На правах рукописи

Патрин Евгений Владимирович

СТРУКТУРА ОПЕРАТОРНОЙ АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЁННОЙ КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРОЙ И ОТОБРАЖЕНИЕМ

01.01.01 — вещественный, комплексный и
функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Казань
2016

Работа выполнена на кафедре Высшей математики КГЭУ «Казанский государственный энергетический университет» и на кафедре Теории относительности и гравитации ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Научный руководитель:	**Григорян Сурен Аршакович** доктор физико-математических наук, профессор заведующий кафедрой Высшей математики КГЭУ «Казанский государственный энергетический университет»
Официальные оппоненты:	**Шамаров Николай Николаевич** доктор физико-математических наук, доцент кафедры Высшей математики МФТИ (ГУ) «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
	Веселова Лидия Владимировна кандидат физико-математических наук доцент кафедры Высшей математики КНИТУ «Казанский национальный исследовательский технологический университет»
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО «Самарский Национальный исследовательский университет»

Защита состоится «17» ноября 2016 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 35.

Автореферат разослан « » сентября 2016 г. и размещён на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
кандидат физико-математических наук, доцент Е.К. Липачёв

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа посвящена описанию структуры операторных алгебр, порождённых отображением и коммутативной алгеброй. Отправным пунктом является отображение произвольного счётного множества в себя, определяющее на пространстве l^2-функций, заданных на этом множестве, оператор обратного образа, порождающий, в свою очередь, часть множества образующих. В качестве коммутативной алгебры берётся алгебра мультипликаторов, порождённая алгеброй ограниченных функций на заданном множестве.

Толчок к исследованию операторных алгебр дали работы Мюррея и фон Неймана [1] [2] [3], где исследовались слабозамкнутые операторные алгебры впоследствии названные алгебрами фон Неймана. В качестве примеров они рассматривали различные алгебры, отвечающие группе (унитарных операторов) и коммутативной алгебре (мультипликаторам). В современной терминологии такие алгебры трактуются как скрещенные произведения по некоторой динамической системе. Такие (групповые) системы возникают в математической физике при рассмотрении задач, связанных с обратимыми процессами (см., например, обзор [4]).

Первым примером C^*-алгебры, порождённой изометричным, но не унитарным оператором, явилась алгебра Тёплица. Согласно классическому определению алгебра Тёплица есть C^*-подалгебра алгебры всех ограниченных операторов на пространстве Харди, порожденная всеми тёплицевыми операторами, которая совпадает с минимальной C^*-подалгеброй, содержащей оператор умножения на z. Согласно теореме Кобурна [5] [6], алгебру Тёплица можно вложить в любую C^*-алгебру, содержащую неунитарную изометрию. Поэтому ее можно рассматривать как универсальную алгебру, порожденную образующей U с соотношением $U^*U = I$. Существует и появляется до сих пор огромное количество обобщений алгебры Тёплица. Большинство из них связано с исследованием C^*-алгебр, порожденных коммутативной полугруппой изометрий.

---

[1] Murray, F., von Neumann, J. *On rings of operators* // Ann. Math. – 1936 – V. 37 – no. 1 – P. 116-229

[2] von Neumann, J. *On rings of operators, III* // Ann. Math. – 1940 – V. 41 – no 1 – P. 94-161

[3] von Neumann, J. *On rings of operators, IV* // Ann. Math. – 1943 – V. 44 – no. 4 – P. 716-808

[4] Лодкин, А.А., Рубштейн, Б.А. *Структура и классификация факторов* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. ВИНИТИ – 1985 – Т. 26 – С. 127-176

[5] Coburn, L. A. *The C^*-algebras generated by an isometry* // I. Bull. Am. Math. Soc. – 1967 – V. 73 – P. 722-726

[6] Coburn, L. A. *The C^*-algebras generated by an isometry* // II Trans. Am. Math. Soc. – 1969 – V. 137 – P. 211-217

Можно упомянуть работы Дугласа, Мерфи, Давидсона и целый ряд других работ [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15].

В ряде работ исследовались алгебры, порождённые некоммутирующим семейством изометрий [16] [17]. В недавней работе Х. Ли [18] исследовал алгебры, порождённые некоммутативной полугруппой P с левым сокращением и единицей. Подобное внимание прежде всего объясняется возможностью приложений в математической физике, в частности к решению задач, связанных с необратимыми процессами в квантовой физике [19] [20] [21].

Исследования скрещенных произведений, отвечающих полугрупповым динамическим си-

---

[7]Berger, C. A., Coburn, L. A., Lebow, A. *Representation and index theory for C^*-algebras generated by commuting izometries* // J. Funct. Anal. – 1978 – V. 27 – no. 1 – P. 51-99

[8]Carmen, H. M., Pedro, J. P. *Properties of generalized Toeplitz operators* // Integral Equations Oper. Theory – 2001 – V. 40 – no. 1 – P. 106-126

[9]Davidson, K., Popescu, G. *Noncommutative disk algebras for semigroups* // Can. J. Math. – 1998 – V. 50 – no. 2 – P. 290-311

[10]Douglas, R. G. *On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries* // Acta. Math. – 1972 – V. 128 – no. 1 – P. 143-152

[11]Jang, S. Y. *Uniquenees property of C^*-algebras like the Toeplitz algebra* // Trends in Mathematics, Information Center of Mathematical Science – 2003 – V. 6 – no. 2 – P. 29-32

[12]Jang, S. Y. *Generalized Toeplitz algebra of a certain non-amenable semigroup* // Bull. Korean Math. Soc. – 2006 – V. 43 – no. 2 – P. 331-341

[13] Ji, R. *On the smoothed Toeplitz exthesions and K-theory* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990 – V. 109 – no. 1 – P. 31-38

[14]Murphy, G. J. *Ordered groups and Toeplitz algebras* // J. Oper. Theory – 1987 – V. 18 – no. 2 – P. 303-326

[15]Xia, J. *The K-theory and the invertibility of almost periodic Toeplitz operators* // Integral Equations Oper. Theory – 1988 – V. 11 – no. 2 – P. 267-286

[16]Jorgensen, P., Proskurin, D., Samoylenko, Y. *On C^*-algebras generated by pairs of q-commuting izometries* // arXiv:math.OA/0311115 v2 – 2003

[17]Арзуманян, В. А. *Операторные алгебры, ассоциированные с несингулярными эндоморфизмами пространства Лебега* // Известия Академии Наук Армянской ССР. Математика – 1986 – Т. 21– є 6 С. 596-616

[18]Li, X. *Semigroups C^*-algebras and amenability of semigroups* // arXiv:1105.5539v2 [math.OA] – 2012

[19]Horowski, M., Odzijewicz, A., Tereszkiewicz, A. *Some integrable systems in nonlinear quantum optics* // arXiv:math-ph/0207031 – 2002

[20]Odzijewicz, A., Horowski, M., Tereszkiewicz, A. *Integrable multi-bozon systems and orthogonal polynomials* // J. Phys. A. – 2001 – V. 34 P. 4353-4376

[21]Лебедев, А.В., Одзиевич, А. *Расширения C^*-алгебр частичными изометриями* // Матем. Сборник – 2004 – Т. 195 – no. 7 – P. 37-70

стемам, были инициированы работами В.А. Арзуманяна и А.М. Вершика [22] [23] [24]. Алгебру Арзуманяна-Вершика [25] можно определить как регулярное представление алгебры, порожденной бициклической полугруппой и коммутативной алгеброй.

