На правах рукописи

Савенкова Алеся Евгеньевна

НОВЫЕ ВАРИАНТЫ УСЛОВИЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Казань – 2016

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» на кафедре уравнений математической физики

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Пулькина Людмила Степановна**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и эконометрики ФГБОУ ВО «Самарский государственный экономический университет» **Репин Олег Александрович**
	доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики института математики и механики им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» **Уткина Елена Анатольевна**
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», г. Нальчик

Защита состоится 1 декабря 2016 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 35, НБ КФУ).

Автореферат разослан «____» ____________ 20____ года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Нелокальные задачи для уравнений с частными производными образуют важный и интересный раздел общей теории дифференциальных уравнений. Систематическое изучение нелокальных задач началось сравнительно недавно, но в настоящее время это направление бурно развивается. Это можно объяснить тем, что современный уровень развития естествознания приводит к необходимости постановки качественно новых задач и, следовательно, к необходимости разработки методов их исследования. Один из классов качественно новых задач образуют задачи с нелокальными условиями.

Нелокальными принято называть такие условия, которые представляют собой соотношения, связывающие значения искомого решения и его производных в различных граничных и внутренних точках области, в которой ищется решение задачи. Нелокальные условия возникают при изучении задач полимеризации, радиационного переноса, сверхпроводимости, излучения лазера, динамики микробных популяций, генетики, демографии. Задачи с нелокальными условиями ставятся при изучении электрических волновых явлений, моделировании жидких кристаллов, в атомной теории решеток. Первой работой, посвященной изучению задач с нелокальными условиями принято считать работу В.А. Стеклова «Задача об охлаждении неоднородного твердого тела». Задачи с нелокальными граничными условиями для уравнений различных типов, в том числе и для уравнений смешанного типа, рассматривались в работах А.А. Алиханова, А.В. Бицадзе и А.А. Самарского, А.К. Гущина, В.И. Жегалова, В.П. Михайлова, А.М. Нахушева, О.А. Репина, К.Б. Сабитова, А.Л. Скубачевского, В.А. Стеклова, Е.А. Уткиной, Ф.И. Франкля и сыграли большую роль в последующих исследованиях. Большинство полученных на данный момент результатов изложено в обзорах и монографиях А.М. Нахушева, З.А. Нахушевой, Л.С. Пулькиной, О.А. Репина, А.Л. Скубачевского.

Внимание исследователей привлекают нелокальные задачи с интегральными условиями. Систематическое исследование нелокальных задач с интегральными условиями берет начало с работ Дж.Р. Кэннона и Л.И. Камынина. В этих статьях исследованы нелокальные задачи с интегральными условиями для параболических уравнений. В дальнейшем изучение таких задач продолжено в работах А. Бузиани, Н.И. Ионкина, А.И. Кожанова, Л.А. Муравья и А.В. Филиновского и других авторов. Работ, в которых исследуются нелокальные задачи для гиперболических уравнений, намного меньше. Их интенсивное изучение началось в конце XX века. Одними из первых работ являются статьи Л.С. Пулькиной. Публикации по данной тематике можно разделить на две группы. Первая группа содержит работы, посвященные исследованию задач с интегральным аналогом задачи Гурса. Задачи, входящие в эту группу, исследованы в статьях А.Т. Асановой, В.А. Водаховой, О.М. Кечиной, З.А. Нахушевой, Л.С. Пулькиной, Е.А. Уткиной.

Ко второй группе можно отнести смешанные задачи, в которых либо краевые, либо начальные условия являются нелокальными. Такие задачи изучались в работах Г.А. Авалишвили и Д.Г. Гордезиани, С.А. Бейлина, А. Бузиани, В.В. Дмитриева, А.И. Кожанова и Л.С. Пулькиной. Различают нелокальные интегральные условия первого и второго рода. Интегральные условия первого рода - это условия, содержащие значения искомого решения только во внутренних точках области. Интегральными условиями второго рода называют соотношения, связывающие значения искомого решения и его производных как во внутренних точках области, так и в точках ее границы. В работе Л.С. Пулькиной показаны различия между условиями первого и второго рода.

