлении $p=0,6\text{ МПа}$ результаты расчета оказались неприемлемыми и при $p=1\text{ МПа}$ произошел сбой вычислительного процесса.

Анализ результатов исследования показал, что векторно-тензорная аппроксимация искомых величин при смешанном методе МКЭ позволяет более корректно описать вычислительный процесс по определению НДС конструкций при наличии смещения как абсолютно жесткого тела.

Пример 6. Исследовалось напряженно-деформированное состояние части сферической оболочки под воздействием давления p (Рис.9). Опорные закрепления в сечении $A-A$ показаны на Рис.10, сечение $B-B$ свободно. Исходные данные: $R=150$ см; $a_n=10$ см; $a_k=2$ см; $t=0,2$ см; $E=10^4$ МПа; $\nu=0,3$.

Сходимость вычислительного процесса наблюдалась при $NM=50$ и $NN=3$.

Зависимости нормального перемещения точки B_1 от давления p представлены на Рис.10.

Зависимости оказались одинаковыми при использовании скалярной и тензорно-векторной аппроксимации искомых величин в КЭ.

Перемещения в рассматриваемой задаче были довольно значительными (≈ 5 толщин оболочки). Результаты расчета при использовании разработанных конечных элементов со скалярной и тензорно-векторной аппроксимацией искомых величин оказались почти одинаковыми.

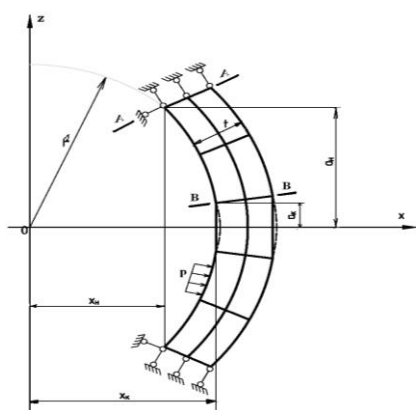


Рис. 9 Расчётная схема сферической оболочки под действием давления

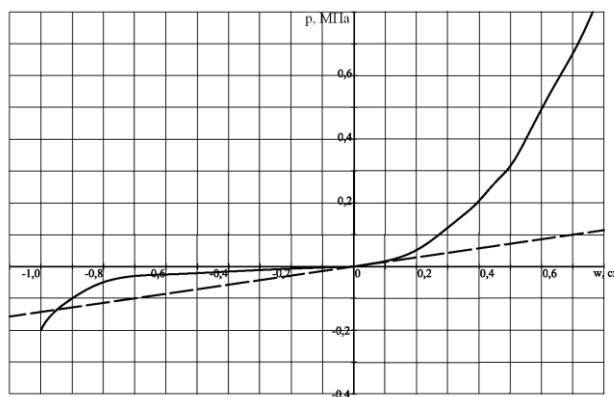


Рис. 10 Зависимости нормального перемещения w точки B_1 (см. рис. 9) от давления p

В шестой главе на шаге нагружения для упруго нелинейного материала получены в актуальном базисе определяющие соотношения на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений деформаций компонентам девиаторов приращений напряжений. Доказано, что ковариантные компоненты тензора приращений напряжений обладают аддитивными свойствами. С использованием определяющих соотношений и нелинейного смешанного функционала, предложенного в главе 5, для различных условий нагружения разработаны объемные конечные элементы: призматический и кольцевой с поперечными сечениями в форме произвольного четырехугольника; шестигранный.

Соотношения между деформациями и напряжениями. Принимается, что диаграмма деформирования материала может быть получена из опыта на простое растяжение, кручение или при сложном напряженном состоянии трубчатого элемента конструкции. Условия проведения эксперимента должны адекватно соответствовать характеру НДС рассчитываемой конструкции.

Рассматривались основные параметры диаграммы деформирования, полученной из опыта на простое растяжение образца из данного материала.

Сначала определялись истинные напряжения $\sigma_1 = \frac{N}{F_\delta} = \sigma$ (F_δ - площадь образца в деформированном состоянии) и истинные (логарифмические) деформации $\varepsilon_1 = \ln \frac{l_1}{l_0} = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ln \frac{h_0}{h_1}$ (l_0, l_1, h_0, h_1 - длина и размер квадратного поперечного сечения образца в исходном и деформированном состояниях соответственно). По этим данным строилась диаграмма растяжения в координатах ε_1, σ_1 . Далее определялась функция поперечной деформации $\omega = \frac{|\varepsilon_2|}{|\varepsilon_1|}$, по результатам опыта определялись зависимости

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{3}(1 + \omega)\varepsilon; \sigma_0 = \sigma; \Delta\varepsilon_0 = \frac{2}{3}(1 + \omega)\Delta\varepsilon; \Delta\sigma_0 = \Delta\sigma, \quad (102)$$

где $\Delta\varepsilon_0$ - приращение интенсивности деформаций; $\Delta\sigma_0$ - приращение интенсивности напряжений.