Кунц в [26] впервые начал исследовать алгебру $\mathcal{O}_n$, $n \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$, порожденную семейством некоммутирующих изометрий, чьи проекторы на конечное подпространство в сумме дают единицу. С этой пионерской работы начались исследования алгебр, порожденных как изометриями, так и частичными изометриями, удовлетворяющими некоторым соотношениям.

Одним из обобщений является C^*-алгебра $\mathcal{O}_A$, порожденная операторами частичной изометрии $U_1, U_2, \ldots, U_n$, удовлетворяющих соотношениям $U_i{}^*U_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}U_iU_j{}^*$. Здесь A — $n \times n$ матрица, состоящая из нулей и единиц. Если матрица A является единичной, то алгебра $\mathcal{O}_A$ совпадает с алгеброй Кунца $\mathcal{O}_n$. Алгебра $\mathcal{O}_A$ возникает при изучении топологических марковских цепей [27] и называется алгеброй Кунца-Кригера.

Другое активно развивающееся направление исследований связано с обобщением понятия скрещенного произведения. Исследуя алгебру $\mathcal{O}_n$ (доказывая единственность и простоту), Кунц в [28] рассматривал ее как скрещенное произведение UHF-алгебры по эндоморфизму по аналогии с обычным скрещенным произведением. Эндоморфизмы C^*-алгебр стали использоваться различными авторами, например [29]. Стэйси в [30] охарактеризовал скрещенное произведение в терминах ковариантного представления. Скрещенное произведение по полугруппе эндоморфиз-

[22] Arzumanian, V., Vershik, A. *Star algebras associated with endomorphisms, in Operator algebras and group repr.* // Proc. of 1980 — OAGR Conf. – Pitman – 1984 – V. 1 – P. 17-27

[23] Арзуманян, В. А., Вершик, А. М. *Фактор-представления скрещенного произведения коммутативной C^*-алгебры и полугруппы ее автоморфизмов* // ДАН СССР – 1978 – Т. 238 – є 3 – С. 513-516

[24] Арзуманян, В. А. *Операторные алгебры, ассоциированные с несингулярными эндоморфизмами пространства Лебега* // Известия Академии Наук Армянской ССР. Математика – 1986 Т. 21 – є 6 – С. 596-616

[25] Exel, R., Vershik, A. *C^*-algebras of irreversible dinamical systems* // arXiv:math/0203185v1[math.OA] – 2002

[26] Cuntz, J. *Simple C^*-algebras generated by isometries* // Comm. Math. Phys. – 1977 –V. 57 – P. 173-185

[27] Cuntz, J., Krieger, W. *A class of C^*-algebras and topological Markov chains* // Invent. Math. – 1980 – V. 56 – no. 3 – P. 251-268

[28] Cuntz, J. *Simple C^*-algebras generated by isometries* // Comm. Math. Phys. – 1977 – V. 57 P. 173-185

[29] Doplicher, S., Roberts, J.E. *Endomorphisms of C^*-algebras, cross products and duality for compact groups* // Ann. of Math. – 1989 – V. 130 – no. 2 – P. 75-119

[30] Stacey, P. J. *Crossed product of C^*-algebras by *-endomorphisms* // J. Austral. Math. Soc., Series A – 1993 – V. 54 – P. 204-212

мов рассматривалось, например, в [31] [32]. В работах [33] [34] [35] рассматривалось частичное действие групп и частичное скрещенное произведение. В статье [36] предложен еще одна обобщающая конструкция, где эндоморфизм C^*-алгебры строится с помощью оператора частичной изометрии.

В данной работе исследуется C^*-алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$, которая является обобщением, введёной Григоряном С. А. и Кузнецовой А. Ю. в работах [37] [38] C^*-алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$, порождённой полугруппой частичных изометрий индуцированных отображением φ счётного множестве X, в себя.

Алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ является операторной алгеброй, образующими которой, помимо частичных изометрий являются мультипликаторы — операторы действующие в пространстве l^2-функций на множестве X, порождённые ограниченными функциями на X. При этом множество образующих удовлетворяет определённым соотношениям, а алгебра мультипликаторов является максимальной коммутативной подалгеброй в $\mathfrak{M}_\varphi$.

Цель работы: исследование структуры операторной алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, а также структуры ее фактор-алгебры $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ по идеалу компактных операторов.

Методика исследования. В работе применяются методы функционального анализа, гармонического анализа, теории групп, теории C^*-алгебр и их представлений, теории операторов.

Научная новизна. Предложен класс C^*-алгебр, ассоциированный с динамическими системами специального вида. В данной работе в динамической системе (X, δ, φ) отображение φ в общем случае не сохраняет тип меры.

Кроме того, алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ содержит как подалгебру алгебру $\mathfrak{A}_\varphi$, которая в некотором смысле может быть отнесена к алгебрам, порожденным семейством операторов частичной изометрии с соотношениями на соответствующие проекторы.

---

[31] Boyd, S., Keswani, N., Raeburn, I. *Faithful representations of crossed products by endomorphisms* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993 – V. 118 – no. 2 – P. 427-436

[32] Adji, S., Laca, M., Nilsen, M., Raeburn, I. *Crossed products by semigroups of endomorphisms and Toeplitz algebras of ordered groups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994 – V. 122 – no. 4 – P. 1133-1141

[33] Exel, R. *Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence* // J. Funct. Anal. – 1994 – V. 122 – P. 361-401

[34] McClanachan, K. *K-theory for partial crossed products by discrete groups* // J. Funct. Anal. – 1995 – V. 130 – P. 77-117

[35] Sieben, N. *C^*-crossed products by partial actions and actions of inverse semigroups* // Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1997 – V. 63 – P. 32-46

[36] Antonevich, A.B., Bakhtin, V.I., Lebedev, A.V. *Crossed product of a C^*-algebra by an endomorphism, coefficient algebras and transfer operators* // [arXiv:math/0502415v1][math.OA] – 2005

[37] Grigoryn, S., Kuznetsova, A. *C^*-algebras generated by mappings* // Lobachevskii J. of Math. – 2008 – V. 29 – no. 1 P. 5-8

[38] Григорян, С. А. and Кузнецова, А. Ю. *C^*-алгебры, порожденные отображениями* // Матем. Заметки – 2010 – Т. 87 є 5 – С. 694-703

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер и посвящена C^*-алгебрам, порождённым конечным или счётным семейством частичных изометрий и коммутативной подалгеброй. Рассматриваются различные ковариантные системы, ассоциированные с $\mathfrak{M}_\varphi$, и, соответственно, градуировки, порождённые этими системами. Показывается, что эти алгебры являются ядерными. Рассматриваются некоторые примеры, в частности, показано, что для инъективного (не биективного) отображения алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ представляется в виде $\overline{\mathcal{M}(X)\mathfrak{T}}$, где $\mathcal{M}(X)$ — максимальная коммутативная подалгебра в $B(l^2(X))$ и $\mathfrak{T}$ — алгебра Тёплица. Полученные результаты могут быть использованы в теории операторных алгебр, а также в различных приложениях квантовой физики.

