На правах рукописи

Губкин Андрей Анатольевич

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2008

Работа выполнена в государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования “Уральский государственный университет им. А.М. Горького” на кафедре математической физики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Ряшко Лев Борисович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Ананьев Борис Иванович

кандидат физико-математических наук, доцент Коврижных Антон Юрьевич

Ведущая организация: Челябинский государственный университет

Защита состоится “16” апреля 2008 года в 15^{00} на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 при Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу: 620083, Екатеринбург, К–83, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан “14” марта 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор В.Г. Пименов

Предыстория и актуальность темы

Диссертация посвящена разработке эффективных методов численного анализа устойчивости колебательных систем к случайным возмущениям. Объектом исследования являются предельные циклы нелинейных стохастических систем на участках перехода к хаосу в цепи бифуркаций удвоения периода, а также тривиальные решения линейных стохастических уравнений с периодическими коэффициентами.

Наличие внешних шумов, а также внутренних параметрических случайных возмущений может значительно изменить характер поведения динамической системы. Первые исследования стохастических систем проводились уже в конце 19-го века. В 1933-м году опубликована работа[1] Понтрягина Л.С., Андронова А.А., Витта А.А., содержащая постановки основных задач стохастической динамики. Для формального описания динамических систем, находящихся под действием случайных возмущений, широко используется аппарат стохастических дифференциальных уравнений. Основной моделью в современной теории стохастической устойчивости является система Ито.

Начиная с работы[2] Каца И.Я и Красовского Н.Н. для исследования устойчивости стохастических систем стал применяться метод функций Ляпунова. Большая часть исследований стохастических систем посвящена анализу поведения случайных траекторий в окрестности положения равновесия (Хасьминский Р.З., Кушнер Г.Дж., Левит М.В., Невельсон М.Б., Царьков Е.Ф., Haussman U.J., Kleinman D.L., Wonham W.M. и др.). Исследование воздействия шума на предельный цикл начато Понтрягиным, Андроновым, Виттом и продолжено в большом количестве работ (Стратонович Р.Л., Ibrahim R.A., Soong T.T., Grigoriu M., Baras F., Mangel M., Day M. и др.). Под действием шумов фазовые траектории системы покидают предельный цикл и формируют вокруг него пучок случайных траекторий — стохастический цикл. Интерес представляет изучение неоднородности этого пучка: различные участки предельных циклов обладают различной чувствительностью к шумам. Неоднородность пучка случайных траекторий рассматривалась в работах Deissler R.J, Farmer J.D., Ali F., Menzinger M., Kurrer C. и Schulten K.

Для важного случая шумов малой интенсивности в работах Башкирце-

---

[1] *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ, 1933, Т.3, Вып.3, с.165.

[2] *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика, 1960, Т.24, Вып.5, сс.809–823.

вой И.А. и Ряшко Л.Б. с помощью аппроксимации квазипотенциала построена матричная функция стохастической чувствительности (ФСЧ), описывающая ковариацию отклонения стохастической траектории от точек детерминированной орбиты. С помощью ФСЧ в работах Ряшко Л.Б., Башкирцевой И.А., Исаковой М.Г., Стихина П.В. проанализирована чувствительность предельных циклов ряда известных нелинейных систем.

В 1977-м году Мильштейном Г.Н. получен критерий экспоненциальной орбитальной устойчивости предельных циклов автономных детерминированных систем, опирающийся на метод орбитальных функций Ляпунова. В 1992-м году Мильштейн Г.Н. и Ряшко Л.Б. получили аналогичные результаты для экспоненциальной орбитальной устойчивости в среднем квадратичном предельных циклов. В 1996-м году Ряшко Л.Б с помощью систем первого приближения был получен[3] спектральный критерий устойчивости цикла, сводящий задачу к нахождению спектрального радиуса некоторого положительного оператора — оператора стохастической устойчивости.

В 1999-м году в работе[4] Ряшко Л.Б спектральный подход применен для решения задачи экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном линейных стохастических систем с периодическими коэффициентами.

Предельные циклы в диссертации исследуются на участках перехода к хаосу в цепи бифуркаций удвоения периода. Исследования на этих участках представляют ряд значительных вычислительных трудностей. В связи с этим становится весьма актуальной задача построения численных методов, которые используют специфику строения участка перехода к хаосу для эффективного построения предельных циклов, а также позволяют ускорить существующие численные методы анализа чувствительности и повысить их точность. Разработке численных методов построения циклов и анализа чувствительности посвящена первая глава диссертации.

В работах Ряшко Л.Б для спектрального радиуса оператора стохастической устойчивости получен ряд оценок. На практике оказалось, что эти оценки не всегда достаточно информативны для анализа устойчивости. В связи с этим становится актуальной задача построения методов вычисления значения спектрального радиуса оператора стохастической устойчивости. Разработке таких методов для линейных уравнений с периодическими коэффициентами посвящена вторая глава, а для предельных циклов

---

[3] *Ряшко Л.Б.* Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений // Прикладная математика и механика, 1996, Т.60, Вып.4, сс.582–594.