По зависимостям (102) строилась диаграмма деформирования и график зависимости функции поперечной деформации ω от интенсивности деформаций ε_0 (Рис.11):

По диаграммам растяжения и деформирования определялись и были введены в рассмотрение следующие величины:

$$E_{cp} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon} - \text{секущий модуль диаграммы растяжения};$$

$$E_{xp} = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} - \text{хордовый модуль диаграммы растяжения};$$

$$E_{cd} = \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \text{секущий модуль диаграммы деформирования};$$

$$E_{xd} = \operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{\Delta\sigma_0}{\Delta\varepsilon_0} - \text{хордовый модуль диаграммы деформирования}.$$

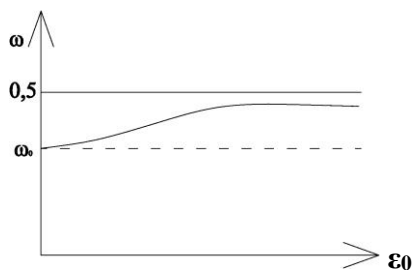


Рис.11 График зависимости функции поперечной деформации от интенсивности деформаций

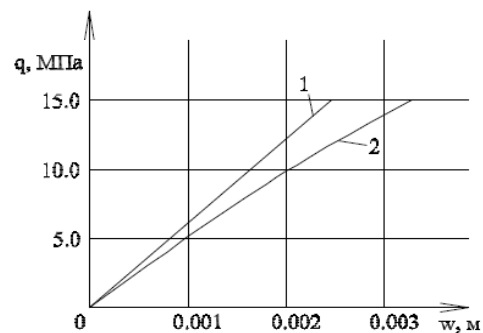


Рис. 12 График зависимости нормального перемещения от интенсивности давления

На основе (102) между ними выполнялись зависимости

$$E_{cp} = \frac{2}{3}(1 + \omega)E_{cd}; E_{xp} = \frac{2}{3}(1 + \omega)E_{xd}. \quad (103)$$

Первые инварианты тензоров напряжений $I_1(\sigma)$ и деформаций $I_1(\varepsilon)$ определяются выражениями

$$I_1(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma; \quad I_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon(1-2\omega). \quad (104)$$

Между ними имеет место зависимость

$$I_1(\sigma) = \frac{E_{cp}}{1-2\omega} I_1(\varepsilon) = \frac{2}{3} \frac{1+\omega}{1-2\omega} E_{co} I_1(\varepsilon). \quad (105)$$

Соотношения между первыми инвариантами тензоров приращений напряжений $I_1(\Delta\sigma)$ и приращений деформаций $I_1(\Delta\varepsilon)$ с использованием (102) записывались выражениями

$$I_1(\Delta\sigma) = \frac{E_{xp}}{1-2\omega} I_1(\Delta\varepsilon) = \frac{2}{3} \frac{1+\omega}{1-2\omega} E_{xo} I_1(\Delta\varepsilon). \quad (106)$$

Напряженно – деформированное состояние нагруженного тела в точке M^t характеризуется тензорами напряжений $\tilde{\sigma}$ и деформаций $\tilde{\varepsilon}$

$$\tilde{\sigma} = \sigma_{ij} \vec{g}^i \vec{g}^j = \sigma^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j; \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \vec{g}^i \vec{g}^j = \varepsilon^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j. \quad (107)$$

Тензорам напряжений и деформаций (107) соответствуют девиаторы напряжений D_σ и деформаций D_ε , записываемые в виде

$$D_\sigma = S_{ij} \vec{g}^i \vec{g}^j = S^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j; \quad D_\varepsilon = E_{ij} \vec{g}^i \vec{g}^j = E^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j. \quad (108)$$

Вторые инварианты девиаторов напряжений $I_2(D_\sigma)$ и деформаций $I_2(D_\varepsilon)$ определяются соотношениями механики сплошной среды