Апробация работы. Основные результаты данной работы были доложены на:

- Десятой международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 1-7 июля 2011 г.
- Одиннадцатой международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 22–28 августа 2013 г.
- Годичной сессии Армянского Математического общества, Ереван, 2013г.
- «Лобачевские чтения-2011», Казань, 31 октября – 4 ноября 2011 г.
- Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук», Зеленодольск, 2013 г.
- «Лобачевские чтения-2014», Казань, 24 – 29 октября 2014 г.
- Двенадцатой международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 24 июня – 4 июля 2015 г.
- Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии посвящённой юбилеям П.А. и А.П. Широковых, Казань, 26 июня – 2 июля 2016 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано восемь работ, в том числе четыре статьи в изданиях из списка ВАК. Соответствующий список приведен в конце работы.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, указателя обозначений, указателя терминов и списка литературы. Общий объем диссертации 112 страниц. Библиографический список содержит 69 наименований.

Результаты, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты

1. Установлены свойства исследуемой C^*-алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ порождённой семейством частичных изометрий индуцированным отображением φ и алгеброй мультипликаторов. Показано, что $\mathfrak{M}_\varphi$ ядерна, алгебра мультипликаторов является её максимальной коммутативной подалгеброй.

2. Построены ковариантные системы на C^*-алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ с действиями мультипликативной группы унимодулярных комплексных чисел (единичной окружности) и прямого произведения счётного семейства таких окружностей (бесконечномерного тора) и получены соответствующие градуировки.

3. Определена структура неподвижных относительно действия единичной окружности и бесконечномерного тора подалгебр C^*-алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, а подалгебра неподвижная, относительно действия единичной окружности, является прямым пределом лиминальных подалгебр.

4. Определены главные идеалы фактор-алгебры алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ по идеалу компактных операторов. Показано, что фактор-алгебра представима в виде прямой суммы двух главных идеалов и описан её центр.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю С.А. Григоряну за предложенную тематику исследований, ценные советы, постоянное внимание к работе.

Основное содержание работы

Первая глава носит вводный характер и состоит из четырех параграфов. В ней вводится основной объект исследования.

Материал данной главы изложен в работе [1].

В первом параграфе вводится семейство частичных изометрий, являющееся частью множества образующих исследуемой алгебры. Дано отображение $\varphi : X \longrightarrow X$ действующее на заданном счётном множестве X с конечной мощностью прообраза для любого элемента: $\forall x \in X, \quad \mathrm{card}(\varphi^{-1}[x]) < \infty$, и отсутствием циклических элементов: $\forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^{\circ n}(x) \neq x$. В гильбертовом пространстве $l^2(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : \sum\limits_{x \in X} |f(x)|^2 < \infty\}$, со стандартным скалярным произведением, оно порождает оператор

$T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X) : \quad T_\varphi(f) := f \circ \varphi$ — *обратный образ отображения* φ.

Этот оператор, вообще говоря, неограничен, но замыкаем, (Теорема 1.1.2.) Он, в свою очередь, порождает семейство частичных изометрий $\{U_k : \quad k \in \mathrm{spec}(T_\varphi{}^* T_\varphi) \setminus \{0\}\}$ в $l^2(X)$ *и* *сам выражается через это семейство формулой:* $T_\varphi = \sum\limits_{k\in \mathrm{spec}(T_\varphi{}^* T_\varphi)\setminus\{0\}} \sqrt{k}\, U_k$, (Теорема 1.1.6.). Справедливы соотношения: $U_i U_j{}^* = 0, \quad$ при $\quad i \neq j.$

Во втором параграфе описывается C^*-алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ порождённая этим семейством частичных изометрий. Эта алгебра ранее изучалась в работах [39] [40]. Основные понятия, которые использовались при её изучении, используются и в настоящей работе.

В третьем параграфе описывается C^*-алгебра мультипликаторов $\mathcal{M}(X)$.

Рассмотрим C^*-алгебру $l^\infty(X)$ — ограниченных функций на множестве X с поточечными операциями сложения, умножения, сопряжения и равномерной нормой. Каждая функция f из $l^\infty(X)$ порождает оператор — *мультипликатор*

$$M_f : l^2(X) \longrightarrow l^2(X); \quad M_f(g) := fg, \quad \text{где} \quad g \in l^2(X).$$

Отображение $f \mapsto M_f$ является точным *-представлением $M : l^\infty(X) \longrightarrow B(l^2(X))$, сохраняющим норму: $\quad \|M_f\| = \|f\|_\infty$. *Алгебра мультипликаторов* $\mathcal{M}(X)$ — это образ алгебры $l^\infty(X)$ при этом представлении. Алгебра $\mathcal{M}(X)$ коммутативна.

Алгебра $\mathcal{M}(X)$ *является максимальной коммутативной подалгеброй в* $B(l^2(X))$, (Теорема 1.3.1.).

Элементы семейства частичных изометрий $\{U_k : \quad k \in \mathrm{spec}(T_\varphi{}^* T_\varphi) \setminus \{0\}\}$, определённых выше связаны с операторами из $\mathcal{M}(X)$ относительно умножения следующим образом:

$U_k M_f = M_{T_\varphi(f)} U_k, \quad M_f U_k{}^* = U_k{}^* M_{T_\varphi(f)}, \quad U_k^* M_f U_k = M_{\psi_k(f)}$, (Леммы 1.3.4. и 1.3.5.), где отображение $\psi_k : l^\infty(X) \longrightarrow l^\infty(X)$, определяется так:

$$\psi_k(f)(x) := \begin{cases} \frac{1}{k} \sum\limits_{y\in\varphi^{-1}[x]} f(y), & \mathrm{card}(\varphi^{-1}[x]) = k, \\ \qquad 0, & \mathrm{card}(\varphi^{-1}[x]) \neq k \end{cases}$$

В четвёртом параграфе определяется основной объект исследования данной работы C^*-алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ и описывается строение гильбертова пространства $l^2(X)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\varphi$ C^*-подалгебру $B(l^2(X))$, порождённую алгеброй $\mathcal{M}(X)$ и семейством операторов частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Алгебра $\mathcal{M}(X)$ *является максимальной коммутативной подалгеброй в* $\mathfrak{M}_\varphi$, (Теорема 1.4.1.)

[39] Grigoryn, S., Kuznetsova, A. *C^*-algebras generated by mappings* // Lobachevskii J. of Math. – 2008 – V. 29 – no 1 – P. 5-8

[40] Григорян, С.А., Кузнецова, А.Ю. *C^*-алгебры, порожденные отображениями* // Матем. Заметки – 2010 – V. 87 – no. 5 – P. 694-703

Пространство $l^2(X)$ разлагается в ортогональные прямые суммы подпространств инвариантных для операторов $T_\varphi{}^*T_\varphi$: $\quad l^2(X) \approx \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} l^2(X_k)$, и для $T_\varphi T_\varphi{}^*$: $\quad l^2(X) = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} l^2_k$, где $\forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad X_k := \{x \in X : \operatorname{card}(\varphi^{-1}[x]) = k\}$, (мы полагаем $l^2(\varnothing) := \{0\}$). $l^2(X_k) \approx \{f \in l^2(X) : (T_\varphi{}^*T_\varphi)(f) = kf\}$, и $\forall k \in \mathbb{N}, \quad l^2_k := \{f \in l^2(X) : (T_\varphi T_\varphi{}^*)(f) = kf\}$. Также полагаем: $l^2_0 := (\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} l^2_k)^\perp$.

