На правах рукописи

Кац Давид Борисович

НОВЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСПРЯМЛЯЕМЫХ КРИВЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Специальность 01.01.01 – Вещественный,
комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань, 2016

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Гарифьянов Фархат Нургаязович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики педагогического института ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», г. Белгород **Солдатов Павел Александрович**
	кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и прикладной механики и математики ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ», г. Казань **Миронова Светлана Рафаиловна**
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»

Защита состоится «1» декабря 2016 года в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.
С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.
Автореферат разослан «____» ____________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачев

1 Общая характеристика работы

1.1 Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Исследование краевой задачи Римана для аналитических функций – это одно из известных достижений советских и российских математиков. Первоначально она возникла на основе одной из задач, поставленных Бернгардтом Риманом и Давидом Гильбертом, но в современном своем состоянии ее теория сформировалась как результат обширного цикла исследований, проведенных советскими и российскими математиками. Классикой данного раздела комплексного анализа являются многократно переизданные и переведенные на многие языки монографии Ф.Д. Гахова[1] и Н.И. Мусхелишвили[2]. К настоящему времени опубликовано значительное количество других монографий и учебников, посвященных теории краевой задачи Римана, отдельным её разделам, приложениям и обобщениям. Многие важные результаты этого раздела комплексного анализа были получены в Казани. Так, здесь Л.И. Чибрикова построила теорию краевой задачи Римана для автоморфных функций.

Если первоначально основным полем приложений краевой задачи Римана была механика сплошных сред, то теперь она применяется во множестве областей, включая столь далекие друг от друга разделы математики, как теория упругости, теория массового обслуживания, проблема моментов в различных ее вариантах, теория аппроксимации трансцендентных функций и др. Уже в самом конце XX века была обнаружена возможность успешного приложения этой теории при исследовании ортогональных многочленов, случайных матриц, рациональных аппроксимаций.

Очерки первоначальной истории исследований задачи Римана можно найти в уже упоминавшихся монографиях Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили. Поэтому здесь мы ограничимся краткими сведениями, относящимися, в основном, к истории последних десятилетий, непосредственно повлиявшей на данную работу.

Краевая задача Римана - это задача о восстановлении кусочно-голоморфной функции по заданному линейному соотношению (условию сопряжения) между ее предельными значениями с обеих сторон на заданном контуре, на котором она теряет голоморфность. Так, если Γ есть замкнутая кривая, разбивающая комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на конечную область D^+ и содержащую бесконечно удаленную точку область D^-, то речь идет об отыскании голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, предельные значения которой $\Phi^\pm(t)$ в точках $t \in \Gamma$ из областей

[1]Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – Москва: Наука, 1977.

[2]Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – Москва: Наука, 1962.

$D^{\pm}$ существуют и при любом $t \in \Gamma$ связаны граничным условием

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \tag{1}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ - заданные на кривой Γ функции. При $G(t) \equiv 1$ мы получаем задачу о скачке

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = g(t), \tag{2}$$

к которой решение задачи Римана (1) сводится методом факторизации. В свою очередь, решение задачи о скачке дается интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{g(t)\,dt}{t-z},$$

что подразумевает спрямляемость кривой Γ. Классические результаты (см. уже упоминавшиеся монографии, а также многие позднейшие работы) были получены при более ограничительном предположении кусочной гладкости контура. Лишь в самом конце семидесятых годов Е.М. Дынькиным и Т. Салимовым независимо друг от друга были получены условия существования граничных значений интеграла типа Коши по негладкой спрямляемой кривой,[3] и тем самым были созданы предпосылки для решения задачи Римана на таких кривых традиционным методом.

В то же время сама краевая задача Римана сохраняет смысл для неспрямляемых контуров. Проблема разработки новых методов решения задачи Римана, не опирающихся на классическое контурное интегрирование, стала особенно актуальной после работ Б. Мандельброта и др., предложивших точку зрения, согласно которой адекватными математическими моделями границ реальных объектов следует считать неспрямляемые и так называемые фрактальные кривые.

Переход на неспрямляемые кривые в задаче Римана был осуществлен в начале восьмидесятых годов прошлого века[4]. Первоначально был разработан не опирающийся на контурное интегрирование метод, названный методом регуляризации квазирешений. Пусть $\varphi(z)$ - дифференцируемая (но, вообще говоря, не голоморфная) в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функция, имеющая на кривой Γ требуемый скачок, то есть

$$\varphi^{+}(t) - \varphi^{-}(t) = g(t), \quad t \in \Gamma;$$

[3] R. Abreu-Blaya, J. Bory-Reyes, B. A. Kats. *The Cauchy Type Integral and Singular Integral Operator over closed Jordan curves* // Monatshefte fur Mathematik, Vol. 176, №: 1, 2015, pp. 1-15.

[4] Kats B.A. *The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions* // Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 59, №: 8, 2014, pp. 1053 - 1069.