В свою очередь, среди интегральных условий второго рода можно выделить следующие:

1) Интегральное условие содержит след производной по пространственной переменной. Например, в многомерном случае

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)dy = 0, (x,t) \in S_T,$$

где S_T - боковая поверхность цилиндра.

2) Интегральное условие содержит след самого решения:

$$u(x,t) + \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)dy = 0, (x,t) \in S_T,$$

где S_T - боковая поверхность цилиндра.

Будем обозначать условия вида 1) и 2) NI и DI соответственно. Для исследования задач с условиями NI и DI разработаны различные методы доказательства разрешимости, эффективные именно для каждого из этих вариантов нелокальных условий. Оказалось, что в случае NI наиболее удачным является метод компактности, позволяющий доказать разрешимость задачи в пространстве Соболева, а в случае DI можно применить как метод вспомогательных задач, так и метод сведения задачи с классическими граничными условиями, но для нагруженного уравнения.

Исследование нелокальных задач выявило их тесную связь с обратными задачами. В обратных задачах вместе с начальными и граничными условиями, характерными для той или иной прямой задачи, задается дополнительная информация, необходимость которой обусловлена наличием неизвестных коэффициентов или неизвестной правой части уравнения. Особый интерес вызывают обратные задачи с интегральными условиями переопределения, так как дополнительная информация часто поступает в усредненном виде. Основная часть работ, посвященных обратным задачам, содержит результаты исследований обратных задач для уравнений параболического типа. Отметим работы Н.И. Иванчова, В.Л. Камынина, Дж. Кэннона с соавторами, А.Б. Костина, А.И. Прилепко и Д.С. Ткаченко. Изучены вопросы существования и единственности решения. Для гиперболических уравнений исследование обратных задач является более трудным, и не всегда можно найти решение вне некоторой области. Следует отметить, что в большинстве случаев, математическая модель физического процесса, описываемая с помощью уравнения гиперболического типа, является более точной. По этой причине интерес к изучению обратных задач для уравнений гиперболическго типа возрастает. Обратные задачи для гиперболических уравнений представлены в работах Н.Л. Абашеевой, А.Х. Амирова, Н.В. Бейлиной, А.М. Денисова, М.Ю. Кокурина и С.К. Паймерова, М.М. Лаврентьева и В.Г. Романова, С.С. Павлова, В.Г. Романова, Р.Р. Сафиулловой.

Представленная диссертация содержит результаты исследований задач с нелокальными по временной переменной условиями для гиперболических уравнений, пространственно нелокальных задач для многомерного гиперболического уравнения, задач с динамическими условиями, а также обратной задачи для многомерного гиперболического уравнения.

Цель работы. Целью настоящей работы является развитие методов исследования разрешимсти задач с пространственно нелокальными условиями типа NI и доказательство с их помощью разрешимости задачи с динамическими условиями, а также разработка новых методов исследования задач с условиями DI, разработка методов исследования разрешимости задач с нелокальным по времени условием и обратной задачи для гиперболического уравнения.

Общая методика исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных уравнений, аппарат функциональных пространств С.Л. Соболева, методы априорных оценок.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты:

1. Доказана разрешимость задачи с динамическими условиями, содержащими интегральный оператор.

2. Разработан новый метод исследования задач с условиями типа DI, который оказался эффективным в случае одной пространственной переменной.

3. Доказана разрешимость задачи с нелокальным по времени условием.

4. Доказана однозначная разрешимость обратной задачи для гиперболического уравнения.

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшего развития теории нелокальных задач, для применения в исследовании обратных задач для гиперболических уравнений, для исследования прикладных задач, математическими моделями которых являются задачи с нелокальными интегральными условиями.