Для всех $x \in X : \varphi^{-1}[x] \neq \varnothing$, векторы $e_x := \frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}(\varphi^{-1}[x])}} \sum\limits_{y\in\varphi^{-1}[x]} \delta_y$ образуют ортонормированный базис для $l^2_{\operatorname{card}(\varphi^{-1}[x])}$. Здесь $\delta_x \in l^2(X) : \forall x, y \in X, \quad \delta_x(y) = \delta^y_x$— символ Кронекера, образуют естественный ортонормированный базис пространства $l^2(X)$. Выполнено:

$$U_k(\delta_x) = \begin{cases} e_x, & x \in X_k; \\ 0, & x \notin X_k; \end{cases} \qquad U_k{}^*(e_x) = \begin{cases} \delta_x, & x \in X_k; \\ 0, & x \notin X_k. \end{cases}$$

Во второй главе Структурные свойства алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, состоящей из семи параграфов, описываются основные структурные свойства алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, в частности, описываются градуировки алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, порождённые ковариантными системами с группами окружности и бесконечномерного тора. Для этого изучается структура полугруппы мономов исследуемой алгебры. Кроме того, в данной главе мы доказываем ядерность алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$. С этой целью мы подробно изучим структуру подалгебры $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$. Мы показываем, что указанная подалгебра является индуктивным пределом блочных подалгебр, которые являются ядерными. Ядерность алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ доказывается с использованием условного ожидания на подалгебру $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$.

Материал данной главы изложен в работах [1], [3], [4].

В первом параграфе рассматривается полугруппа мономов алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$.

Элементарным мономом алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ назовем любой элемент из множества

$$\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}} \bigcup \{U_k{}^*\}_{k\in\mathbb{N}} \bigcup \{M_f\}_{f\in l^\infty(X)}.$$

Мономом алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ назовем любое конечное произведение элементарных мономов.

Длиной $\mathrm{d}(V)$ монома V назовем наименьшее число операторов частичной изометрии (элементарных мономов из множества $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}} \bigcup \{U_k{}^*\}_{k\in\mathbb{N}}$), участвующих в его представлении.

Определим *индекс* ind, для элементарных мономов, положив:

$$\operatorname{ind}(U_k) := 1, \quad \operatorname{ind}(U_k{}^*) := -1, \quad \operatorname{ind}(M_f) := 0.$$

Индексом $\operatorname{ind}(V)$, ненулевого монома V, назовем сумму индексов элементарных мономов, участвующих в его представлении. *Индекс нулевого монома* положим равным нулю.

Лемма 2.1.2. *Индекс монома определен корректно (не зависит от его представления в виде произведения).*

Если V_1 и V_2 — два монома, и $V_1V_2 \neq 0$, то $\operatorname{ind}(V_1V_2) = \operatorname{ind}(V_1) + \operatorname{ind}(V_2)$.

Скажем, что моном W *положительно определён*, если можно представить в виде $W = \prod\limits_{k=1}^{m} M_{f_k}{U_{j_k}}'M_{g_k}$, где ${U_{j_k}}' \in \{U_{j_k}, {U_{j_k}}^*\}$, $f_k, g_k \in l^\infty(X)$ и $\operatorname{ind}\left(\prod\limits_{k=l}^{m} M_{f_k}{U_{j_k}}'M_{g_k}\right) \geq 0$ для любого $l \geq 1$.

Лемма 2.1.5. *Пусть W — положительно определённый моном нулевого индекса, в представлении которого участвуют только операторы частичной изометрии. Тогда W — положительный оператор с конечным спектром и множество $\{\delta_x\}_{x \in X}$ является подмножеством собственных векторов оператора W.*

Обозначим через Mon_φ — полугруппу всех мономов относительно произведения, а через Mon_φ^+ — её подполугруппу, состоящую из нулевого и всех положительно определённых мономов. А также подполугруппу мономов нулевого индекса $\mathrm{Mon}_{\varphi,0}$, и $\mathrm{Mon}_{\varphi,0}^+$ — подполугруппу полугруппы Mon_φ^+, состоящая из нулевого и всех положительно определённых мономов индекса ноль. Из леммы 2.1.5 следует, что $\mathrm{Mon}_{\varphi,0}^+$ является коммутативной подполугруппой полугруппы мономов Mon_φ.

Во втором параграфе вводится градуировка на алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$.

Операторным пространством называют замкнутое подпространство C^*-алгебры. Обозначим через $\mathfrak{M}_{\varphi,n}$ операторное пространство в $\mathfrak{M}_\varphi$, порождённое мономами индекса n.

Теорема 2.2.1. *Алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй:*

$$\mathfrak{M}_\varphi = \overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{M}_{\varphi,n}}.$$

В третьем параграфе рассматриваются ковариантные системы, связанные с алгеброй $\mathfrak{M}_\varphi$.

Ковариантной системой называется тройка $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$, состоящая из C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, локально компактной группы G и непрерывного гомоморфизма $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$.

Построим ковариантную систему $(\mathfrak{M}_\varphi, \mathbb{T}, \alpha)$, где $\mathbb{T}$ — единичная окружность на $\mathbb{C}$. Сначала напомним общие определения.

Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ определяется *спектральное подпространство*

$$\mathfrak{A}_n := \{A \in \mathfrak{A} : \alpha(z)(A) = z^n A, \quad \forall z \in \mathbb{T}\}$$

и *спектральный проектор* $\mathcal{P}_n : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}, \quad \mathcal{P}_n(A) := \int\limits_{\mathbb{T}} z^{-n}\alpha(z)(A)\,\mathrm{d}z, \quad A \in \mathfrak{A}.$

Образом проектора $\mathcal{P}_n$ является спектральное подпространство $\mathfrak{A}_n$. Подалгебра $\mathfrak{A}_0$ является *неподвижной подалгеброй* для действия единичной окружности.

Определив действие единичной окружности $\alpha : \mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_\varphi)$ на мономах:

$$\alpha(z)(V) = z^{\operatorname{ind}(V)}\, V$$

и далее по линейности получим

Теорема 2.3.1. *Существует такое непрерывное представление группы $\mathbb{T}$ в группу автоморфизмов алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, что n-ое спектральное подпространство совпадает с операторным пространством $\mathfrak{M}_{\varphi,n}$.*

Таким образом $\mathbb{Z}$-градуировка $\mathfrak{M}_\varphi$ согласована с ковариантной системой $(\mathfrak{M}_\varphi, \mathbb{T}, \alpha)$.

$\mathbb{Z}$-градуировка $\mathfrak{M}_\varphi$ не является единственной.

Рассмотрим $C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ — аддитивную группу всех финитных отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}$ относительно поточечного сложения.

Каждое $\mathfrak{n} \in C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ имеет вид $\mathfrak{n} = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} n_k \delta_k, \quad n_k \in \mathbb{Z}$, где $\delta_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} : \delta_k(m) := \delta_k^m$.

Определим *мультииндекс* $\quad \text{m-ind} : \text{Mon}_\varphi \longrightarrow C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$, полагая:

$$\text{m-ind}(U_k) := \delta_k, \quad \text{m-ind}(U_k{}^*) := -\delta_k, \quad \text{m-ind}(M_f) := 0.$$

Мультииндекс монома V определим как сумму мультииндексов элементарных мономов, участвующих в его представлении.

Теорема 2.3.5. *Мультииндекс монома определен корретно.*

Следствие 2.3.6. $\text{Mon}_\varphi = \coprod\limits_{\mathfrak{n} \in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})} \text{Mon}_\varphi^{\mathfrak{n}}$, *где* $\text{Mon}_\varphi^{\mathfrak{n}}$ *—множество мономов мультииндекса* $\mathfrak{n}$.

Если V_1 и V_2 — два монома, и $V_1 V_2 \neq 0$, $\quad$ то $\quad \text{m-ind}(V_1 V_2) = \text{m-ind}(V_1) + \text{m-ind}(V_2)$. Через $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}}$ обозначим пространство, порождённое мономами из $\text{Mon}_\varphi^{\mathfrak{n}}$.