такая функция была названа квазирешением задачи о скачке. Тогда решение этой задачи можно искать в виде $\Phi(z) = \varphi(z) - \psi(z)$, где ψ - непрерывная во всей комплексной плоскости функция, удовлетворяющая в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ равенству

$$\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}.$$

Сходным образом строится и решение задачи Римана. Можно сказать, что метод регуляризации квазирешений - это редукция данной краевой задачи к $\overline{\partial}-$уравнению. Один из важных результатов, полученных на этом этапе, заключается в обнаружении связи между разрешимостью задачи и метрической характеристикой контура, называемой чаще всего его верхней размерностью Минковского[5]. В 1982 году было установлено следующее условие разрешимости задачи о скачке на замкнутой неспрямляемой кривой.

Пусть в задаче о скачке функция g удовлетворяет условию Гёльдера

$$h_\nu(g; A) := \sup \left\{ \frac{|g(t) - g(t')|}{|t - t'|^\nu} : t, t' \in \Gamma, t \neq t' \right\} < \infty.$$

Тогда задача о скачке 2 разрешима при условии

$$\nu > \frac{1}{2} \overline{\mathrm{dm}}(\Gamma), \tag{3}$$

где $\overline{\mathrm{dm}}(\Gamma)$ - размерность Минковского контура Γ, причем это условие неулучшаемо. Последнее означает, что для любой пары заданных значений ν и d, удовлетворяющих обратному неравенству $\nu \leq d/2$, можно указать кривую Γ размерности $\overline{\mathrm{dm}}(\Gamma) = d$ и определенный на ней скачок g, удовлетворяющий условию Гёльдера с показателем ν, для которых задача не имеет решений.

Однако у этого результата вскоре обнаружились недостатки.

Первый из них - это то обстоятельство, что не всякая задача о скачке, не удовлетворяющая критерию (3), неразрешима, т.е. этот критерий дает лишь достаточное условие разрешимости. Поэтому встает вопрос о его уточнении. В этой связи возникла потребность в новых метрических характеристиках неспрямляемых кривых, более соответствующих потребностям теории задачи Римана, чем размерность Минковского. Несколько результатов в этом направлении было получено. Были введенны несколько новых метрических характеристик (уточненная метрическая размерность, аппроксимационная размерность), которые позволяют уточнить условие (3), но вычисление этих размерностей для неспрямляемых кривых крайне затруднительно.

[5] Falconer K.J. *Fractal geometry.* Wiley and Sons, 3rd edition, 2014.

Второй связан с тем, что и показатель Гёльдера, и размерность Минковского - глобальные характеристики функций и кривых; это же относится к вышеупомянутым новым версиям метрических размерностей. Но неспрямлемая кривая может оказаться весьма неоднородной (в простейшем случае она может состоять из участков разных размерностей). Кроме того, характеристики типа размерностей не учитывают присущую неспрямляемым кривым локальную асимметрию. Действительно, части, на которые неспрямляемая кривая делит окрестность любой своей точки, могут обладать совершенно разными метрическими свойствами. Это значит, что предельные значения функции в точках неспрямляемых кривых с разных сторон тоже обладают разными свойствами, и это должно учитываться при решении краевых задач.

Таким образом, актуальной является проблема построения новых характеристик неспрямляемых кривых, которые носят локальный характер, учитывают возможную локальную асимметрию кривой и позволяют улучшить условия разрешимости краевой задачи Римана, не будучи столь сложны в вычислении.

Другую проблему, также рассматриваемую в данной работе, можно описать так. Как уже отмечалось, основным инструментом решения краевой задачи Римана является интеграл типа Коши, то есть криволинейный интеграл с ядром Коши по контуру, на котором поставлена задача. Для неспрямляемых контуров такой интеграл не определен. Если нам удастся построить обобщенный криволинейный интеграл по неспрямляемым контурам, то это окажется полезным не только при решении самой задачи Римана, но и других задач, решение которых в случае кусочно-гладких контуров представимо в виде контурных интегралов с иными ядрами. Это делает актуальной проблему построения такого обобщенного криволинейного интеграла.

1.2 Цели работы

Целями работы являются построение новых характеристик неспрямляемых кривых, которые носят локальный характер, учитывают возможную локальную асимметрию кривой и позволяют улучшить условия разрешимости краевой задачи Римана, не будучи столь сложны в вычислении и получение с их помощью новых, более точных, условий разрешимости краевой задачи Римана и связанных с ней задач на неспрямляемых контурах, а также разработка обобщения криволинейного интеграла для неспрямляемых контуров и решение ряда краевых задач с его помощью.

1.3 Научная новизна

Результаты, представленные в диссертации, являются новыми. Введено и исследовано новое семейство метрических характеристик неспрямляемых кривых, позволяющих учесть локальные свойства этих кривых, включая их возможную локальную асимметрию. С помощью этих характеристик получены новые условия разрешимости различных версий краевой задачи Римана для аналитических функций и их обобщений на неспрямляемых контурах, причем во всех случаях, когда какие-либо условия разрешимости той или иной задачи были известны ранее, вновь найденные условия улучшают их. Построен обобщенный контурный интеграл по неспрямляемым кривым, позволяющий решать ряд краевых задач на таких кривых.

1.4 Теоретическая и практическая значимость

Исследование носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение при решении различных краевых задач для аналитических функций и их обобщений в областях с неспрямляемыми границами, а также в тех областях теоретической и прикладной математики, где такие задачи используются в качестве инструмента исследований.

1.5 Методология и методы исследования.