Апробация работы. Основные результаты исследований по теме диссертации докладывались на:

- Межвузовском научном семинаре кафедры уравнений математической физики Самарского государственного университета в 2011-2015 гг. (руководитель - д.ф-м.н., профессор Л.С. Пулькина);
- СамДифф-2011, Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Самара, 2011;
- СамДифф-2013, Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Самара, 2013;
- 1-ой Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Проблемы и перспективы развития естественных наук», Орел, 2014;
- Четырнадцатой Всероссийской молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения — 2015», Казань, 2015;
- Десятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», Самара, 2016.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в семи работах [1]-[7]. Список публикаций приведен в конце автореферата. Три статьи: [1]-[3] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК. В совместной работе [3] постановка задачи и идея доказательства принадлежит научному руководителю Л.С. Пулькиной.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы из 125 наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет 96 страниц машинописного текста.

Основное содержание работы

Во введении приведен обзор литературы, связанной с темой диссертации, обоснована актуальность, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, выносимые на защиту.

Первая глава данной работы посвящена изучению задач с пространственно нелокальными условиями для гиперболических уравнений.

В первом параграфе рассмотрена задача с динамическим нелокальным условием второго рода. К задачам с динамическими условиями приводит математическое моделирование различных физических процессов: процессов переноса водорода сквозь металлические мембраны с учетом взаимодействия с ловушками и физико-химических процессов на поверхности, колебания мембраны, контактирующей с газообразным водородом, с учетом адсорбционно-десорбционных процессов на поверхности. Описание этих процессов и построение их математических моделей можно найти в работах Ю.В. Заики. Динамические условия в задачах для гиперболических уравнений возникают при изучении акустических явлений. В частности, использование ультразвуковых волн для различных задач медицины: использование ультразвука в качестве средства, разрушающего образования в почках, для неинвазивного лечения раковых опухолей, доставки лекарств и генетического материала при восстановлении кровотока в сосудах. Реакция биологической ткани на воздействие ультразвука зависит от места воздействия, а так же от акустических и биологических свойств тканей, подвергающихся воздействию. Построение математических моделей для таких процессов изучалось в работе Т. Лу с соавторами.

Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями рассмотрена в работе Л.С. Пулькиной. Вторая производная по переменной времени появляется, если присутствует груз опредленной массы на конце пружины. Следует отметить, что наличие второй производной по времени в динамическом краевом условии в некоторых случаях позволяет найти решение с помощью метода разделения переменных. В случае динамического условия, содержащего производную первого порядка по времени, применить этот метод невозможно даже для простейшего одномерного волнового уравнения.

Основной результат первого параграфа состоит в доказательстве разрешимости следующей задачи:

Задача 1. Найти в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ решение уравнения

$$u_{tt}(x,t) - (a_{ij}u_{x_i}(x,t))_{x_j} + c(x,t)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и нелокальным условиям

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial N} + \alpha(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)dy = 0. \tag{3}$$

Результатом этого параграфа является следующее утверждение

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

$$a_{ij} \in C(Q_T), a_{ijt} \in C(Q_T), a_{ij} = a_{ji}, \mu\xi^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \nu\xi^2,$$

$$K(x,y,t) \in C(\bar{\Omega} \times \bar{Q}_T), K_t(x,y,t) \in C(\bar{\Omega} \times \bar{Q}_T),$$

$$c \in C(\bar{Q}_T), c_t \in C(\bar{Q}_T), f \in L_2(Q_T),$$

$$\alpha(t) > 0, \alpha(t) \in C(\bar{Q}_T), \alpha'(t) \in C(\bar{Q}_T).$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3).

Под обобщенным решением задачи понимается функция

$$u(x,t) \in W_2^1(Q_T),$$

удовлетворяющая условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (-u_t v_t + a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + cuv) dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \alpha(t) \frac{\partial u}{\partial t} v dsdt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v(x,t) \int\limits_\Omega K(x,y,t) u(y,t) dydsdt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,t) v(x,t) dxdt, \tag{4}$$

для всех $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условию $v(x,T) = 0$.