Рассмотрим $\mathbb{T}^\infty := C(\mathbb{N}, \mathbb{T})$ — компактную группу характеров дискретной группы $C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$. Заметим, что $\mathbb{T}^\infty$ является счётным декартовым произведением единичных окружностей с топологией Тихонова. По теореме Понтрягина $C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ изоморфна группе характеров $\mathbb{T}^\infty$.

Обозначим через $\chi^{\mathfrak{n}}$ характер $\mathbb{T}^\infty$, соответствующий элементу $\mathfrak{n} \in C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$.

Рассмотрим C^*-алгебру $C(\mathbb{T}^\infty, \mathfrak{M}_\varphi)$ относительно поточечных сложения и умножения с равномерной нормой, $\|f\|_\infty := \sup\{\|f(z)\| : z \in \mathbb{T}^\infty\}$, и естественной инволюцией $f^*(z) := f(z)^*$.

Определим действие $\quad \widetilde{\tau} : \mathbb{T}^\infty \longrightarrow \text{Aut}(C(\mathbb{T}^\infty, \mathfrak{M}_\varphi)) : \quad \widetilde{\tau}(z_1)(f)(z_2) = f(z_1 z_2)$.

Для каждого монома $V \in \mathfrak{M}_\varphi$ определим $\mathfrak{M}_\varphi$–значную функцию $\widetilde{V} \in C(\mathbb{T}^\infty, \mathfrak{M}_\varphi)$, полагая: $\forall z \in \mathbb{T}^\infty, \quad \widetilde{V}(z) := \chi^{\text{m-ind}(V)}(z) V$.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi$ — C^*-подалгебра $C(\mathbb{T}^\infty, \mathfrak{M}_\varphi)$, порождённая множеством $\{\widetilde{V} : V \in \text{Mon}_\varphi\}$.

Предложение 2.3.8. *Алгебра $\widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi$ инвариантна относительно действия* $\quad \widetilde{\tau}$.

C^*-алгебры $\quad \widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi$ и $\mathfrak{M}_\varphi$ изоморфны.

Теорема 2.3.9. *Существует такое непрерывное представление $\tau : \mathbb{T}^\infty \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{M}_\varphi)$, что операторное пространство в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$, порождённое мономами мультииндекса $\mathfrak{n}$, опреде-*

ляется действием группы $\mathbb{T}^\infty$, т. е.

$$\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}} = \{A \in \mathfrak{M}_\varphi : A = \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} \tau(z)(A)\chi^{-\mathfrak{n}}(z)\mathrm{d}\mu(z)\}.$$

Следствие 2.3.10. *На C^*-алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ можно задать ковариантную систему $(\mathfrak{M}_\varphi, \mathbb{T}^\infty, \tau)$.*

Таким образом, на алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ можно задать еще и $C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$-градуировку, которая порождается действием τ бесконечномерного тора, а именно

$$\mathfrak{M}_\varphi = \overline{\bigoplus_{\mathfrak{n} \in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})} \mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}}}.$$

В четвёртом параграфе приводятся определения, тензорного произведения C^*-алгебр и ядерных C^*-алгебр.

C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ называется *ядерной*, если для любой C^*-алгебры $\mathfrak{B}$, на их алгебраическом тензорном произведении $\mathfrak{A} \bigodot \mathfrak{B}$, существует единственная норма пополнение по которой превращает это произведение в C^*-алгебру.

Известно,что все конечномерные C^*-алгебры являются ядерными и прямой предел семейства ядерных алгебр – ядерная алгебра.

В пятом параграфе рассматриваются блочные подалгебры алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ и доказывается ядерность алгебры $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$

Определение[41]. *Блочной системой* в алгебре всех ограниченных операторов на некотором гильбертовом пространстве H называется семейство попарно ортогональных проекторов конечного ранга $\{Q_i\}_{i\in I}$, удовлетворяющее свойству $\sum\limits_{i\in I} Q_i = \mathrm{id}_H$. Оператор $T \in B(H)$ называется *блочно-диагональным* относительно блочной системы $\{Q_i\}_{i\in I}$, если $T = \sum\limits_{i\in I} Q_i T Q_i$, т.е. $Q_i T Q_j = 0$ при $i \neq j$. Оператор T называется *блочно-диагонализуемым*, если он является блочно-диагональным относительно некоторой блочной системы.

Пусть $\chi_{x,k}$ — индикатор множества $\varphi^{-k}[x]$. Тогда оператор $P_{x,k} := M_{\chi_{x,k}} \in \mathfrak{M}_{\varphi,0}$ является проектором на подпространство $l^2(\varphi^{-k}[x])$. Таким образом, при любом фиксированном k, алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ содержит блочную систему $\{P_{x,k}\}_{x\in X}$, и любой моном нулевого индекса является блочно-диагонализуемым.

Пусть $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m)}$ — C^*-алгебра, порождённая мономами нулевого индекса, в представлении которых участвуют частичные изометрии из конечного семейства $\{U_k\}_{k\in\{1,\dots,m\}}$. Тогда имеем цепочку вложенных друг в друга C^*-алгебр, $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(1)} \subset \mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(2)} \subset \dots \subset \mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m)} \subset \cdots$, и

$$\mathfrak{M}_{\varphi,0} = \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m)}}.$$

[41] Blackadar, B *Operator Algebras* – Springer – 2006 – Pp. 517 – V.4.1.1

Каждую подалгебру $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m)}$ в свою очередь представим в виде прямого предела цепочки вложенных друг в друга C^*-алгебр, $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m),1} \subset \mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m),2} \subset \cdots \subset \mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m),n} \subset \cdots$, т.е.

$$\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m)} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m),n}},$$

где $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m),n}$ — C^*-алгебра, порождённая мономами нулевого индекса, имеющими в своем представлении операторы частичной изометрии из множества $\{U_k\}_{k\in\{1,\dots,m\}}$ длиной не больше $2n$. Исследуем структуру блочной подалгебры $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m),n}$.

Теорема 2.5.2. *Пространство $l^2(X)$ представляется в виде $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$, где каждое H_n конечномерно, причем для любого m и n биограничение $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m),n} |_{H_n}^{H_n} \subset \mathrm{Mat}(\dim(H_n),\mathbb{C})$, где $\mathrm{Mat}(k,\mathbb{C})$ — алгебра матриц k-го порядка.*

Следствие 2.5.3. *Каждая C^*-подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(m),n}$ является ядерной.*

Теорема 2.5.4. *C^*-алгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ ядерна.*

В шестом параграфе рассматриваются условные ожидания в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$.

Они используются при доказательстве ядерности алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$.

Если заданы C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и отображение $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, то оно естественным образом, $\forall n \in \mathbb{N}$, индуцирует отображение

$$\psi^n : \mathrm{Mat}(n,\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n,\mathfrak{B}), \quad \psi^n([A^i_j]) = [\psi(A^i_j)].$$

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — C^*-алгебры и $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ — линейное отображение. Тогда ψ *положительно*, если для любого $A \in \mathfrak{A}_+$, $\psi(A) \in \mathfrak{B}_+$; *$n$-положительно*, если ψ^n положительно; и *вполне положительно*, если ψ^n n-положительно для любого n.