[4] *Ryashko L.B.* Stability and stabilization of SDEs with periodic coefficients // Dynamic systems and applications, 1999, Vol.8, No.1, pp.21–33.

нелинейных систем — третья глава диссертации.

В качестве базовых моделей для демонстрации результатов первой и третьей глав выбраны две известные трехмерные системы нелинейных дифференциальных уравнений — система Ресслера

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -(x_2 + x_3), \\ \dot{x_2} = x_1 + 0.2x_2, \\ \dot{x_3} = 0.2 + x_3(x_1 - \mu) \end{cases} \tag{1}$$

и система Пиковского

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \mu x_1 + x_2 + 0.1x_3, \\ \dot{x_2} = -x_1, \\ \dot{x_3} = 10\,\mathrm{th}(100(1 + 4x_3 - 16x_1)) - 40(x_3 + x_1 + x_1^3). \end{cases} \tag{2}$$

Обе системы демонстрируют сценарий перехода к хаосу удвоением периода предельных циклов. Результаты второй главы диссертации демонстрируются на важном для приложений уравнении Матье:

$$\ddot{y} + [a + bq(t)]\, y = 0. \tag{3}$$

Целью работы является разработка и теоретическое обоснование сходимости численных методов анализа стохастической устойчивости тривиальных решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и предельных циклов. Особый интерес вызывает исследование стохастической устойчивости предельных циклов на участках перехода к хаосу в цепи бифуркаций удвоения периода.

Методы исследования

Предельные циклы нелинейных систем строятся с помощью предложенной в данной работе методики. Исследования устойчивости и чувствительности проводятся с помощью разработанных итерационных процессов и модификаций для существующих численных методов.

Научная новизна работы

1) Разработан метод отыскания интервалов структурной устойчивости на участке удвоения периода предельных циклов и перехода к хаосу. Найдены интервалы структурной устойчивости в системах Пиковского и Ресслера. Предложена методика построения предельных циклов высокой кратности.

2) Построен численный алгоритм оценки стохастической чувствительности предельных циклов. Исследована чувствительность циклов стохастической системы Пиковского на участке удвоения периода. Показано, что в системах Пиковского и Ресслера чувствительность циклов при переходе к хаосу растет с одинаковой скоростью, несмотря на различную жесткость систем.

3) Построен итерационный процесс, позволяющий для нелинейных стохастических систем находить критическую интенсивность шумов, разрушающих экспоненциальную устойчивость автоколебаний. Доказана сходимость процесса. Обнаружен эффект самоподобия графиков критической интенсивности шумов на интервалах структурной устойчивости многократных циклов. Показано, что в системах Пиковского и Ресслера критическая интенсивность шумов при переходе к хаосу снижается с одинаковой скоростью.

4) Продемонстрировано, что в зонах циклов большой кратности наиболее устойчивые детерминированные циклы являются одновременно и наиболее устойчивыми в среднем квадратичном, и наименее чувствительными к внешним стохастическим возмущениям, чего не наблюдается у циклов малой кратности.

5) Построен итерационный процесс для анализа экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения линейного уравнения с периодическими коэффициентами. Доказана его сходимость. Найдены области устойчивости для стохастически возмущенного уравнения Матье.

6) Разработан программный комплекс, в котором реализованы описанные выше численные алгоритмы.

Теоретическая и практическая ценность работы

Ценность работы представляют новые численные методы анализа стохастической устойчивости линейных дифференциальных уравнений и предельных циклов, а также некоторые модификации, значительно ускоряющие работу уже существующих методов. Для разработанных методов получены достаточные условия сходимости. Проанализирована устойчивость нескольких известных динамических систем. Обнаружен ряд универсальных закономерностей в динамике запаса устойчивости систем при переходе к хаосу в цепи бифуркаций удвоения периода.

Апробация работы

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на 34-й, 35-й, 36-й, 37-й и 38-й региональных молодежных конференциях (Екатеринбург, 2003–2007), на международной конференции "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" (Киев, май 2005) и на международной научной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения И.Я. Каца (Екатеринбург, 2006).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и списка литературы, содержащего 117 названий. Работа занимает 118 машинописных страниц, содержит 22 рисунка и 8 таблиц.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** описана предыстория и актуальность темы диссертации, приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена разработке численных методов построения предельных циклов на участках бифуркаций удвоения периода и анализа чувствительности этих циклов к внешним случайным возмущениям.

В **разделе 1.1** проводится анализ детерминированной системы Пиковского (2), исследуется структура одного из участков перехода к хаосу удвоением периода и предлагается метод построения предельных циклов на этом участке.

В **параграфе 1.1.1** найдено бифуркационное значение параметра μ, при котором единственное положение равновесия системы Пиковского теряет устойчивость, и рождается устойчивый предельный цикл большого радиуса. Обнаружен участок перехода к хаосу удвоением периода.