Во втором параграфе рассматривается задача с интегральными условиями типа DI для одномерного гиперболического уравнения:

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t). \tag{5}$$

Задача 2. Найти в Q_T решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, \tag{6}$$

а также интегральным условиям

$$\begin{aligned} u(0,t) + \int\limits_0^l K_1(x) u(x,t) dx = 0, \\ u(l,t) + \int\limits_0^l K_2(x) u(x,t) dx = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Показано, что условия (7) эквивалентны динамическим нелокальным условиям

$$a(0,t)u_x(0,t)=\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)+\beta_{11}u_{tt}(0,t)+\beta_{12}u_{tt}(l,t)+$$
$$+\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx+\int_0^l S_1(x)f(x,t)dx,$$
$$a(l,t)u_x(l,t)=\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)+\beta_{21}u_{tt}(0,t)+\beta_{22}u_{tt}(l,t)+$$
$$+\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx+\int_0^l S_2(x)f(x,t)dx, \tag{8}$$

где $\alpha_{ij},\beta_{ij},H_i,S_i$ выражаются через $a(x,t),c(x,t),K_i(x)$. Установленная эквивалентность условий позволила применить к изучению разрешимости задачи 2 метод компактности. Доказано следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

$$(a)\ a\in C(\bar{Q_T}),a_t\in C(\bar{Q_T}),a(x,t)>0\ \forall(x,t)\in\bar{Q_T},c\in C(\bar{Q_T}),$$
$$(b)\ H_i\in C(\bar{Q_T}),S_i\in C[0,l],f\in L_2(Q_T),f_t\in L_2(Q_T),$$
$$(c)\ \alpha_{11}\xi^2-2\alpha_{21}\xi\eta-\alpha_{22}\eta^2\geq 0,\beta_{11}\xi^2+2\beta_{21}\xi\eta-\beta_{22}\eta^2\geq 0,$$
$$(d)\alpha_{12}+\alpha_{21}=0,\ \alpha_{11}^{'}(t)<0,\ \alpha_{22}^{'}(t)>0,\ \beta_{12}+\beta_{21}=0.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (5), (6), (8), которое понимается как функция $u(x,t)$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt+\int_0^T v(0,T)[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^T v(0,T)[\beta_{11}u_t(0,t)+\beta_{12}u_t(l,t)]dt+\int_0^T v(0,t)\int_0^l H_1udxdt-$$
$$-\int_0^T v(l,t)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)]dt+$$
$$+\int_0^T v_t(l,t)[\beta_{21}u_t(0,t)+\beta_{22}u_t(l,t)]dt-\int_0^T v(l,t)\int_0^l H_2udxdt=$$

$$= \int_0^T \int_0^l fv dx dt - \int_0^T v(0,t) \int_0^l S_1 f dx dt + \int_0^T v(l,t) \int_0^l S_2 f dx dt. \qquad (9)$$

Отметим, что задача с условием DI для многомерного гиперболического уравнения была рассмотрена в работе А.И. Кожанова и Л.С. Пулькиной. Для доказательства ее разрешимости предложен метод, позволяющий свести задачу с нелокальным условием к обычной начально-краевой задаче для нагруженного уравнения с помощью введенного интегрального оператора, ядро которого совпадает на боковой границе с ядром нелокального условия. Одним из условий разрешимости является обратимость интегрального оператора, входящего в нелокальное условие. Предложенный в представленной диссертационной работе метод позволил снять это ограничение.

Во второй главе работы исследованы задачи с нелокальным по времени условием: прямая и обратная.

В третьем параграфе изучается задача с нелокальным интегральным условием по времени для многомерного гиперболического уравнения. Большая часть публикаций, посвященных задачам с интегральными условиями для гиперболических уравнений, содержит исследования нелокальных задач по пространственным переменным. Исследование таких задач можно найти в работах Г.А. Авалишвили и Д.Г. Гордезиани, А.И. Кожанова и Л.С. Пулькиной. Задачи с нелокальными по времени условиями исследуются в работах А.М. Абдрахманова, С.В. Кириченко, А.И. Кожанова.