Применяются методы комплексного и функционального анализа. В работе используется упомянутый выше метод регуляризации квазирешений, впервые предложенный для решения задач этого круга в начале 80-х годов, а также современные подходы к характеризации свойств подмножеств евклидовых пространств через различные метрические размерности и коразмерности. Обобщенный контурный интеграл по неспрямляемым кривым строится в виде распределения.

1.6 Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты, достигнутые автором:

1. Введены и исследованы новые метрические характеристики неспрямляемых кривых – показатели Марцинкевича, дающие количественное описание локальных свойств таких кривых, включая их локальную асимметрию;

2. Получены новые, более точные условия разрешимости краевой задачи Римана для голоморфных функций на неспрямляемых кривых;

3. Исследовано новое обобщение понятия криволинейного интеграла на случай неспрямляемых контуров, установлены условия его существования и единственности и даны приложения при решении краевых задач;

4. Решены некоторые версии задачи Римана, которые для неспрямляемых контуров ранее решены не были;

5. Краевая задача Римана для решений уравнения Бельтрами решена новым способом, что позволило ослабить условия ее разрешимости.

1.7 Апробация работы

Результаты работы докладывались на международных научных конгрессах, конференциях и школах:

– 9 конгресс ISAAC (International Society of Analysis, its Applications and Computations), Краков, 2013;

– 11 казанская международная школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 2013;

– V и VI международные научные конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», Ростов-на-Дону, 2015 и 2016,

а также на научных семинарах Казанского университета и на региональных и университетских конкурсах научных работ молодых ученых в Казани и Ульяновске, где занимали первые и призовые места.

1.8 Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в тринадцати работах [1]-[13]. Список публикаций приведен в конце автореферата. Пять статей: [1]-[5] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК. Работы [5], [10]-[12] опубликованы в изданиях, индексируемых в базах данных SCOPUS. В совместных публикациях соавторам Ф.Н. Гарифьянову и Б.А. Кацу принадлежит постановка задач, а доказательства выполнены диссертантом.

1.9 Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 92 наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет 94 страницы машинописного текста.

2 Основное содержание работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Введение содержит обоснование актуальности исследования, краткую историю вопроса за последние десятилетия, некоторые предварительные сведения и краткое описание основных результатов.

Глава 1. Показатели Марцинкевича и их приложения в теории краевой задачи Римана на замкнутых неспрямляемых кривых

Прежде всего в этой главе вводятся новые метрические характеристики замкнутых неспрямляемых кривых. Пусть Γ – простая замкнутая кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, разбивающая ее на области $D^{\pm}$, $\infty \in D^{-}$, а μ – мера на $\mathbb{C}$. Обозначим $B(t,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-t| < r\}$, $B^{\pm}(t,r) := \{z \in D^{\pm} : |z-t| < r\}$. Показателем Марцинкевича кривой Γ в точке $t \in \Gamma$ относительно меры μ называется величина

$$\mathfrak{m}(\Gamma; t; \mu) := \sup\{p : \lim_{r \to 0} \int\limits_{B(t,r)} \frac{d\mu}{\operatorname{dist}^p(z,\Gamma)} < \infty\},$$

а внутренним и внешним показателями Марцинкевича – величины

$$\mathfrak{m}^{\pm}(\Gamma; t; \mu) := \sup\{p : \lim_{r \to 0} \int\limits_{B^{\pm}(t,r)} \frac{d\mu}{\operatorname{dist}^p(z,\Gamma)} < \infty\}.$$

Название «показатели Марцинкевича» предложено автором в связи с тем, что Йозеф Марцинкевич[6] использовал содержащие величину $\operatorname{dist}(z,E)$ интегралы по дополнению множества E для характеризации метрических свойств этого множества. Эти показатели являются локальными характеристиками кривой Γ, а введение внутреннего и внешнего показателей позволяет учесть ее возможную локальную асимметрию. В качестве меры μ в работе чаще всего используется мера Лебега на плоскости; в этом случае символ μ в обозначениях показателей Марцинкевича опускается.

В первом параграфе устанавливается ряд свойств этих характеристик, их связи с другими метрическими характеристиками неспрямляемых кривых, а также приводятся примеры их вычисления. Установлено, что величины $\mathfrak{m}^{\pm}(\Gamma; t)$ лежат в промежутке $[2 - \overline{\operatorname{dm}}\,\Gamma; 1]$; если кривая Γ спрямляема, то они равны 1, а для неспрямляемой кривой могут принимать любое значение из этого отрезка.

[6]см. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* – Москва: Мир. – 1973.

Во втором параграфе первой главы решается краевая задача о скачке. Как уже отмечалось, показатели Марцинкевича локальны, и в целях более полного использования этого обстоятельства в работе используется локальное условие Гельдера. Пусть на кривой Γ задана действительная функция $v(t) \mapsto (0;1]$. Будем относить заданную на Γ функцию $f(t)$ к классу $H_v^{loc}(\Gamma)$, если у каждой точки $t \in \Gamma$ есть окрестность, в которой f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $v(t)$. В этом параграфе задача о скачке решается методом регуляризации квазирешений. Сначала устанавливается существование этих квазирешений, то есть решений задачи в классе дифференцируемых, но, вообще говоря, не аналитических функций. Доказано, что первые производные такого квазирешения интегрируемы в окрестности произвольной точки $t \in \Gamma$ в любой степени, меньшей величины $(1 - v(t))^{-1}\mathfrak{m}^*(\Gamma;t)$, где

$$\mathfrak{m}^*(\Gamma;t) := \max\{\mathfrak{m}^+(\Gamma;t); \mathfrak{m}^-(\Gamma;t)\},$$

и отсюда следует

Теорема 1 *Если $g \in H_v^{loc}(\Gamma)$ и*

$$v(t) > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}^*(\Gamma;t) \tag{4}$$

при любом $t \in \Gamma$, то задача о скачке (2) на замкнутой кривой Γ разрешима.