В **п. 1.1.2.1** исследуется геометрическая структура предельных циклов. Приводится алгоритм определения кратности цикла в модели Пиковского. Отмечается существенная неоднородность циклов в системе Пиковского, которая накладывает повышенные требования на разрабатываемые численные методы.

В **п. 1.1.2.2** решается задача построения предельного цикла в случае, когда заранее известна его кратность. Привлечение к построению цикла информации о его кратности позволит избежать ряда грубых вычислительных ошибок, вероятных при использовании обычного метода сечений. Методика априорного определения кратности предельного цикла на основе анализа точек бифуркаций удвоения периода приводится в **п. 1.1.2.3**.

Априорное определение кратности цикла выполняется в два этапа. **Первый этап** — нахождение приближенных значений точек бифуркаций на рассматриваемом участке перехода к хаосу. Этот подготовительный этап проводится один раз для участка перехода к хаосу. Построение нескольких начальных точек бифуркаций основано на асимптотической линейности мультипликатора цикла вблизи точки бифуркации. Здесь с помощью экстраполяции удается избежать трудоемкого построения предельных циклов в малой окрестности точки бифуркации. Для нахождения последующих точек бифуркаций используется стабилизация разностных отношений точек бифуркаций. Приводятся приближенные формулы для точек бифуркаций и точки перехода к хаосу.

Точки бифуркаций задают на участке перехода к хаосу набор интервалов структурной устойчивости I_k, $k \geqslant 1$. На **втором этапе** для произвольного значения параметра $\mu = \mu^*$ с участка перехода к хаосу определяется номер k^* интервала структурной устойчивости, содержащего это значение. При этом кратность цикла равна 2^{k^*}. Таким способом получаем возможность построения циклов на участке перехода к хаосу с помощью метода из **п. 1.1.2.2**. Формальное описание алгоритма построения предельного цикла приведено в **п. 1.1.2.4**. Эффективность метода демонстрируется на примере построения цикла системы Пиковского кратности 128.

В **параграфе 1.1.3** исследуется асимптотическая орбитальная устойчивость предельных циклов в системе Пиковского. Вводится понятие детерминированного суперцикла — самого устойчивого цикла среди циклов той же кратности.

Раздел 1.2 посвящен анализу чувствительности предельных циклов к внешним случайным возмущениям на участке перехода к хаосу.

В **параграфе 1.2.1** для стохастической системы Пиковского

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \mu x_1 + x_2 + 0.1x_3 + \varepsilon \cdot \dot{w}_1, \\ \dot{x_2} = -x_1 + \varepsilon \cdot \dot{w}_2, \\ \dot{x_3} = 10\,\mathrm{th}(100(1 + 4x_3 - 16x_1)) - 40(x_3 + x_1 + x_1^3) + \varepsilon \cdot \dot{w}_3, \end{cases} \tag{4}$$

где $w_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ — независимые винеровские процессы, а ε — интенсивность возмущений, показывается, как под действием шумов формируется стохастический цикл.

В **параграфе 1.2.2** вводится специальная функция стохастической чувствительности (ФСЧ), разработанная Ряшко Л.Б. и Башкирцевой И.А.

Эта функция позволяет аналитически исследовать чувствительность различных частей предельного цикла к внешним возмущениям.

Рассматривается стохастическая система Ито:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon\sigma(x)\dot{w}, \tag{5}$$

где $w(t)$ — n-мерный винеровский процесс, $\sigma(x)$ — достаточно гладкая $n\times n$-функция, определяющая зависимость помех от состояния системы. Предполагается, что у этой системы при $\varepsilon = 0$ имеется T-периодическое решение $x = \xi(t)$, фазовая траектория которого (цикл Γ) является экспоненциально орбитально устойчивой. ФСЧ строится с помощью введения ряда аппроксимаций для стационарной плотности распределения стохастического цикла, удовлетворяющей уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК).

Асимптотика стационарной плотности распределения $\rho(x,\varepsilon)$ при малых шумах в малой окрестности цикла Γ записывается в форме нормального распределения с ковариационной матрицей $\varepsilon^2\Phi(\gamma)$. Ковариационная матрица характеризует разброс точек пересечения случайных траекторий системы (5) с гиперплоскостью, ортогональной циклу Γ в точке γ. При этом матрица $\Phi(\xi(t)) = W(t)$ является единственным T-периодическим решением уравнения Ляпунова. Максимальное собственное значение $\lambda_1(t)$ матрицы $W(t)$ является характеристикой стохастической чувствительности цикла в точке $\xi(t)$ и выполняет роль скалярной функции чувствительности цикла. Под чувствительностью цикла $S(\mu)$ понимается максимум функции чувствительности $\lambda_1(t)$.

В **параграфе 1.2.3** приводится метод вычисления матричной функции $W(t)$. Скорость сходимости этого метода напрямую зависит от степени орбитальной детерминированной устойчивости предельного цикла, в связи с чем он неэффективен вблизи точек бифуркаций. В областях многократных циклов эффективность метода снижается в силу больших периодов циклов. Для преодоления плохой сходимости предлагается модификация метода, основанная на том наблюдении, что очень хорошее приближение для искомой функции можно получить, сделав всего несколько итераций.