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{\sigma^2}{3};$$

$$I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] = \frac{(1+\omega)^2}{3} \varepsilon^2. \quad (109)$$

Инвариантные величины (102) определяются по формулам

$$\sigma_0 = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{4}{3}I_2(D_\varepsilon)} = \frac{1+\omega}{\sqrt{3}} \varepsilon. \quad (110)$$

Вторые инварианты девиаторов напряжений и деформаций определяются также выражениями

$$I_2(D_\sigma) = S^{ij} S_{ij}; \quad I_2(D_\varepsilon) = E^{ij} E_{ij}. \quad (111)$$

Инвариантные величины (110) задавались по формулам

$$\sigma_0 = \sqrt{3S^{ij} S_{ij}}; \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{4}{3} E^{ij} E_{ij}}. \quad (112)$$

Для определения соотношений между напряжениями и деформациями использовалась гипотеза о пропорциональности компонент девиатора напряжений компонентам девиатора деформаций в виде

$$S_{ij} = \varphi E_{ij}; \quad S^{ij} = \varphi E^{ij}. \quad (113)$$

где $\varphi = \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ - функция пропорциональности, определяемая подстановкой (113) в (112).

С использованием значений функции φ соотношения между напряжениями и деформациями (113) представлялась выражением

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3} E_{co} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\omega}{1-2\omega} I_1(\varepsilon) g_{ij} \right); \quad \sigma^{ij} = \frac{2}{3} E_{co} \left(g^{im} g^{jn} \varepsilon_{mn} + \frac{\omega}{1-2\omega} I_1(\varepsilon) g^{ij} \right). \quad (114)$$

На $(j+1)$ -м шаге нагружения были введены в рассмотрение в актуальном базисе следующие величины: девиатор приращений напряжений $D(\Delta\sigma)$ и девиатор приращений деформаций $D(\Delta\varepsilon)$, определяемые формулами

$$D(\Delta\sigma) = \Delta S_{ij} \bar{g}^i \bar{g}^j = \Delta S^{ij} \bar{g}_i \bar{g}_j; \quad D(\Delta\varepsilon) = \Delta E_{ij} \bar{g}^i \bar{g}^j = \Delta E^{ij} \bar{g}_i \bar{g}_j, \quad (115)$$

где $\Delta S_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1(\Delta\sigma) g_{ij}$; $\Delta S^{ij} = \Delta\sigma^{ij} - \frac{1}{3} I_1(\Delta\sigma) g^{ij}$ - ковариантные и контравариантные

компоненты девиатора приращений напряжений; $\Delta E_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} I_1(\Delta\varepsilon) g_{ij}$;

$\Delta E^{ij} = \Delta\varepsilon^{ij} - \frac{1}{3} I_1(\Delta\varepsilon) g^{ij}$ - ковариантные и контравариантные компоненты девиатора приращений деформаций; $I_1(\Delta\sigma) = \Delta\sigma_{ij} g^{ij} = \Delta\sigma^{ij} g_{ij}$ - первый инвариант тензора приращений напряжений; $I_1(\Delta\varepsilon) = \Delta\varepsilon_{ij} g^{ij} = \Delta\varepsilon^{ij} g_{ij}$ - первый инвариант тензора приращений деформаций.

Определение соотношений между компонентами тензора приращений напряжений и компонентами тензора приращений деформаций осуществлялось с использованием гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений напряжений компонентам девиатора приращений деформаций в виде

$$\Delta S_{ij} = \psi \Delta E_{ij}; \quad \Delta S^{ij} = \psi \Delta E^{ij}. \quad (116)$$

На шаге нагружения определялись инвариантные величины: σ_0^Δ - интенсивность приращений напряжений и ε_0^Δ - интенсивность приращений деформаций, вычисляемые по формулам

$$\sigma_0^\Delta = \sqrt{3\Delta S^{ij} \Delta S_{ij}}; \quad \varepsilon_0^\Delta = \sqrt{\frac{4}{3} \Delta E^{ij} \Delta E_{ij}}. \quad (117)$$

С использованием выражений (116) и (117) определялась функция пропорциональности $\psi = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0^\Delta}{\varepsilon_0^\Delta}$.