Условным ожиданием из C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в C^*-подалгебру $\mathfrak{B}$ называется такое вполне положительное сжимающее отображение $\theta : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, что $\theta(B) = B$ и $\theta(B_1AB_2) = B_1\theta(A)B_2$ для любых $B, B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ и $A \in \mathfrak{A}$ (см.[42] [43]). Другими словами, условное ожидание является проектором единичной нормы из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Лемма 2.6.2. *В алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ существует условное ожидание на подалгебру $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$,*

$$\mathcal{P}_0 : \mathfrak{M}_\varphi \longrightarrow \mathfrak{M}_{\varphi,0}, \quad \mathcal{P}_0(A) = \int\limits_{\mathbb{T}} \alpha(z)(A)\mathrm{d}\mu(z)$$

где μ — нормированная мера Хаара на $\mathbb{T}$.

[42] Blackadar, B. *Operator Algebras* – Springer – 2006 – Pp. 517

[43] Umegaki, U. *Conditional expectations in an operator algebra, I* // Tôhoku Math. J. –1954 – V. 6 – P. 177-181

Существует также условное ожидание на неподвижную подалгебру $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathrm{o}}$ относительно действия тора $\mathbb{T}^\infty$,

$$\mathcal{P}_{\mathrm{o}} : \mathfrak{M}_\varphi \longrightarrow \mathfrak{M}_{\varphi,\mathrm{o}}, \quad \mathcal{P}_{\mathrm{o}}(A) = \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} \tau(z)(A)\mathrm{d}\mu(z),$$

где μ — нормированная мера Хара на $\mathbb{T}^\infty$.

Лемма 2.6.3. *В алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ существует условное ожидание на подалгебру мультипликаторов:* $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} : \mathfrak{M}_\varphi \longrightarrow \mathcal{M}(X)$.

В седьмом параграфе доказывается ядерность C^*-алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$

Теорема 2.7.1. *Алгебра $\mathfrak{M}_\varphi \bigotimes_{\max} \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — произвольная C^*-алгебра, является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй.*

Здесь $\mathfrak{M}_\varphi \bigotimes_{\max} \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — пополнение алгебраического тензорного произведения $\mathfrak{M}_\varphi \bigodot \mathfrak{B}$ алгебр $\mathfrak{M}_\varphi$ и $\mathfrak{B}$ по максимальной норме.

Теорема 2.7.2. *C^*-алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ ядерна.*

Третья глава «Подалгебры и идеалы алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$.» состоит из пяти параграфов.

В ней рассматриваются некоторые подалгебры алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, в частности, показывается, что алгебра Кунца и алгебра, порожденная оператором обобщенного сдвига, являются подалгебрами $\mathfrak{M}_\varphi$, если φ — инъекция. Кроме того, рассматриваются идеалы алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, образы которых при фактор-отображении является главными идеалами в фактор-алгебре.

Материал данной главы изложен в работах [2], [3], [5], [6] , [7], [8], [9].

В первом параграфе рассматриваются неподвижные подалгебры $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathrm{o}}$ и $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$.

По построению для них выполнено $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathrm{o}} \subseteq \mathfrak{M}_{\varphi,0}$. Рассмотрим случай, когда они совпадают.

Для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ гильбертово пространство $l^2(X)$ представляется в виде прямой суммы конечномерных подпространств $l^2(\varphi^{-k}[x])$, $x \in X$. Зафиксируем произвольный базисный элемент δ_x и некоторое $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим все неуплотнимые цепи с началом в δ_x, которые заканчиваются на элементах множества $\{\delta_y\}_{y\in\varphi^{-k}[x]}$. Мы будем называть k *длиной* неуплотнимой цепи. С каждой неуплотнимой цепью с началом в δ_x и концом в δ_{y_l}, $1 \leq l \leq \mathrm{card}(\varphi^{-k}[x])$, свяжем последовательность натуральных чисел $(j_1^{(l)}, j_2^{(l)}, \ldots, j_k^{(l)})$.

Предложение 3.1.1. *Если для любого $x \in X$ и любого $k \in \mathbb{N}$ существует единственная последовательность $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, соответствующая всем неуплотнимым цепям с началом в δ_x и концом в δ_y, где $y \in \varphi^{-k}[x]$, то $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathrm{o}} = \mathfrak{M}_{\varphi,0}$.*

Здесь $j_1 = \mathrm{card}(\varphi^{-1}[\varphi(y)])$, $j_2 = \mathrm{card}(\varphi^{-1}[\varphi^2(y)]), \ldots, j_k = \mathrm{card}(\varphi^{-1}[\varphi^k(y)])$.

Предложение3.1.2. *Пусть $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathrm{o}} = \mathfrak{M}_{\varphi,0}$. Тогда подалгебра $\mathfrak{A}_{\varphi,0}$ коммутативна тогда и только тогда, когда любой элемент из X, φ-эквивалентный в каком либо порядке начальному* *элементу, сам является начальным.*

Следствие 3.1.3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) отображение φ — инъекция;

2) подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ является коммутативной.

Для случая $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{o}} \subset \mathfrak{M}_{\varphi,0}$. Определим отображение $\Psi : C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, полагая $\Psi(\delta_k) = 1$, $\Psi(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{n}(k)\delta_k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{n}(k)$. Очевидно, что $\ker(\Psi)$ является подгруппой $C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$.

Из следствия 2.3.10. вытекает, что неподвижная подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ $\ker(\Psi)$-градуирована, т. е.

$$\mathfrak{M}_{\varphi,0} = \overline{\bigoplus_{\mathfrak{n}\in\ker(\Psi)} \mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}}}.$$

Во втором параграфе рассматривается структура скрещенного произведения на алгебре $\mathfrak{M}_{\varphi}$.

Показывается, что алгебру $\mathfrak{M}_{\varphi}$ при следующих условиях на отображение φ, а именно, когда φ – сюрьекция и $\sup\{\mathrm{card}(\varphi^{-1}[x]) : x \in X\} < \infty$, можно рассматривать как полугрупповое скрещенное произведение (по Стейси): $\mathfrak{M}_{\varphi} \approx \mathfrak{M}_{\varphi,0} \rtimes_{\alpha} \mathbb{N}$.

Здесь $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{M}_{\varphi})$, $\forall A \in \mathfrak{M}_{\varphi}$, $\alpha(A) := UAU^*$, где $U := \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k$, является,при указанных выше условиях на φ, изометрией: $U^*U = \mathrm{id}_{l^2(X)}$.

Пусть π — невырожденное представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ на гильбертово пространство H, и пусть α — $*$-эндоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$. Невырожденность означает, что $\pi(I) = \mathrm{id}_H$, где $I \in M(\mathfrak{A})$ — алгебре мультипликаторов алгебры $\mathfrak{A}$ (алгебра $\mathfrak{A}$ является идеалом в алгебре $M(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A} = M(\mathfrak{A})$, когда $\mathfrak{A}$ унитальна). Тогда может существовать (но не обязательно) на $B(H)$ $*$-эндоморфизм $\beta : B(H) \longrightarrow B(H)$, такой, что $\beta(\pi(A)) = \pi(\alpha(A))$ для всех $A \in \mathfrak{A}$. В этом случае существует такое семейство изометрий $\{T_i\}_{i\in I}$ на H, что $\pi(\alpha(A)) = \sum\limits_{i\in I} T_i\pi(A)T_i{}^*$ для любого $A \in \mathfrak{A}$. Говорят, что пара $(\pi, \{T_i\}_{i\in I})$ является *ковариантным представлением* $(\mathfrak{A}, \alpha)$ кратности $\mathrm{card}(I)$.