В **параграфе 1.2.4** приводятся графики функции чувствительности $\lambda_1(t)$ для 1- и 4-цикла.

В **параграфе 1.2.5** строится график функции чувствительности циклов $S(\mu)$ на участке I_1 циклов кратности 2. Отмечается, что на интервале структурной устойчивости функция $S(\mu)$ имеет локальный минимум, а на краях интервала неограниченно возрастает. По аналогии с детерминированным суперциклом стохастический цикл в точке минимума функции чувствительности называется стохастическим суперциклом. Оказалось, что точки стохастического и детерминированного суперциклов малой кратности далеки друг от друга.

В **параграфе 1.2.6** проводятся вычисления, показывающие, что чувствительность суперциклов $S_j = \min_{\mu \in I_j} S(\mu)$ системы Пиковского при переходе к хаосу возрастает, как геометрическая прогрессия со знаменателем примерно равным $X = 7$ (коэффициент роста чувствительности циклов при переходе к хаосу). Обнаружено, что коэффициент роста чувствительности в стохастической системе Ресслера также примерно равен 7, несмотря на то, что система Пиковского гораздо жестче системы Ресслера.

Итак, применение разработанных численных методов построения циклов и быстрой оценки их чувствительности позволило проанализировать многократные циклы и выявить универсальную закономерность в скорости роста их чувствительности. Появилась возможность получать оценки для чувствительности циклов большой кратности, непосредственное вычисление которой является сложной задачей.

Вторая глава диссертации посвящена разработке численных методов анализа экспоненциальной стохастической устойчивости в среднем квадратичном тривиальных решений линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

В **разделе 2.1** описывается ряд методов анализа стохастической устойчивости линейных систем вида

$$dx(t) = A(t)xdt + \sum_{r=1}^{p} \sigma_r(t)xdw_r(t), \tag{6}$$

где x — n-мерный вектор, w_r, $r = 1, \dots, p$ — независимые винеровские процессы, A и σ_r — непрерывные матричные функции размера $n \times n$. Даются определения устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения системы. В дальнейшем изложении под устойчивостью системы понимается экспоненциальная устойчивость в среднем квадратичном ее тривиального решения.

В **параграфах 2.1.1** и **2.1.2** описаны наиболее известные методы исследования стохастической устойчивости систем: метод функций Ляпунова и метод моментов.

В **параграфе 2.1.3** описывается спектральный подход к исследованию устойчивости систем (6) с периодическими коэффициентами A и σ_r. Этот подход позволяет не только выяснить, устойчива ли система, но и оценить порядок ее устойчивости.

Вводятся следующие множества матричных ($n \geqslant 2$) и скалярных функций: Σ^n — пространство непрерывных T-периодических симметричных $n \times n$-матричных функций $V(t)$, для которых при любом t справедливо равенство

$$V(t)f(\xi(t)) = 0;$$

$K^n = \{V \in \Sigma^n \mid V(t)$ неотрицательно определенная $\forall t \in [0,T]\}$ — конус неотрицательно определенных матричных функций из Σ^n; K_1^n — множество положительно определенных матричных функций из K^n; Σ — пространство непрерывных T-периодических функций; K — конус неотрицательных непрерывных T-периодических функций; K_1 — множество положительных непрерывных T-периодических функций.

Для системы (6) вводится положительный оператор $\mathcal{P}$ — оператор стохастической устойчивости, действующий в Σ^n. Формулируется спектральный критерий стохастической устойчивости системы (6), заключающийся в требовании выполнения неравенства $\rho(\mathcal{P}) < 1$, где $\rho(\mathcal{P})$ — спектральный радиус оператора $\mathcal{P}$.

В **параграфе 2.1.4** линейное уравнение с периодическими коэффициентами

$$y^{(n)} + (\lambda_1(t) + \sigma_1(t) \cdot \dot{w}_1)y^{(n-1)} + \cdots + (\lambda_n(t) + \sigma_n(t) \cdot \dot{w}_n)y = 0, \qquad (7)$$

обладающее экспоненциально устойчивым тривиальным решением, рассматривается как частный случай системы (6). Показывается, что в случае уравнения спектральный радиус оператора стохастической устойчивости $\mathcal{P}$ равен спектральному радиусу оператора $\mathcal{B}$, действующего в пространстве Σ. Оператор $\mathcal{B}$ строится по коэффициентам уравнения и имеет следующий вид:

$$\mathcal{B}[\varphi](\cdot) = -\operatorname{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\varphi Q](\cdot)G(\cdot)), \quad \varphi \in \Sigma. \qquad (8)$$

Для спектрального радиуса оператора $\mathcal{B}$ имеют место оценки сверху и снизу. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть ρ — спектральный радиус оператора $\mathcal{B}$, $J[\varphi, s] = \dfrac{\mathcal{B}[\varphi](s)}{\varphi(s)}$. Тогда для любой функции $\varphi \in K_1$ выполняется неравенство*

$$\min_{[0,T]} J[\varphi, s] \leqslant \rho \leqslant \max_{[0,T]} J[\varphi, s].$$