При решении геометрически нелинейной задачи считается, что справедливо равенство

$$\frac{\sigma_0^\Delta}{\varepsilon_0^\Delta} = \frac{\Delta\sigma_0}{\Delta\varepsilon_0}. \quad (118)$$

На основе равенства (118) при определении приращений напряжений на $(j+1)$ -ом шаге нагружения функция ψ заменялась хордовым модулем диаграммы деформирования и представлялась выражением

$$\psi = \frac{2}{3} E_{x0}. \quad (119)$$

С учетом (119) выражения (116) были записаны в виде

$$\Delta S_{ij} = \frac{2}{3} E_{x0} \Delta E_{ij}; \quad \Delta S^{ij} = \frac{2}{3} E_{x0} \Delta E^{ij}. \quad (120)$$

Из (120) с использованием (115), (116) получалась зависимость между компонентами тензоров приращений напряжений и компонентами тензоров приращений деформаций в виде (106), с учетом которой получается

$$\Delta\sigma_{ij} = \frac{2}{3} E_{x0} \left(\Delta\varepsilon_{ij} + \frac{\omega}{1-2\omega} I_1(\Delta\varepsilon) g_{ij} \right);$$

$$\Delta\sigma^{ij} = \frac{2}{3} E_{xd} \left(g^{im} g^{jn} \Delta\varepsilon_{mn} + \frac{\omega}{1-2\omega} I_1(\Delta\varepsilon) g^{ij} \right). \quad (121)$$

Свойство аддитивности ковариантных компонент тензора приращений деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}$ влечет аддитивность ковариантных компонент девиатора приращений деформаций ΔE_{ij} . Из первого выражения (116) вытекает, что аддитивными должны быть и величины ΔS_{ij} , а следовательно и ковариантные компоненты тензора приращений напряжений $\Delta\sigma_{ij}$. Поэтому полные напряжения возможно определять суммированием ковариантных компонент тензора приращений напряжений $\Delta\sigma_{ij}$ по формуле

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^m \Delta\sigma_{ij}, \quad (122)$$

где m - число шагов нагружения.

На основе вышеизложенных соотношений составлялись матричные зависимости (56) и (67).

Формирование матрицы деформирования конечных элементов осуществлялось по алгоритму, изложенному в главе 5 [27].

Пример 7. Рассматривалось напряженно-деформированное состояние усеченной сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления интенсивности q . Принимались следующие исходные данные: радиус внутренней поверхности $R=0,25$ м, толщина стенки оболочки $t=0,002$ м, расстояние от центра оболочки до плоскости усечения $\ell=0,2$ м, коэффициент Пуассона $\mu=0,3$. Материал оболочки нелинейно упругий, диаграмма деформирования которого описывается зависимостью $\sigma_i = a\varepsilon_i^2 + b\varepsilon_i$, где $a = -1840 \cdot 10^3$ МПа, $b = 115 \cdot 10^3$ МПа.

На Рис.12 показана зависимость нормального перемещения w точки внутренней поверхности оболочки, расположенной на оси симметрии, от интенсивности давления q (кривая 2). Прямая 1 показывает линейное решение. При перемещении, превышающем почти в 2 раза толщину оболочки, условие равновесия по напряжениям выполнялось с точностью $\approx 2\%$. Полные напряжения определялись с использованием соотношения (114) и суммы (122). Результаты вычислений оказались одинаковыми.

Полученные результаты свидетельствуют о корректности разработанного алгоритма.

Таким образом, полные напряжения можно определять суммированием ковариантных компонент тензоров приращений напряжений, полученных на каждом шаге нагружения, и в геометрически нелинейных расчетах вполне достаточно использовать соотношения между ковариантными компонентами тензоров приращений напряжений и деформаций.

Основные результаты выполненных исследований и выводы по диссертации состоят в следующем.

1. Полученный в криволинейной системе координат смешанный функционал из условия равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил позволяет сформировать матрицы деформирования объемных конечных элементов.

2. Предложенные и разработанные инвариантные аппроксимации перемещений и напряжений в криволинейной системе координат как векторных и тензорных полей соответственно в итоге позволяют выразить каждую компоненту искомой величины произвольной точки конечного элемента через все компоненты узловых искомых величин.

3. Разработанные на основе предложенных инвариантной аппроксимации и смешанного функционала в линейной постановке объемные конечные элементы (без использования упрощающих гипотез о деформировании нормали) позволяют решить проблему учета смещения конечного элемента как абсолютно жесткого тела.

4. Полученный в криволинейной системе координат для каждого шага нагружения смешанный функционал из условия равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил с заменой действительной работы на шаге нагружения разностью полной и дополнительной энергий позволяет сформировать матрицы деформирования объемных конечных элементов.