Установлено существование кривых и точек t на них, для которых

$$\mathfrak{m}^*(\Gamma;t) > 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma,$$

то есть условие (4) менее ограничительно, чем условие (3) даже для постоянных показателей в условии Гельдера.

Далее в этом параграфе обсуждается единственность решения задачи о скачке. Теорема единственности также формулируется в локальной форме. Пусть на Γ задана еще одна функция $\mu(t) \mapsto (0;1]$, а класс $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$ состоит из заданных в окрестности Γ функций $\Phi(z)$ со следующим свойством: у каждой точки $t \in \Gamma$ есть окрестность N такая что Φ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\mu(t)$ в $N \cap D^+$ и в $N \cap D^-$. Аналогично определяется класс $\mathcal{H}_\mu(A)$, где $A \subset \Gamma$.

Теорема 2 *Если $g \in H_v^{loc}(\Gamma)$ и при любом $t \in \Gamma$ выполнены условия (4) и*

$$\mathrm{dmh}(\Gamma) - 1 < \mu(t) < \frac{\mathfrak{m}^*(\Gamma;t) + 2v(t) - 2}{\mathfrak{m}^*(\Gamma;t)}, \tag{5}$$

где $\mathrm{dmh}(\Gamma)$ – размерность Хаусдорфа кривой Γ, то задача о скачке (2) на замкнутой кривой Γ имеет единственное решение в классе $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$, исчезающее в бесконечно удаленной точке.

Кроме того, во втором параграфе исследуется задача о скачке в полунепрерывной постановке. Пусть E – конечный набор точек кривой Γ. В этой постановке краевое условие (2) предполагается выполненным при $t \in \Gamma \setminus E$, а в точках множества E его заменяет какое-либо ограничение на рост искомой функции. В точках E скачок также может терять непрерывность. Эта задача решена для разных вариантов ограничений на разрывы искомой функции и скачка. Приведем результат для одного из этих вариантов.

Теорема 3 *Пусть $wg \in H_v^{loc}(\Gamma)$, где w – неотрицательная дифференцируемая в $\mathbb{C} \setminus E$ функция, отличная от нуля в $\Gamma \setminus E$, причем функции w^{-2} и $\frac{\partial w^{-1}}{\partial \overline{z}}$ интегрируемы вблизи точек множества E, а решение ищется среди функций, интегрируемых в квадрате вблизи этих точек. Если при любом $t \in \Gamma \setminus E$ выполнены условия (4) и (5), а при $t \in E$ – условие*

$$v(t) > 1 - \mathfrak{m}(\Gamma; t; \mu),$$

где $\mu = w^{-1}dxdy$, то задача о скачке (2) на замкнутой кривой Γ имеет единственное решение в классе $\mathcal{H}_\mu(\Gamma \setminus E)$, исчезающее в бесконечно удаленной точке.

В конце параграфа обсуждается возможность появления решений с разрывами в отдельных точках у задачи с не имеющим разрывов скачком; такие решения появляются из-за локального «ухудшения» метрических свойств контура.

Третий параграф посвящен использованию показателей Марцинкевича при решении краевой задачи Римана на замкнутой неспрямляемой кривой. В нем установлено, что классическая картина разрешимости этой задачи сохраняется, появляются лишь новые условия разрешимости и единственности.

Параграф 1.4 посвящен связям задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, с проблемой построения обобщения понятия контурного интеграла $\int_\Gamma f(z)dz$ на случай, когда контур неспрямляем. Пусть $F(z)$ – уже упоминавшееся выше квазирешение задачи о скачке с интегрируемыми производными первого порядка, имеющее компактный носитель. Если замкнутая кривая Γ спрямляемая, то с помощью формулы Стокса нетрудно установить справедливость равенства

$$\int\limits_\Gamma f\omega dz = -\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial F\omega}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}$$

для любой функции $\omega \in C^\infty(\mathbb{C})$. Для неспрямляемой кривой правую часть этого равенства можно считать определением левой, т.е. ввести в рассмотрение распределение

$$\int_\Gamma^{(S)} f \cdot dt : C_0^\infty \ni \omega \mapsto \int_\Gamma^{(S)} f\omega\, dz = -\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial F\omega}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z}. \tag{6}$$

Мы будем называть его интегрированием по Стоксу, а квазирешение F при обсуждении такого интегрирования будем называть интегратором. Ясно, что интегратор функции f не может быть единственным. Но разные интеграторы одной и той же функции могут порождать одинаковые интегрирования. Именно, справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 *Если два интегратора функции f на кривой Γ принадлежат классу $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$, где $\mu(t) > \mathrm{dmh}(\Gamma) - 1$ в каждой точке $t \in \Gamma$, то они определяют одинаковые интегрирования Стокса $\int_\Gamma^{(S)} f \cdot dz$.*