В **параграфе 2.2.1** получена формула для спектрального радиуса оператора $\mathcal{B}$ в случае, когда линейное уравнение (7) имеет постоянные коэффициенты:

$$\rho = \mathcal{B}[1(\cdot)] = -\operatorname{tr}(\mathcal{A}^{-1}[Q]G). \tag{9}$$

В **параграфе 2.2.2** приводится итерационный процесс

$$\varphi_{i+1} = \frac{\mathcal{B}[\varphi_i]}{\|\mathcal{B}[\varphi_i]\|} \tag{10}$$

с некоторым начальным приближением $\varphi_0 \in K \setminus \{0\}$, позволяющий численно находить значения спектрального радиуса ρ оператора стохастической устойчивости $\mathcal{B}$. В **параграфе 2.2.4** сформулирована теорема, дающая достаточные условия сходимости процесса (10) к собственной функции $\widetilde{\varphi}$ оператора $\mathcal{B}$ с собственным значением, равным спектральному радиусу $\rho = \rho(\mathcal{B})$. При этом справедливо следующее равенство: $\rho = \frac{\mathcal{B}[\widetilde{\varphi}]}{\widetilde{\varphi}}$. Основную сложность при использовании итерационного процесса (10) представляет вычисление значений обратного оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Для решения этой задачи используется метод установления, приведенный в **параграфе 2.2.3**.

В **параграфе 2.2.4** приводится формулировка теоремы сходимости итерационного процесса (10).

Теорема 7 (теорема сходимости). *Пусть T-периодические функции λ_i, σ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ непрерывны, а функция σ_n не равна тождественно нулю ни на каком интервале. Тогда при любой начальной функции $\varphi_0 \in K \setminus \{0\}$ итерационный процесс (10) сходится к собственной функции оператора $\mathcal{B}$ с собственным значением, равным спектральному радиусу $\rho = \rho(\mathcal{B})$.*

В **параграфе 2.2.5** приведены сведения из функционального анализа (в основном, из теории положительных операторов, изложенной в работах Красносельского М.А.[5]), необходимые для доказательства теоремы 7. Даны определения конусов, положительного оператора, позитивного собственного значения, v-ограниченного оператора, сильно положительного оператора. Приведены теоремы о полной непрерывности операторов и о сходимости итерационных процессов с положительными операторами. Теорема сходимости доказывается в **параграфе 2.2.6**. Доказательство состоит из трех лемм и основной части.

[5] *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физ-матгиз, 1962 и *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.

В **параграфе 2.2.7** описывается простой способ повышения точности вычисления спектрального радиуса оператора стохастической устойчивости при построении областей устойчивости, заключающийся в использовании в качестве начальной функции для итерационного процесса собственной функции, вычисленной в предыдущей исследованной точке области.

В **разделе 2.3** итерационный процесс (10) используется для построения областей устойчивости и неустойчивости для стохастического уравнения Матье:

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega^2(1 + \varepsilon\cos(t) + \alpha\dot{w})y = 0, \tag{11}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы сходимости.

Уравнение (11) имеет четыре параметра: γ, ω, ε, α. В **параграфе 2.3.1** построены области устойчивости в плоскости параметров γ и α при $\omega = 2$, $\varepsilon = 0, 1, 1.4$. В случае $\varepsilon = 0$ имеем уравнение с постоянными коэффициентами, и спектральный радиус ρ оператора $\mathcal{B}$ вычисляется по формуле (9).

При построении областей устойчивости в плоскости параметров γ и α существенную роль играет возможность свести эту двумерную задачу к построению графика скалярной функции — критической интенсивности шумов при заданном значении γ.

Показывается, что добавление и последующее увеличение периодической составляющей $\omega^2\varepsilon\cos(t)$ в коэффициенте уравнения влечет сужение области устойчивости. На Рис. 1 показаны области устойчивости S_ε для трех рассматриваемых значений параметра ε.

В **параграфе 2.3.2** построены области неустойчивости в плоскости параметров ω и ε при $\gamma = 0.3$, $\alpha = 0.22, 0.44$. На Рис. 2 показано расширение области неустойчивости при увеличении интенсивности шумов α.

Третья глава диссертации посвящена разработке численных методов анализа экспоненциальной орбитальной устойчивости в среднем квадратичном предельных циклов нелинейных систем. Основным инструментом анализа устойчивости является спектральный подход.

В **разделе 3.1** представлены основные теоретические результаты, приводящие к спектральному критерию устойчивости предельного цикла.

В **параграфе 3.1.1** дается определение экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном предельного цикла.