5. С использованием полученных определяющих соотношений и смешанного функционала разработаны при о нелинейно упругом деформировании материала объемные конечные элементы.

6. На основе предложенных инвариантной аппроксимации и смешанного функционала разработаны объемные конечные элементы при упруго – пластическом состоянии материала.

7. Получены в криволинейной системе координат на шаге нагружения в геометрически нелинейной постановке определяющие соотношения на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений напряжений компонентам девиатора приращений деформаций при упруго нелинейном деформировании материала.

8. С использованием полученных определяющих соотношений и смешанного функционала разработаны при упруго нелинейном деформировании материала объемные конечные элементы, представленные в виде программных модулей, готовых к использованию в программных продуктах для инженерных расчетов.

Основные результаты диссертационной работы отражены в тридцати четырех публикациях.

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК РФ и высокорейтинговых изданиях, индексируемых в базах данных «Сеть науки» (Web of Science) или «Скопус» (Scopus):

1. Клочкин, Ю.В. Сравнение различных способов аппроксимации перемещений на треугольном элементе в расчетах оболочек / Ю.В. Клочкин, А.П. Николаев, Н.А. Гуреева // Вычислительные технологии. – Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН. – 2005. – № 3. – С. 47 - 55.
2. Гуреева, Н.А. Об инвариантности векторной аппроксимации перемещений относительно систем координат / Н.А. Гуреева, Ю.В. Клочкин // Вестник ВолгГАСУ. Сер. Технические науки, 2006. - Вып.6 (20). - С. 84 - 88.
3. Гуреева, Н.А. Гибридный конечный элемент нагруженных тел / Н.А. Гуреева // Изв. вузов. Сев. – Кав. регион. Сер.: Техн. науки. – 2007. - № 1. – С. 31 – 33.
4. Гуреева, Н.А. Расчет осесимметрично нагруженных оболочек вращения на основе МКЭ в смешанной формулировке / Н.А. Гуреева, Ю. В. Клочкин, А.П. Николаев // Строит. мех. инж. констр. и сооруж. – 2007. – № 3. – С. 23 – 29.
5. Гуреева, Н.А. Восьмиузловой объемный конечный элемент оболочки вращения с неизвестными напряжениями и перемещениями в узлах / Н.А. Гуреева // Изв. вузов. Строительство. – 2007. – № 4. – С. 33 - 39.
6. Гуреева, Н.А. Восьмиугольный объемный конечный элемент в смешанной формулировке на основе функционала Рейсснера / Н.А. Гуреева // Изв. вузов: Машиностроение. - 2007. - № 5. С. 23 - 28.
7. Гуреева, Н.А. Расчет оболочки вращения при произвольном нагружении с использованием МКЭ на основе функционала Рейсснера / Н.А. Гуреева, Ю. В. Клочкин, А.П. Николаев // Вычислит. технологии. – 2008. – Т. 13. - № 4. – С. 51 – 59.
8. Гуреева, Н.А. Решение плоской задачи теории упругости с использованием варианта МКЭ в смешанной формулировке / Н.А. Гуреева // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2009. – № 2. – С.8 - 11.