Теорема 4 *Пусть Γ - замкнутая кривая, $f \in H_v^{loc}(\Gamma)$ и всюду на Γ выполнены неравенства $v(t) > 1 - \mathfrak{m}^*(\Gamma; t)$ и $v(t) > \mathrm{dmh}\,\Gamma - 1$. Тогда функция f интегрируема по Стоксу на кривой Γ, имеет интегратор класса $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$, где $\mu(t) > \mathrm{dmh}(\Gamma) - 1$ в каждой точке $t \in \Gamma$, и все ее интеграторы, обладающие этим свойством, определяют одно и то же интегрирование.*

Интеграл типа Коши можно построить как результат применения распределения $\displaystyle\int_\Gamma^{(S)} f \cdot dt$ к функции $\omega \in C^\infty(\mathbb{C})$, совпадающей с ядром Коши $(2\pi i)^{-1}(t - z)^{-1}$, $z \notin \Gamma$, в некоторой окрестности Γ. Устанавливается, что при условиях теоремы 1 он совпадает с решением задачи о скачке, существование которого установлено в той же теореме. Таким образом, применение к задаче Римана на замкнутой неспрямляемой кривой метода регуляризации квазирешений и интегрирования по Стоксу приводит к одинаковым результатам. В последующих главах показано, что при решении ряда краевых задач интегрирование по Стоксу имеет свои преимущества.

Глава 2. Краевая задача Римана на неспрямляемых дугах

Первый параграф главы начинается с переноса понятия показателей Марцинкевича на незамкнутую дугу. Если t есть ее внутренняя точка, то при достаточно малом $r > 0$ эта дуга делит круг $B(t, r)$ на две компоненты – правую и левую. Обозначив их $B^\pm(t, r)$, мы получаем определения показателей $\mathfrak{m}^\pm(\Gamma; t)$ и $\mathfrak{m}^*(\Gamma; t)$ для внутренних точек. Но на концах дуги сохраняет смысл лишь показатель $\mathfrak{m}(\Gamma; t)$. Далее строятся интегрирования Стокса по дуге. Эти интегрирования определяются тем же равенством (6), что и в случае замкнутой кривой. Здесь существенную роль играют геометрические свойства концов дуги. В работе рассмотрены два таких свойства. Первое из них связано с замыкаемостью Γ. Эта дуга называется $R-$замыкаемой, если ее концы можно соединить спрямляемой дугой Λ, не имеющей с Γ других общих точек. Если дугу Λ можно выбрать гладкой или обладающей свойством $AD-$регулярности (то есть суммарная длина частей Λ, лежащих внутри любого круга радиуса r не превосходит Cr, где постоянная C не зависит ни от r, ни от положения центра круга), то мы говорим о S или $AD-$регулярности соответственно. Для таких дуг получены следующие результаты.

Теорема 5 *Если дуга Γ является $R-$замыкаемой, $f \in H_v^{loc}(\Gamma)$, в каждой внутренней точке t выполнено условие $v(t) > 1-\mathfrak{m}^*(\Gamma'; t)$, а на концах дуги $t_{1,2}$ – условие $v(t_{1,2}) > 1 - \mathfrak{m}(\Gamma \cup \Lambda; t_{1,2})$ для некоторой спрямляемой замыкающей дуги Λ, то функция f интегрируема по дуге Γ в вышеуказанном смысле.*

Тем самым создается возможность построить интеграл типа Коши по дуге.

Теорема 6 *Если дуга Γ является $AD-$замыкаемой, $f \in H_v^{loc}(\Gamma)$, в каждой внутренней точке Γ выполнено условие (4), а на концах – условие $v(t_{1,2}) > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}(\Gamma \cup \Lambda; t_{1,2})$ для некоторой $AD-$регулярной замыкающей дуги Λ, то интеграл типа Коши*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}^{(S)} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

представляет голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию, имеющую во внутренних точках $t \in \Gamma$ предельные значения с обеих сторон $\Phi^{\pm}(t)$, связанные соотношением $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t)$. Кроме того, эта функция удовлетворяет соотношению $\Phi(\infty) = 0$ и оценкам $\Phi(z) = O(\ln|z-t_j|^{-1})$, $j = 1, 2$, вблизи концов дуги $t_{1,2}$. Если дуга Γ является $S-$замыкаемой, то последнюю оценку можно уточнить:

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^j f(t_j)}{2\pi i}\ln|z-t_j| + O(1), \quad z \to t_j, j = 1, 2. \tag{7}$$

Эта теорема позволяет решить задачу о скачке в следующей постановке:

Требуется найти голоморфную в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Gamma$ и исчезающую в бесконечно удаленной точке функцию $\Phi(z)$, имеющую в точках $t \in \Gamma'$ предельные значения с обеих сторон $\Phi^{\pm}(t)$, связанные соотношением

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma' \tag{8}$$

и удовлетворяющую оценкам

$$\Phi(z) = O(|z-t_j|^{-\gamma}), \quad 0 \le \gamma < 1, \quad j = 1, 2 \tag{9}$$

вблизи концов дуги.