Из ковариантного представления кратности 1 можно построить ковариантное представление произвольной кратности.

Определение[44]. *Скрещенным произведением кратности n C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathbb{N}$, по $*$-эндоморфизму α при $\mathfrak{A}_\infty \neq 0$ называется тройка $(\mathfrak{B}, i_{\mathfrak{A}}, \{t_i\}_{i\in I})$, где $\mathfrak{B}$ — C^*-алгебра, $i_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ – $*$-гомоморфизм, причем $i_{\mathfrak{A}}(I_{M(\mathfrak{A})}) = I_{M(\mathfrak{B})}$, $\{t_i\}_{i\in I}$: $t_i{}^*t_j = \delta_{ij}I$ — семейство n изометрий в $M(\mathfrak{B})$, причём выполнены условия:*

1. $i_{\mathfrak{A}}(\alpha(A)) = \sum\limits_{j\in I} t_j i_{\mathfrak{A}}(A)t_j{}^*$ *для всех $A \in \mathfrak{A}$;*

[44] Stacey, P. J. *Crossed product of C^*-algebras by *-endomorphisms* // J. Austral. Math. Soc. – 1993 – V. 54 – P. 204 -212

2. *для любого ковариантного представления* $(\pi, \{T_i\}_{i \in I})$ *пары* $(\mathfrak{A}, \alpha)$ *кратности* n *существует такое невырожденное представление* $\pi \times T$ *алгебры* $\mathfrak{B}$*, что* $(\pi \times T) \circ i_{\mathfrak{A}} = \pi$ *и* $(\pi \times T)(t_i) = T_i$ *для любого* i*;*

3. $\mathfrak{B}$ *порождена элементами вида* $i_{\mathfrak{A}}(A) t_\mu {t_\nu}^*$*.*

Символом $t_\mu {t_\nu}^*$, где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ и $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_s)$, обозначается произведение вида $t_{\mu_1} \cdots t_{\mu_r} {t_{\nu_1}}^* \cdots {t_{\nu_s}}^*$.

Для любого n и $*$-эндоморфизма α существует единственное скрещенное произведение $\mathfrak{A} \rtimes_\alpha^n \mathbb{N}$ кратности n.

Теорема 3.2.3. *Пусть* φ *— сюръективное отображение, порождающее конечное семейство частичных изометрий. Тогда* $\mathfrak{M}_\varphi \approx \mathfrak{M}_{\varphi,0} \rtimes_\alpha \mathbb{N}$ *— изоморфна скрещенному произведению, где* $\alpha : \mathfrak{M}_{\varphi,0} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\varphi,0}$ *— канонический эндоморфизм сдвига.*

Если φ — отображение, порождающее счетное семейство частичных изометрий, то определённый аналогичным образом оператор $U = U_1 + U_2 + \cdots$ не лежит в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$. Определим новую алгебру $\mathfrak{U}_\varphi$, порождённую алгеброй $\mathfrak{M}_\varphi$ и оператором U. Очевидно, что алгебра $\mathfrak{U}_\varphi$ обладает теми же свойствами, что и $\mathfrak{M}_\varphi$, нас в частности интересует $\mathbb{Z}$-градуировка. Заметим, что подалгебра $\mathfrak{U}_{\varphi,0}$ порождается $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ и оператором UU^*.

Теорема 3.2.4. *Пусть* φ *— сюръекция. Тогда* $\mathfrak{U}_\varphi$ *изоморфна скрещенному произведению* $\mathfrak{U}_{\varphi,0} \rtimes_\alpha \mathbb{N}$*, где* α *— канонический эндоморфизм сдвига.*

Третий параграф посвящён описанию идеалов в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$

Сформулируем критерий неприводимости алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, который связан с заданным на X отображением. Это отображение порождает направленный граф Γ_φ с вершинами в точках множества X и ребрами $(x, \varphi(x))$.

Теорема 3.3.1. Если граф Γ_φ связный, то $\mathfrak{M}_\varphi$ неприводима на $l^2(X)$.

Следствие 3.3.2. *Если граф* Γ_φ *связный, то* $\mathfrak{M}_\varphi$ *содержит идеал компактных операторов* $K(l^2(X))$.

В дальнейшем мы будем предполагать граф Γ_φ связным.

С помощью φ на множестве X задан частичный порядок, а именно $x \prec y$ если существует такой $m \in \mathbb{Z}_+$, что $\varphi^m(y) = x$, который распространяется на естественный базис $\{\delta_x\}_{x \in X}$, т. е. $\delta_x \prec \delta_y$ если $x \prec y$. Заметим, что из $\langle U_k(\delta_x), \delta_y \rangle \neq 0$ следует $\delta_x \prec \delta_y$, и из $\langle {U_k}^*(\delta_x), \delta_y \rangle \neq 0$ следует $\delta_y \prec \delta_x$.

Обозначим через $\mathcal{E}_x = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^{-k}[x]$. Пусть $\mathcal{P}_x$ — проектор на подпространство $\mathcal{H}_x$ с базисом $\{\delta_y : y \in \mathcal{E}_x\}$. Очевидно, что $\mathcal{P}_x \in \mathfrak{M}_\varphi$ для любого x, поскольку $l^\infty(X)$ содержит индикатор множества $\mathcal{E}_x$.

Заметим, что если $x \prec y$, то из определению множества $\mathcal{E}_x$ следует, что $\mathcal{E}_y \subset \mathcal{E}_x$, следовательно $\mathcal{P}_y < \mathcal{P}_x$. Если же элементы x и y несравнимы, то $\mathcal{E}_y \cap \mathcal{E}_x = \varnothing$.

Теорема 3.3.6. *Множества* $\{\mathcal{P}_x\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))\}_{x\in X}$, *также как и* $\{(I - \mathcal{P}_x)\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))\}_{x\in X}$ *образуют семейства замкнутых собственных идеалов в* $\mathfrak{M}_\varphi$.

Предложение 3.3.7. *Если* $x \prec y$, *то* $\mathcal{P}_y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) \subset \mathcal{P}_x\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$.

Теорема 3.3.8. *Если подмножество* $Y \subset X$*–такое, что* $\mathcal{P}_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$*–идеал в* $\mathfrak{M}_\varphi$, *то найдцтся такой* $x \in X$, *что:* $\mathcal{P}_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) \subset \mathcal{P}_x\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$,

либо: $\mathcal{P}_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) \subset (\mathrm{id} - \mathcal{P}_x)\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$.

Четвёртый параграф посвящён описанию идеалов алгебры $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi := \mathfrak{M}_\varphi / K(l^2(X))$ — фактоалгебры алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ по идеалу компактных операторов. Пусть $[\mathcal{P}_x]$ — класс эквивалентности проектора $\mathcal{P}_x$. Очевидно, что $[\mathcal{P}_x]$ — проектор в $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$. Напомним, что *главным идеалом* называется идеал, порожденный одним элементом.

Теорема 3.4.1. *Для любого* $x \in X$ *множество* $[\mathcal{P}_x]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$, *так же как и* $[\mathrm{id} - \mathcal{P}_x]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ *является главным идеалом в* $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$.

Теорема 3.4.3. *Пусть задано такое отображение* $\varphi : X \longrightarrow X$, *что существует* $Y \subset X$, *причем*

1) P_Y *— бесконечномерный проектор;*

2) $\mathrm{card}(\varphi[Y] \setminus Y) < \infty$;

3) либо $\varphi^{-1}[Y] \subset Y$, *либо* $\mathrm{card}(\varphi^{-1}[Y] \setminus Y) < \infty$.