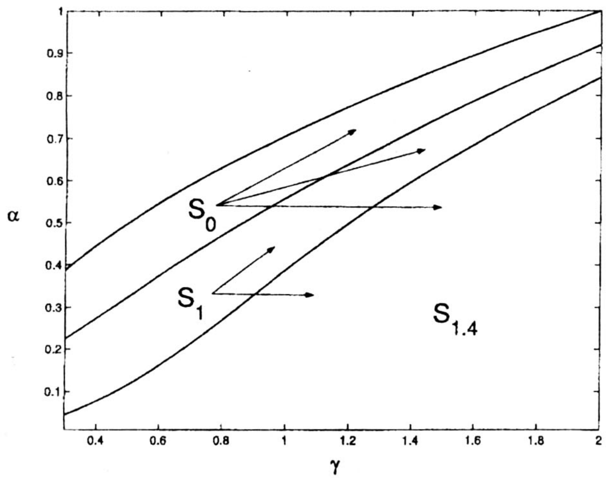

Рис. 1. Области стохастической устойчивости уравнения (11) в плоскости его параметров $0.3 \leqslant \gamma \leqslant 2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Рассматривается автономная система

$$dx = f(x)dt, \tag{12}$$

где x — n-мерный вектор, $x = \xi(t)$ — экспоненциально орбитально устойчивое T-периодическое решение системы (12), отличное от положения равновесия, и Γ — фазовая траектория этого решения (предельный цикл).

Стохастическая система имеет следующий вид:

$$dx = f(x)dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(x)dw_r(t). \tag{13}$$

Здесь $w_r(t)$, $r = 1, \ldots, m$ — независимые винеровские процессы, $\sigma_r(x)$ — достаточно гладкие вектор-функции размерности n. Для того чтобы $x = \xi(t)$ оставалось решением системы (13), предполагается, что выполняется условие

$$\sigma_{r|\Gamma} = 0. \tag{14}$$

В **параграфе 3.1.2** для системы (13) приводится система первого приближения:

$$dz = F(t)zdt + \sum_{r=1}^{m} \sqrt{(z, Q_r(t)z)}d\eta_r, \tag{15}$$

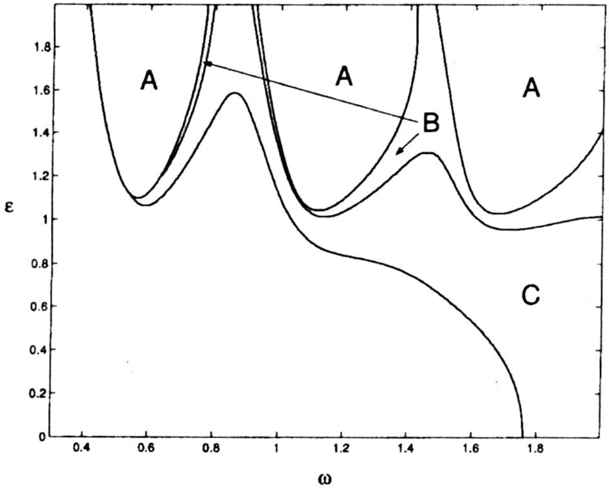

Рис. 2. Область неустойчивости A уравнения (11) ($\alpha = 0$) и области B и C стохастической неустойчивости в среднем квадратичном ($\alpha = 0.22$ и $\alpha = 0.44$) в области $0.3 \leqslant \omega \leqslant 2$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2$ при $\gamma = 0.3$. $A \subset B \subset C$.

Здесь z — n-мерный вектор, $\eta_r(t)$, $r = 1, \dots, m$ — n-мерные винеровские процессы с параметрами

$$\mathrm{E}\, d\eta_r(t) = 0, \quad \mathrm{E}\, d\eta_r(t) d\eta_r^\top(t) = G_r(t)dt.$$

Пусть $y(t) = f(\xi(t))$. Рассмотрим матрицу $P_y = E - yy^\top/(y^\top y)$. Эта матрица задает оператор проектирования на подпространство, ортогональное вектору y. Введем T-периодическую матрицу

$$P(t) = P_{y(t)}. \tag{16}$$

Даются определения P-положительной определенности матричных функций и P-устойчивости системы первого приближения. Утверждается, что предельный цикл Γ системы (13) экспоненциально орбитально устойчив в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда P-устойчива система первого приближения (15).

В **параграфе 3.1.3** для системы (15) вводится действующий в пространстве Σ^n положительный оператор стохастической устойчивости $\mathcal{P}$.

Утверждается, что критерием P-устойчивости системы первого приближения является выполнение неравенства $\rho(\mathcal{P}) < 1$, откуда следует, что это неравенство является необходимым и достаточным условием для устойчивости цикла (спектральный критерий устойчивости).

В случае системы с одним шумом ($m = 1$) спектральный радиус оператора $\mathcal{P}$ совпадает со спектральным радиусом следующего положительного оператора $\mathcal{B}$, действующего в Σ:

$$\mathcal{B}[\varphi](\cdot) = -\operatorname{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\varphi Q](\cdot)G(\cdot)). \tag{17}$$

В **параграфе 3.1.4** приведены оценки спектрального радиуса $\rho(\mathcal{B})$.