Задачи с нелокальными по времени условиями тесно связаны с обратными задачами, условие переопределения в которых является интегральным. Например, в работе В.Л. Камынина и А.Б. Костина [1] условие переопределения имеет вид

$$\int_0^T \omega(\tau) u(x,\tau) d\tau = \chi(x).$$

Заданные таким образом условия можно рассматривать как модель действия некоего прибора, регистрирующего физические поля.

Основной результат третьего параграфа состоит в доказательстве разрешимости следующей задачи:

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$, T — конечное число. Обозначим $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ — боковую поверхность цилиндра Q_T.

[1] *Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении.// Дифференц. уравнения.- 2010.-Т.46.-№ 3.-С. 372-383.*

Задача 3. Найти в цилиндре Q_T решение уравнения

$$Lu \equiv u_{tt} - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t), \tag{10}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(x,t)\Big|_{S_T} = 0, \tag{11}$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{12}$$

и нелокальному условию

$$\int\limits_0^T k(t)u(x,t)dt = h(x). \tag{13}$$

Для доказательства существования единственного обобщенного решения применен метод сведения нелокального условия первого рода к условию второго рода

$$u_t(x,0) + \int\limits_0^T K(x,t)u(x,t)dt = g(x). \tag{14}$$

Это позволило свести поставленную задачу к операторному уравнению. Затем показано, что из разрешимости операторного уравнения вытекает разрешимость поставленной задачи. Найдены условия однозначной разрешимости нелокальной задачи с условием (14). Показано, что при определенных ограничениях на входные данные, решение задачи с условием (14) принадлежит пространству $W_2^2(Q_T)$ и является решением задачи 3.

В четвертом параграфе рассматривается обратная задача для многомерного гиперболического уравнения (10), где $f(x,t) = p(x)h(x,t)$, причем $p(x)$ неизвестна.

Для него поставлена следующая задача:

Задача 4.2. Найти пару функций (u, p), удовлетворяющих уравнению (10), начальным данным

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, \tag{15}$$

граничному условию

$$u(x,t)|_{S_T} = 0 \tag{16}$$

и условию переопределения

$$\int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt = E(x). \tag{17}$$

В работе выведено соотношение

$$p(x) = \frac{1}{\sigma(x)}\Big[\int\limits_0^T r(x,t)u(x,t)dt - \Delta E(x)\Big], \tag{18}$$

где $r(x,t) = H''(t) + c(x,t)H(t)$. Полученное соотношение позволило свести обратную задачу к операторному уравнению и доказать его разрешимость, а также показать, что разрешимость операторного уравнения влечет и разрешимость обратной задачи.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Людмиле Степановне Пулькиной за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание к работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Савенкова, А.Е. Обратная задача с интегральным условием переопределения для гиперболического уравнения / А.Е. Савенкова // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2014. – № 3(114). – С. 83–92.

2. Савенкова, А.Е. Об одной задаче с динамическим нелокальным условием для гиперболического уравнения / А.Е. Савенкова // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2015. – № 3(125). – С. 44–52.

3. Савенкова, А.Е. Новый метод исследования задач с условиями, содержащими след самого решения, эффективный в случае одной переменной. /Л.С. Пулькина, А.Е. Савенкова // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2016. – № 1. – С. 33–45.

Публикации в других изданиях

4. Савенкова, А.Е. Об одной обратной задаче для уравнения колебания струны / А.Е. Савенкова // СамДифф-2011. Конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения». Тезисы докладов. Самара: Универс-групп. – 2011. – С. 111.

5. Савенкова, А.Е. Об одной обратной задаче для гиперболического уравнения / А.Е. Савенкова // СамДифф-2013. Конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения». Тезисы докладов. Самара: Универс-групп. – 2013. – С. 74.

6. Савенкова, А.Е. Об одной обратной задаче для гиперболического уравнения / А.Е. Савенкова // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань. Казанское математическое общество. – 2015. – Т. 52. – С. 130–132.

7. Савенкова, А.Е. Об одной задаче с нелокальным по времени условием для многомерного гиперболического уравнения / А.Е. Савенкова // Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Самара: СамГТУ. – 2016. – С. 78–81.