9. Гуреева, Н.А. Использование аппроксимации тензорных полей в МКЭ при расчете осесимметрично нагруженных оболочек вращения / Н.А. Гуреева // Изв. вузов. Строительство. – 2009. - № 2. – С. 17 – 23.
10. Gureeva, N.A. Solving a plane problem of elasticity theory with the use of a hybrid FEM formulation / N.A. Gureeva // Russian Aeronautics. – 2009. – V. 52. – N. 2. – P. 138 – 144.
11. Гуреева, Н.А. Расчет физически нелинейных оболочек вращения на основе МКЭ в смешанной формулировке при осесимметричном нагружении / Н.А. Гуреева, Д.П. Арьков // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Материалы II международной научно-практической конференции, КГУ. – Казань, 2009. - С. 47 - 51.
12. Гуреева, Н.А. Расчет произвольных оболочек на основе МКЭ в смешанной формулировке с использованием аппроксимации тензорных полей / Н.А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А.П. Николаев // Строит. мех. инж. констр. и соорж. – 2010. - № 1. – С. 36 – 42.
13. Gureeva, N.A. Analysis of an arbitrarily loaded shell of revolution based on the finite element method in a mixed formulation / N.A. Gureeva, Y.V. Klochkov, A.P. Nikolaev // Russian Aeronautics. – 2010. – V. 53. – N. 3. – P. 250 – 256.
14. Гуреева, Н.А. Расчет произвольно нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ в смешанной формулировке / Н.А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А.П. Николаев // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2010. - № 3. – С. 7 – 10.
15. Гуреева, Н.А. Решение плоской задачи теории пластичности на основе МКЭ в смешанной формулировке / Н.А. Гуреева, Д.П. Арьков // Строит. мех. инж. констр. и соорж. – 2010. - № 4. – С. 32 – 36.
16. Гуреева, Н.А. Учет смещения конечного элемента как жесткого целого в смешанной формулировке МКЭ / Н.А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А.П. Николаев // Строит. мех. инж. констр. и соорж. – 2010. - № 3. – С. 47 – 53.
17. Арьков, Д.П. Расчёт оболочек вращения на основе МКЭ в смешанной формулировке с учётом физической нелинейности. / Д.П. Арьков, Н.А. Гуреева // Известия ВолгГТУ. - 2010. - № 4. -С. 128-132.
18. Гуреева, Н.А. Реализация деформационной теории пластичности в расчетах плосконапряженных пластин на основе МКЭ в смешанной формулировке / Н.А. Гуреева, Д.П. Арьков // Изв. Вузов. Сев. - Кав. регион. Сер.: Естест. науки. – 2011. - № 2. – С. 12 – 15.
19. Гуреева, Н.А. Расчет оболочек вращения на основе смешанного МКЭ при тензорной аппроксимации расчетных величин / Н.А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А.П. Николаев // Фундаментальные исследования. – 2011. - № 8 - 2. – С. 356 – 362.
20. Гуреева, Н.А. Расчет плосконагруженных геометрически нелинейных конструкций на основе смешанного МКЭ с тензорно-векторной аппроксимацией искомых величин / Н.А. Гуреева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Матем. Мех. Информ. – 2012. – Т. 12. - № 3. – С. 56 – 62.
21. Гуреева, Н.А. Реализация смешанного функционала в МКЭ при тензорной аппроксимации искомых величин / Н.А. Гуреева, Ю.В. Клочков, А.П. Николаев // Строит. мех. и расчет. сооружений. – 2013. - № 1 (246). – С. 45 – 52.
22. Клочков, Ю.В. Расчет оснований и фундаментов на основе метода конечных элементов в смешанной формулировке с учетом физической нелинейности / Ю.В. Клочков, А.П. Николаев, Н.А. Гуреева // Вестник ВолгГАСУ. Сер.: Строительство и архитектура. – 2013. – № 30. – С. 87 - 94.
23. Бандурин, Н.Г. Определение плоского напряженного состояния оболочек на основе смешанной формулировки метода конечных элементов с учетом геометрической нелинейности / Н.Г. Бандурин, Н.А. Гуреева // Космонавтика и ракетостроение. – 2013. – Т. 1. - № 70. – С. 69 – 75.
24. Гуреева, Н.А. Определяющие соотношения в криволинейной системе координат физически линейно деформируемого тела в геометрически нелинейной постановке / Н.А. Гуреева,

- Ю.В. Клочков, А.П. Николаев // Изв. ВолГТУ. – Вып.10. - № 23 (150). – 2014. – С. 92 - 94.
25. Гуреева, Н.А. Расчет осесимметрично нагруженной оболочки вращения с учетом геометрической нелинейности на основе смешанного МКЭ / Н.А. Гуреева, Ю.В. Клочков, А.П. Николаев // Изв. вузов. Авиационная техника. - 2014. - № 3. - С.14-19.
26. Гуреева, Н.А. Определяющие соотношения для нелинейно упругих тел и их реализация в расчете осесимметрично нагруженных оболочек вращения на основе смешанного МКЭ / Н.А. Гуреева, Ю.В. Клочков, А.П. Николаев // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2015. – том 157. – кн.2. – С. 28-39.
27. Гуреева, Н.А. Геометрически нелинейный расчет произвольно нагруженной оболочки вращения на основе смешанного МКЭ / Н.А. Гуреева, Ю.В. Клочков, А.П. Николаев // Вестник машиностроения. - № 10. – 2015. – С.12 - 20.