Интеграл типа Коши, понимаемый в смысле Стокса, дает решение этой задачи. Вопрос о его единственности решается так же, как в первой главе.

Другой подход основан на использовании ограничений на функцию

$$k_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - t_2}{z - t_1}, \tag{10}$$

где t_1 и t_2 – начало и конец дуги Γ, а ветвь логарифма выделена с помощью разреза по дуге Γ и условия $k_\Gamma(\infty) = 0$. Вблизи концов дуги вещественная часть этой функции может возрастать сколь угодно быстро. Ограничив этот рост мы получили ряд результатов об интегрируемости по такой дуге и о свойствах интеграла типа Коши по ней, не предполагающих ее замыкаемости. Приведем один из таких результатов.

Теорема 7 *Если дуга* Γ *удовлетворяет условию*

$$k_\Gamma(z) = O(|z - t_j|^{-\alpha_j}, z \to t_j, \quad j = 1, 2,$$

$f \in H_v^{loc}(\Gamma)$, *при* $t \in \Gamma \setminus \{t_1, t_2\}$ *выполнены условия (4) и (5), а на концах дуги – условия*

$$\alpha_j \le v(t_j), \quad j = 1, 2,$$
$$\alpha_j + \frac{1 - v(t_j)}{\mathfrak{m}(\Gamma; t_j)} < \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2,$$

то понимаемый в смысле Стокса интеграл типа Коши даёт единственное решение задачи о скачке (8), (9) в классе $\mathcal{H}_\mu(\Gamma')$, *причем вблизи концов дуги это решение удовлетворяет оценке*

$$\Phi(z) = f(t_j)k_\Gamma(z) + O(1), \quad j = 1, 2.$$

Ограничения на рост k_Γ не влекут замыкаемости дуги Γ.

В следующем параграфе решается задача Римана на неспрямляемой дуге, то есть задача отыскания голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции Φ, удовлетворяющей на $\Gamma' := \Gamma \setminus \{t_1, t_2\}$ краевому условию (1), а также условиям (9), $\Phi(\infty) = 0$ и

$$\Phi \in \mathcal{H}_\mu(\Gamma'), \ \ \mu(t) > \mathrm{dmh}(\Gamma; t) - 1, \quad t \in \Gamma'. \tag{11}$$

Выясняется, что если эта дуга S-замыкаема, то картина разрешимости этой задачи такая же, как на гладкой разомкнутой кривой, появляются лишь дополнительные условия существования (4) и единственности (5). Но при отсутствии замыкаемости здесь появляются новые эффекты. Приведем два результата об этой ситуации. Положим $G(t) = \exp f(t)$, $f(t) = u(t) + i\tilde{u}(t)$, $a_\Gamma(z) := \mathrm{Re}\, k_\Gamma(z)$, $\delta_j := \liminf\limits_{z \to t_j} \dfrac{u(t_j)a_\Gamma(z)}{\ln|z - t_j|}$, $\Delta_j := \liminf\limits_{r \to 0} \max\left\{\dfrac{u(t_j)a_\Gamma(z)}{\ln|z - t_j|} : |z - t_j| = r\right\}$, $\varkappa_j = 1 +]\delta_j + (-1)^j(2\pi)^{-1}\tilde{u}(t_j)[$, где $]x[$ есть наибольшее из целых чисел, строго меньших x.

Теорема 8 *Пусть $g \equiv 0$ и $G(t) = \exp f(t)$, причем дуга Γ и функция f удовлетворяют условиям предыдущей теоремы. Тогда для решений задачи (1) в классах функций, удовлетворяющих условиям (9), $\Phi(\infty) = 0$ и (11) справедливы следующие утверждения:*

- если среди величин $\Delta_{1,2}$ есть $-\infty$, то у задачи нет нетривиальных решений;

- если одна из величин $\delta_{1,2}$ равно $+\infty$, а вторая отлична от $-\infty$, то число линейно независимых решений бесконечно;

- если величины $\Delta_{1,2}$ конечны, то число линейно независимых решений равно $\max\{\varkappa, 0\}$, где $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$ и

$$\varkappa_j = 1 + [\delta_j + (-1)^j (2\pi)^{-1} \tilde{u}(t_j)]; \tag{12}$$

при $\varkappa > 0$ общее решение имеет вид

$$\Phi(z) = P(z) \exp \Psi(z) \prod_{j=1}^{2} (z - t_j)^{-\varkappa_j},$$

где P - произвольный алгебраический многочлен степени ниже $\varkappa$.

Второй результат касается неоднородной задачи, то есть случая $g \not\equiv 0$.

Теорема 9 *Пусть в задаче (1) G и g принадлежат классу $H_v^{loc}(\Gamma)$, коэффициент G не обращается в нуль, во внутренних точках дуги выполняется соотношение (4), а на концах $v(t_j) > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}(\Gamma; t_j)$, $j = 1, 2$. Пусть, кроме того, на каждом из концов t_j дуги Γ либо существует конечный предел $\lim\limits_{z \to t_j} \dfrac{a_\Gamma(z)}{\ln|z - t_j|}$, либо справедливо равенство $|G(t_j)| = 1$ и выполняются условия теоремы 7. Тогда для решений задачи в классе функций, удовлетворяющих условиям $\Phi(\infty) = 0$, (9) и (11), справедливы следующие утверждения:*

- при $\varkappa < 0$ задача имеет единственное решение при выполнении $-\varkappa$ условий,

- при $\varkappa = 0$ решение единстенно и равно $\Phi_0 = (I - XTX^{-1}\overline{\partial})\phi$, где ϕ - построенное выше квазирешение задачи,

- при $\varkappa > 0$ общее решение есть $\Phi_0 + PX$, где P - произвольный алгебраический многочлен степени ниже $\varkappa_0$.