Теорема 17. *Пусть $\rho = \rho(\mathcal{B})$ — спектральный радиус оператора $\mathcal{B}$, $D(t)$ — T-периодическое решение уравнения*

$$\mathcal{A}^*[D] \equiv -D' + FD + DF^\top = -PGP.$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\min_{[0,T]} \operatorname{tr}(QD) \leqslant \rho \leqslant \max_{[0,T]} \operatorname{tr}(QD).$$

Методу вычисления спектрального радиуса оператора $\mathcal{B}$ посвящен **раздел 3.2**. В **параграфе 3.2.1** для вычисления спектрального радиуса предлагается использовать итерационный процесс (10) из параграфа 2.2.2:

$$\varphi_{i+1} = \frac{\mathcal{B}[\varphi_i]}{\|\mathcal{B}[\varphi_i]\|} \tag{18}$$

с некоторым начальным приближением $\varphi_0 \in K \setminus \{0\}$.

В **параграфе 3.2.2** для ускорения вычисления значений оператора стохастической устойчивости $\mathcal{B}$ предлагается использовать модификацию метода установления, применявшуюся в **параграфе 2.2.3** для расчета стохастической функции чувствительности.

В **параграфе 3.2.3** формулируется и доказывается теорема, дающая достаточное условие сходимости итерационного процесса (18).

Пусть $K_P^n = \{V \in \Sigma^n \mid V(t) - P\text{-положительно определенная}\}$.

Теорема 18 (теорема сходимости). *Пусть $Q(t) \in K_P^n$ и для матрицы $G(t) \in K^n$ выполняется условие*

$$P(t)G(t) \neq 0,\ t \in [0, T),$$

где $P(t)$ — проектор, определяемый формулой (16). Тогда при любой начальной функции $\varphi_0 \in K \setminus \{0\}$ итерационный процесс (18) сходится к собственной функции оператора $\mathcal{B}$, удовлетворяющей условиям

$$\widetilde{\varphi} \in K_1, \quad \|\widetilde{\varphi}\| = 1,$$

с собственным значением, равным спектральному радиусу $\rho = \rho(\mathcal{B})$:

$$\mathcal{B}[\widetilde{\varphi}] = \rho\widetilde{\varphi}.$$

В доказательстве этой теоремы использованы методы, применявшиеся при доказательстве теоремы сходимости 7.

В **разделе 3.3** на базе детерминированной системы Ресслера (1) строится модельный пример трехмерной стохастической системы вида (13) с одним шумом ($m = 1$), коэффициент диффузии σ которого удовлетворяет условию (14). Вычисляются коэффициенты системы первого приближения. С помощью теоремы 18 показывается сходимость итерационного процесса.

Анализу устойчивости стохастической системы Ресслера посвящен **раздел 3.4**. Вычисляется спектральный радиус $\rho(\mu)$ оператора стохастической устойчивости $\mathcal{B}$ из (17) на интервале 2-циклов I_1, а также приводятся оценки спектрального радиуса из теоремы 17. Графики спектрального радиуса (сплошная линия) и оценок (пунктирные линии) приведены на Рис. 3. В данном случае график спектрального радиуса позволяет точно выделить область устойчивости системы, в то время как оценки не дают возможности воспользоваться ни достаточным, ни необходимым условиями.

В **разделе 3.5** для стохастической системы Ресслера вычисляется и детально анализируется критическая интенсивность шумов. На Рис. 4 представлен график критической интенсивности на участке 2-, 4-, 8- и 16-циклов. Вычисления показали, что максимальное значение ε_j^* критической интенсивности на интервале структурной устойчивости I_j быстро стремится к нулю, как геометрическая прогрессия со знаменателем примерно равным $Y = 2.5$ (коэффициент потери устойчивости при переходе к хаосу). Такое же значение Y обнаружено у стохастической системы Пиковского, что может указывать на универсальную закономерность.

На участках многократных циклов обнаружен ряд закономерностей, позволяющих получать приближенные значения критической интенсивности шумов на всем участке перехода к хаосу. Непосредственное вычисление критической интенсивности на участках многократных циклах представляет собой очень сложную вычислительную задачу.

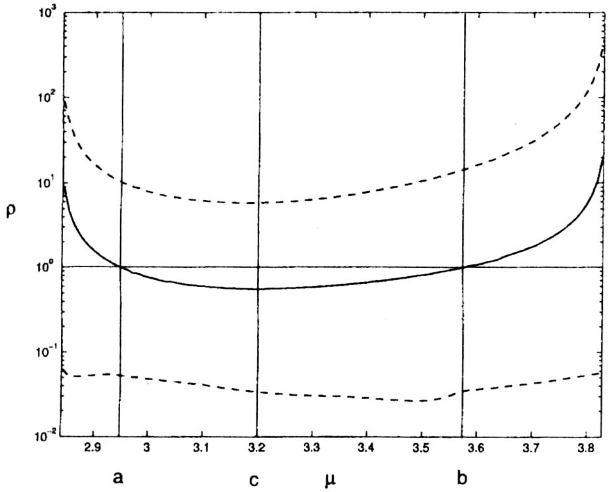

Рис. 3. Спектральный радиус оператора стохастической устойчивости (сплошная линия) и его оценки (пунктирные линии). Логарифмический масштаб. СистемаРесслера, участок 2-циклов I_1.