Публикации в других изданиях:

28. Гуреева, Н.А. Применение МКЭ в смешанной формулировке для прочностных расчетов инженерных конструкций АПК / Н.А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А.П. Николаев // Изв. Нижневолжск. агроунив. комплекса: Наука и высш. проф. образ. – 2009. - № 2. – С. 123 – 129.
29. Арьков, Д.П. Учёт физической нелинейности в смешанной формулировке МКЭ при плоском напряжённом состоянии. / Д.П. Арьков, Н.А. Гуреева // «Инженерные системы - 2010». Труды международной научно-практической конференции, РУДН. – М., 2010. - С.185-189.
30. Гуреева, Н.А. Трёхмерный конечный элемент для расчета произвольных оболочек при учете геометрической нелинейности / Н.А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А.П. Николаев // Межд. журнал прикл. и фундамент. исслед. – 2011. - № 12. – С. 83 – 86.
31. Арьков, Д.П. Применение смешанного метода конечных элементов для прочностных расчетов силосов, предназначенных для хранения зерна / Д.П. Арьков, Н.А. Гуреева // Изв. Нижневолжск. агроунив. комплекса: Наука и высш. проф. образ. – 2011. - № 1. – С. 189 – 196.
32. Бандурин, Н.Г. Реализация смешанного МКЭ при расчете плоско нагруженных конструкций с учетом геометрической нелинейности / Н.Г. Бандурин, Н.А. Гуреева // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – № 5. – С. 89 – 92.
33. Гуреева, Н.А. Расчет нелинейно упругих осесимметрично нагруженных оболочек вращения на основе смешанного МКЭ / Н.А. Гуреева, Ю.В. Клочков, А.П. Николаев // Материалы Всерос. науч. конф. «Обратные краевые задачи и их приложения». - Казань: Казанский (Приволж.) федер. ун-т, 2014. – CD-ROM.
34. Гуреева, Н.А. Получение определяющих соотношений при упругопластическом деформировании в геометрически нелинейной постановке [Электронный ресурс] / Н.А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А.П. Николаев // Материалы XI Всерос. съезда по фундамент. пробл. теоретич. и прикл. мех.-ки. – Казань: Казанский (Приволж.) федер. ун-т, 2015. – CD-ROM.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:

35. Свид. 2015616327 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа численного анализа НДС пластины на основе МКЭ в смешанной формулировке при упруго-пластическом состоянии в условиях плоского нагружения / Н.А. Гуреева, А.П. Николаев, Д.П. Арьков; правообладатель ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет» (RU). – №2015616327; заявка № 2015613001 от 16.04.15; дата регистр.05.06.15, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.
36. Свид. 2015618254 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа формирования матрицы жесткости произвольно нагруженной оболочки вращения при использовании шестигранного элемента и вычисление напряжений в заданных узлах / А.П. Николаев, А.П. Киселев, Н.А. Гуре-

ева, Р.З. Киселева; правообладатель ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет» (RU). – №2015618254; заявка № 2015615199 от 16.06.15; дата регистр.04.08.15, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.

37. Свид. 2015618408 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа дискретизации осесимметрично нагруженной оболочки вращения для реализации МКЭ / А.П. Николаев, А.П. Киселев, Н.А. Гуреева, Р.З. Киселева; правообладатель ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет» (RU). – №2015618408; заявка № 2015615200 от 16.06.15; дата регистр.07.08.15, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.

38. Свид. 2015618409 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа дискретизации произвольно нагруженной оболочки вращения для реализации МКЭ / А.П. Николаев, А.П. Киселев, Н.А. Гуреева, Р.З. Киселева; правообладатель ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет» (RU). – №2015618409; заявка № 2015615201 от 16.06.15; дата регистр.07.08.15, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.

39. Свид. 2015618410 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа формирования матрицы жесткости осесимметрично нагруженной оболочки вращения при использовании кольцевого элемента и вычисление напряжений в заданных узлах / А.П. Николаев, А.П. Киселев, Н.А. Гуреева, Р.З. Киселева; правообладатель ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет» (RU). – №2015618410; заявка № 2015615202 от 16.06.15; дата регистр.07.08.15, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.

Гуреева Наталья Анатольевна

**АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ
В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ
НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО
МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Подписано в печать 30.06.2016. Формат 60×84^{1/16}.

Усл. печ. л. 2,0. Тираж 100 экз. Заказ 329.

ИПК ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ «Нива»,
400002, г. Волгоград, пр. Университетский, 26.