Здесь $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$, а числа $\varkappa_{1,2}$ определяются равенствами (12).

Последний параграф второй главы посвящен следующему феномену. В некоторых случаях (например, при $G \equiv -1$) задачу Римана на неспрямляемой дуге удается решить не налагая на концы этой дуги никаких ограничений. В результате в этом параграфе решены задачи о восстановлении голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции по сумме или произведению ее предельных значений на неспрямляемой дуге с обеих сторон.

Глава 3. Некоторые другие краевые задачи на неспрямляемых контурах

В этой главе объединены краевые задачи типа задачи Римана на неспрямляемых контурах, при решении которых используются обобщенные интегралы по этим контурам с ядрами, отличными от ядра Коши.

В ее первом параграфе рассматривается задача Римана для периодических голоморфных функций на неспрямляемой периодической кривой. Пусть $T \neq 0$. Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется $T-$периодическим, если $A + T = A$, где $A + T := \{z \in \mathbb{C} : z - T \in A\}$. Очевидно, $T-$периодическая кривая Γ представима в виде объединения всевозможных $nT-$сдвигов любой своей дуги γ с концами t_1 и $t_2 = t_1 + T$, то есть

$$\Gamma := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{t \in \mathbb{C} : t - nT \in \gamma\}. \tag{13}$$

Всюду ниже мы считаем, что кривая Γ простая, а дуга γ неспрямляема, имеет нулевую меру и направлена от t_1 к t_2. Этим определяется и направление кривой Γ. Эта кривая замкнута в $\overline{\mathbb{C}}$ и разделяет плоскость на области D^+ и D^- лежащие слева и справа от Γ соответственно. Мы решаем краевую задачу Римана (1) на периодической кривой Γ, предполагая, что искомая функция $\Phi(z)$ и заданные коэффициенты $G(t)$, $g(t)$ являются $T-$периодическими.

Л.И. Чибрикова для решения задачи о скачке на периодической решетке кусочно-гладких контуров предложила использовать интеграл

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2Ti} \int\limits_{\gamma} g(t) ctg \frac{\pi(t - z)}{T} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \tag{14}$$

где γ – один из контуров решетки. Мы будем искать решение в том же виде, заменив интеграл $\int\limits_{\gamma}$ на интеграл по Стоксу, а замкнутый контур γ – на выбранную нами дугу. Иначе говоря, мы применим распределение $\int\limits_{\gamma}^{(S)} \cdot g(t) dt$ к $T-$периодической функции $\Omega_z(t) \in C^\infty(\mathbb{C})$, совпадающей с $\dfrac{1}{2Ti} ctg \dfrac{\pi(t - z)}{T}$ в окрестности Γ. В результате получена

Теорема 10 *Если функции G и g имеют период T, коэффициент G не обращается в нуль и имеет нулевое приращение аргумента на γ, $g, G \in H_v^{loc}(\Gamma)$ и T-периодический показатель $v(t)$ удовлетворяет условию (4), то краевая* *задача (1) имеет ограниченные периодические решения. Если заданная на* Γ *положительаая периодическая функция* $\mu(t)$ *удовлетворяет неравенству (5), то общее решение в классе* $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$ *имеет вид*

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + CX(z),$$

где Φ_1 *и* X *– некоторые голоморфные в* $\mathbb{C}$ *функции, а* C *– произвольная постоянная.*

Во втором параграфе главы 3 исследуется задача Римана для двояко-периодических голоморфных функций на двояко-периодической решетке неспрямляемых замкнутых кривых. Пусть τ_1, τ_2 – такие отличные от нуля комплексные числа, что $\operatorname{Im} \frac{\tau_1}{\tau_2} \neq 0$. Ниже $B_{m,n}$ означает $(m\tau_1 + n\tau_2)$ – сдвиг множества $B \subset \mathbb{C}$, то есть $B_{m,n} := \{z \in \mathbb{C} : z - m\tau_1 - n\tau_2 \in B\}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$. Мы рассмотрим открытый параллелограмм P с вершинами в точках $(\pm\tau_1 \pm \tau_2)/2$ и область D с неспрямляемой жордановой границей Γ, лежащую внутри P и содержащую начало координат. Положим

$$D^+ := \bigcup_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} D_{m,n}, \quad D^- := \overline{\mathbb{C}} \setminus D^+, \quad \mathbf{\Gamma} := \bigcup_{m,n=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{m,n}.$$

Мы решаем краевую задачу Римана (1) на двояко-периодической решетке $\mathbf{\Gamma}$ в предположении, что искомая функция $\Phi(z)$ и заданные на $\mathbf{\Gamma}$ коэффициенты $G(t)$, $g(t)$ являются $T-$периодическими. По аналогии с работами Л.И. Чибриковой мы ищем решение задачи о скачке в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma}^{(S)} g(t)\zeta(t - z)dt, \tag{15}$$

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Вейерштрасса, то есть

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{h\neq 0} \left(\frac{1}{z - h} + \frac{1}{h} + \frac{z}{h^2} \right),$$

где $h = m\tau_1 + n\tau_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$, и сумма взята по всем периодам h кроме $h = 0$. В результате для задачи о скачке получен такой результат.