Тогда фактор-алгебра $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ *обладает нетривиальным центром.*

Следствие 3.4.6. *Фактор-алгебра* $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ *представима в виде прямой суммы двух главных идеалов.* $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi = [\mathcal{P}_x]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi \oplus [\mathrm{id} - \mathcal{P}_x]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$.

Пятый параграф посвящен описанию некоторых примеров алгебр $\mathfrak{M}_\varphi$.

1) Положим $X = \mathbb{Z}_+$ и рассмотрим отображение: $\varphi : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+ : \quad \varphi(n) = n + 1$. Это отображение порождает коизометрический оператор $T_\varphi : l^2(\mathbb{Z}_+) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}_+)$. Поэтому оператор $T_\varphi{}^*$ – неунитарная изометрия. Следовательно, по теореме Кобурна, C^*-алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$, порождённая оператором T_φ, изоморфна алгебре Тёплица $\mathfrak{T}$.

2) Неинъективный случай.

Пусть задано отображение: $\varphi : X \longrightarrow X : \quad \forall x \in X, \quad \mathrm{card}(\varphi^{-1}[x]) = n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

С.А. Григоряном и А.Ю. Кузнецовой было доказано [64], что C^*-алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$, порождённая оператором T_φ, изоморфна алгебре Тёплица $\mathfrak{T}$, а для $n = 1, \quad \mathfrak{A}_\varphi \approx C(\mathbb{T})$ – алгебре непрерывных функций на окружности.

Для произвольного $x \in X$, рассмотрим биекцию: $\varphi^{-1}[x] \longrightarrow \{1, ..., n\}$, которую «периодически» продолжим до отображения $f : X \longrightarrow \{1, ..., n\}$ и пусть M_f – мультипликатор, порождённый этим отображением.

Теорема 3.5.2. *C^*-подалгебра алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, порождённая с помощью алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$ и мультипликатора M_f, изоморфна алгебре Кунца $\mathfrak{O}_n$.*

3) Напомним, что *оператором обобщённого сдвига* называется такой оператор T, для которого существует ортонормированный базис $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ и *вес* α_k, что $T(e_k) = \alpha_k e_{k+1}$. Если существует такое такое натуральное n, что $\alpha_{k+n} = \alpha_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то T называется *периодическим обобщённым сдвигом с периодом* n.

Предложение [45]. *C^*-алгебра $\mathfrak{M}(n)$, порождённая всеми операторами обобщённого сдвига с периодом n по отношению к фиксированному базису $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ унитарно-эквивалентна алгебре $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \bigotimes \mathfrak{T}$ и является единично-порождённой.*

Как и в примере 1) рассмотрим отображение: $\varphi : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+ : \quad \varphi(n) = n + 1$.

$\mathfrak{M}_\varphi$ порождается оператором правого сдвига ${T_\varphi}^*$ и мультипликаторами.

Предложение 3.5.4. *Алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ содержит подалгебру, изоморфную $\mathfrak{T} \bigotimes \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$, порождённую оператором обобщенного сдвига с периодом 2.*

Следствие 3.5.5. *Алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ содержит как подалгебру C^*-алгебру $\mathfrak{M}(n)$.*

Следствие 3.5.7. $\mathfrak{M}_\varphi = \overline{\mathcal{M}(X)\mathfrak{T}}$.

Следствие 3.5.8. $\mathfrak{M}_\varphi = \overline{\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{M}_{\varphi,n}}$, где:

$$\mathfrak{M}_{\varphi,n} = \begin{cases} \mathcal{M}(X){U_1}^{*n}, & \text{если} \quad n \in \mathbb{Z}_+; \\ {U_1}^{|n|}\mathcal{M}(X), & \text{если} \quad n \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

Лемма 3.5.9. *Фактор-алгебра $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ обладает тривиальным центром.*

Теорема 3.5.10. *Алгебра $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ изоморфна скрещенному произведению $\mathcal{M}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.*

4) Пусть задано отображение $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad \varphi(n) = n + 1$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ порождается унитарным оператором U_1 и мультипликаторами. Алгебра, порождённая только унитарным оператором, изоморфна алгебре непрерывных функций на окружности.

Лемма 3.5.11. *Центр фактор-алгебры $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ порождается двумя элементами.*

Фактор-алгебра $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ имеет единственное разложение,

$$\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi = [\mathcal{P}_+]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi \oplus [\mathcal{P}_-]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi,$$

где $[\mathcal{P}_+]$ и $[\mathcal{P}_-]$ классы эквивалентности бесконечномерных проекторов вида P_{Y_1} и P_{Y_2} (с Y_1 и Y_2 удовлетворяющих условиям теоремы 3.4.3), дополняющих друг друга до единичного оператора с точностью до компактного при факторизации по компактным операторам.

[45] Davidson, K.R. *C^*-Algebras by Example* – Fields Institute monographs – 1996 – P. 309 – V. 3.1

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включённых в список ВАК.

1. Патрин Е.В. Об одном классе C*-алгебр, порождённых семейством частичных изометрий и мультипликаторами / А.Ю. Кузнецова, Е.В. Патрин // Изв. вузов. Математика. – 2012, №6, С. 44–55.

2. Патрин Е.В. Об идеалах C*-алгебры порождённой семейством частичных изометрий и мультипликаторами / А.Ю. Кузнецова, Е.В. Патрин // Ученые записки Казанского Университета. – 2015. Т.157, серия физ-мат, кн. 1, С. 51-59.

3. Patrin Ye. V. On the ideals of C*-algebra generated by a family of partial isometries and multipliers / Kuznetsova A. Yu and Patrin Ye. V. // Lobachevskii Journal of Mathematics 2015, 36 (4). P. 489-495.

4. Патрин Е.В. О градуировках C^*-алгебры порождённой отображением и алгеброй мультипликаторов /Патрин Е.В. // Ученые записки Казанского Университета. – 2015. Т.157, серия физ.-матем., кн. 4, С. 56-66.

Публикации в других изданиях.

5. Патрин Е.В. Об одном критерии неприводимости алгебры $C^*_\varphi(X)$ / С.А. Григорян, А.Ю. Кузнецова, Е.В. Патрин //Изв. НАН Армении. Математика.– 2014, т. 49, №1, С.75-82.

6. Patrin Ye. V. On the structure of C*-algebra generated by a family of partial isometries and multipliers / Kuznetsova A. Yu and Patrin Ye. V. // Armenian Journal of Mathematics 2015, 7 (1). P. 50-58.

7. Патрин Е.В. Структура скрещенного произведения на C*-алгебре порождёной отображением / А.Ю. Кузнецова, Е.В. Патрин // Одиннадцатая международная казанская школа-конференция Теория функций, ее приложения и смежные вопросы, Казань – 2013.

8. Патрин Е.В. Идеалы C*-алгебры порождённой семейством частичных изометрий и мультипликаторами / Патрин Е.В // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, том 50, С. 142-144, КФУ – 2014.

9. Патрин Е.В. О некоторых идеалах C*-алгебры порождённой семейством частичных изометрий и алгеброй мультипликаторов //Патрин Е.В. // Двенадцатая международная казанская школа-конференция Теория функций, ее приложения и смежные вопросы, Казань – 2015.

10. Патрин Е.В. О градуировках C*-алгебры порождённой отображением и мультипликаторами //Патрин Е.В. // Международная конференция по алгебре анализу и геометрии посвящённая юбилеям П.А. и А.П. Широковых, Казань – 2016.