Еще одним важным наблюдением является то, что на интервалах многократных циклов точки локального максимума критической интенсивности шумов асимптотически приближаются к точкам локальных минимумов функции стохастической чувствительности и к точкам детерминированных суперциклов. Этот факт говорит о том, что детерминированный суперцикл большой кратности одновременно является и наиболее устойчивым в среднем квадратичном и наименее чувствительным к внешним возмущениям, чего не наблюдалось на участках циклов малой кратности. Таким образом, для нахождения стохастического суперцикла большой кратности достаточно построить детерминированный суперцикл той же кратности, что существенно проще.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации, вынесенные на защиту. В **приложении** приводится описание программного комплекса, реализующего численные методы, разработанные в диссертации. В **разделе 4.1** описаны вычислительные возможности комплекса, а в **разделе 4.2** обсуждаются детали реализации некоторых его модулей.

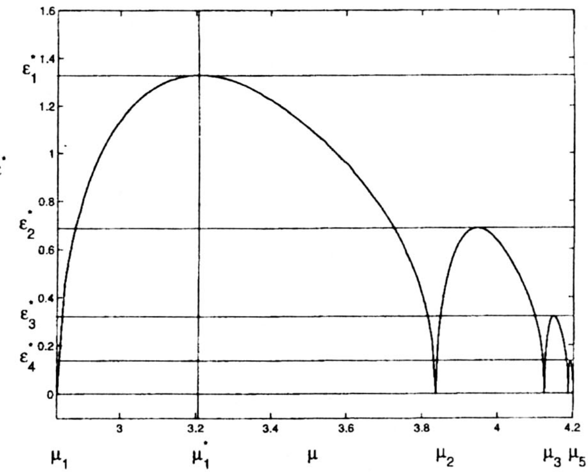

Рис. 4. График функции $\varepsilon^*(\mu)$ в системе Ресслера на участке 2-, 4-, 8- и 16-циклов.

Публикации по теме диссертации

Всего по теме диссертации опубликовано 10 научных работ, из них 1 статья в ведущем рецензируемом научном журнале, определенном ВАК, 1 статья в зарубежном журнале, 1 статья в электронном журнале, 7 публикаций в сборниках и трудах конференций.

Статья, опубликованная в ведущем рецензируемом научном журнале, определенном ВАК

[1] *Губкин А.А., Ряшко Л.Б.* Анализ среднеквадратичной устойчивости предельных циклов нелинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика, №10, Москва, 2007, С. 79–91 (0.7 п.л.).

Другие публикации

[2] *Губкин А.А., Ряшко Л.Б.* Стохастические циклы в модели Пиковского при переходе к хаосу // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 34-й региональной молодежной конференции, Екатеринбург, 2003, С. 106–110.

[3] *Губкин А.А., Ряшко Л.Б.* Построение предельных циклов в зоне бифуркаций удвоения периода с помощью t-мультипликаторов // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 35-й региональной моло-

дежной конференции, Екатеринбург, 2004, С. 124–127.

[4] *Губкин А.А., Ряшко Л.Б.* Устойчивость стохастического уравнения Матье // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 36-й региональной молодежной конференции, Екатеринбург, 2005, С. 126–130.

[5] *Губкин А.А., Ряшко Л.Б.* Итерационный метод анализа стохастической устойчивости линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами // Электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления", 2005, №2, http://www.neva.ru/journal/.

[6] *Губкин А.А.* Стохастическая устойчивость периодических систем // Dynamical system modelling and stability investigation, Kyiv, май, 2005, P. 41.

[7] *Gubkin A.A., Ryashko L.B.* Stochastic cycles for a model of the Belousov-Zhabotinsky reaction under transition to chaos // Neural, parallel and scientific computations, Dynamic publishers, 2005, Vol.13, P. 131–146.

[8] *Губкин А.А.* Анализ стохастической устойчивости в зоне удвоения периода при переходе к хаосу // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 37-й региональной молодежной конференции, Екатеринбург, 2006, С. 216–220.

[9] *Губкин А.А.* Численный анализ среднеквадратичной устойчивости предельных циклов нелинейных стохастических систем // Устойчивость, управление и моделирование динамических систем: Сборник научных трудов. Материалы международной научной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения И.Я. Каца. – Екатеринбург: УрГУПС, №54(137), 2006, С. 9.

[10] *Губкин А.А.* Методы анализа стохастической чувствительности многократных циклов // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 38-й региональной молодежной конференции, Екатеринбург, 2007, С. 145–149.

Подписано в печать 05.03.2008 г. Формат 60×84/16. Бумага типографская № 1.
Усл. печ. л. 1,25. Тираж 100. Заказ № 101.

**Размножено с готового оригинал-макета в типографии
"Уральский центр академического обслуживания".
620219, г. Екатеринбург, ул. Первомайская, 91.**