Теорема 11 *Если* $g \in H_v^{loc}(\Gamma)$ *и выполнены условия (4) и*

$$\int_{\Gamma}^{(S)} g(t)dt = 0, \tag{16}$$

то задача о скачке (2) имеет двояко-периодические решения, и одним из таких решений является обобщенный интеграл (15). Если, кроме того, на $\mathbf{\Gamma}$ *задана положительная двояко периодическая функция* $\mu(t)$*, удовлетворяющая условию (5), то это решение единственно с точностью до произвольной аддитивной постоянной в классе* $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$.

Затем на основе этого результата в работе решается задача Римана для двоякопериодических функций.

В последнем параграфе интеграл в смысле Стокса применяется для изучения задачи Римана для решений уравнения Бельтрами

$$\overline{\partial}\,\phi = \mu\partial\phi, \quad \mu(z) = \beta\frac{z}{\overline{z}}, \quad 0 \leq \beta < 1.$$

Для этого частного случая уравнения Бельтрами известно интегральное представление решений внутри области через их значения на ее спрямляемой границе (аналог интегральной формулы Коши):

$$\phi(z) = \frac{1}{2(1-\beta)\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z|z/\zeta|^\theta} + \frac{\beta}{2(1-\beta)\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\zeta f(\zeta)\,d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(\zeta - z|z/\zeta|^\theta)}, \tag{17}$$

где $\theta = \dfrac{2\beta}{1-\beta}$. В результате замены здесь спрямляемой границы Γ на неспрямляемую, а обычных контурных интегралов на введенные выше их обобщения, получается

Теорема 12 *Если* $f \in H_v^{loc}(\Gamma)$*, где* v *удовлетворяет условию (4), то задача о скачке для решений этого уравнения Бельтрами разрешима, и одно из ее решений дается формулой (17). Если, кроме того, выполнено условие*

$$\operatorname{dmh}\Gamma - 1 < \mu(t) < \min\left\{v(t), \frac{\mathfrak{m}(\Gamma;t) - 2(1-v(t))}{\mathfrak{m}(\Gamma;t)}\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta}\right\}, \quad t \in \Gamma,$$

то это единственное решение в классе $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$.

Далее на этой основе решается задача Римана.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследований

1. Кац, Б.А. Функция Сёге на неспрямляемой дуге / Б.А. Кац, Д.Б. Кац // Известия ВУЗов. Математика. - 2012. - №4. – С.12-24.

2. Кац, Д.Б. Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах / Д.Б. Кац // Известия ВУЗов. Математика. - 2014. - №3. - С.68-71.

3. Кац, Д.Б. Локальные показатели Марцинкевича и их приложение / Д.Б. Кац // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2014. – Т. 156. - №4. – С. 31–38.

4. Кац, Д.Б. Новые метрические характеристики неспрямляемых кривых и их приложения / Д.Б. Кац // Сибирский Математический журнал. - 2016. - Т. 57. - №2. - С. 364-372.

5. Boris A. Kats. Doubly periodic Riemann boundary value problem for non-rectifiable curves / Farkhat N. Garifyanov, Boris A. Kats, David B. Katz // . - 2015. - Vol. 36. - №2. - pp. 120–126.

Публикации в других изданиях

6. Кац, Д.Б. О некоторых новых метрических характеристиках неспрямляемых кривых и их приложениях / Д.Б. Кац // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. - 2013. - Т. 46. - С. 235-236.

7. Кац, Д.Б. Показатели Марцинкевича и их приложения / Д.Б. Кац, Ф.Н. Гарифьянов // Сборник научных статей Казанского Федерального Университета 2013 года. - 2013. - С.243.

8. Кац, Б.А. Об интегрировании по неспрямляемым кривым / Б.А. Кац, Д.Б. Кац // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — V (тезисы докладов конференции). - Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2015. - С.78-79.

9. Katz David. The Marcinkiewicz exponent with applications / Katz David // ISAAC 9th congress. - Krakow, 2013. – P.106-107.

10. Boris A. Kats. Marcinkiewicz exponents and integrals over non-rectifiable paths / Boris A. Kats, David B. Katz // Mathematical Methods in the Applied

Sciences. - Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com) DOI: 10.1002/mma.3787. - URL: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mma.3787/abstract - 2016.

11. Boris A. Kats. New Solvability Criterion for Jump Problem / Boris A. Kats, David B. Katz // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. DOI: 10.1007/s40590-016-0100-3. - URL: http://link.springer.com/article/10.1007/s40590-016-0100-3 - 2016.

12. Katz, D.B. Local and weighted Marcinkiewicz exponents with applications / D.B. Katz // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2016. - Vol. 440. - №1. - pp. 74-85.

13. Katz, D. B. New characteristics of non-rectifiable curves and their applications / D.B. Katz // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI (тезисы докладов конференции). - Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2016. - С.63.