На правах рукописи

КОНТЕЕВ Алексей Александрович

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2010

Работа выполнена в лаборатории прикладной механики учреждения Российской академии наук Института машиноведения Уральского отделения РАН.

Научный руководитель:	доктор технических наук Федотов Владимир Петрович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Берестова Светлана Александровна,
	кандидат физико-математических наук Заляпин Владимир Ильич.
Ведущая организация:	ГОУ ВПО "Самарский государственный технический университет".

Защита состоится 22 декабря 2010 года в 13 00 час. на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 при ГОУ ВПО "Уральский государственный университет им. А.М. Горького" по адресу 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО "Уральский государственный университет им. А.М. Горького".

Автореферат разослан "15" ноября 2010

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.–мат. наук,
профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Подавляющему большинству практических задач, возникающих в инженерном деле и прикладных науках, присуща нерегулярность границ областей, отвечающих изучаемым объектам, так что при их количественном исследовании трудно рассчитывать на получение аналитических результатов и решения приходится искать численно. Наиболее распространенные численные методы основываются на достаточно мелком (по сравнению с масштабами задачи) подразделении изучаемой области либо путем введения линейных сеток с неизвестными значениями переменных в узлах, как в конечно-разностных методах, либо путём разбиения области на большое число дискретных элементов простой структуры, как в методах конечных элементов. В настоящее время такие методы достигли достаточно высокого развития и популярности. Но главным недостатком данных методов, несомненно, остается громоздкость вычислений при решении реальных задач.

С другой стороны, для решения практических задач математической физики, как правило, используются приближенные методы расчета, основанные на технологии последовательного счета. В последнее время наблюдается прогресс в распараллеливании программ для решения таких задач, однако, они по-прежнему основываются на алгоритмах, разработанных для последовательного счета: методе конечных разностей, методе конечных элементов, вариационных методах и т.д.

Настоящая работа посвящена альтернативному методу, методу граничных элементов (МГЭ), который, наряду с вышеперечисленными методами, является наиболее распространенным и, на наш взгляд, наиболее адаптивен в высокому уровню распараллеливания. Данный метод в равной степени универсален и основан на изучении не самих дифференциальных уравнений, описывающих конкретную задачу, а соответствующих этой задаче граничных интегральных уравнений. Одна из самых замечательных особенностей МГЭ состоит в том, что при его реализации дискретизации подлежат лишь границы изучаемых областей. Это естественно ведёт к существенному уменьшению числа дискретных элементов по сравнению с методами, требующими внутренней дискретизации всего рассматриваемого тела. Следовательно, для того, чтобы найти окончательное решение этим методом, нужно решить систему алгебраических уравнений более низкого порядка, чем при использовании других методов.

Первые публикации посвященные методу граничных элементов (МГЭ) относятся к середине 70-х годов. Сам термин "граничные элементы" впервые был введен в работах С. Бреббия[1,2], П.Бенерджи[3], и других авторов была дана классификация методов, МГЭ был выделен среди прочих численных методов. Немного позже эта работа была расширена за счет включения нелинейных и динамических задач.

Получили развитие различные модификации МГЭ в том числе и для решения задач гиперболического типа. Некоторые авторы все же рассматривают гиперболическое уравнение в исходной постановке; здесь в первую очередь следует отметить работы Мансура [4,5] .

Другой способ решения применил Чен[6]. Он проинтегрировал исходное уравнение по области, при этом получил дифференциально-интегральное уравнение содержащее производные по времени от искомой функции и интегралы по области. Затем искомую функцию $\mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, \tau)$ он аппроксимировал рядом функций от координаты. В результате получилась система дифференциальных по времени уравнений относительно функций $\alpha''(t)$.

В работах других авторов, в том числе Мансура[7] использовали соотно-

[1]Brebbia S.A. The boundary element method for engineers// Pentech Press. London; Halstend Press. New York. 1978.

[2]Brebbia S.A. Walker S. Boundary element technics in engineering// Newnes-Butterworths. London 1980.

[3]Бенерджи, П. Методы граничных элементов [Текст]: Пер. с англ. / Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

[4]J.A.M. Carrer. W.J. Mansur and R.J. Vanzuit. Scalar wave equation by the boundary element method: a D-BEM approach with non-homogeneous initial conditions // Comput Mech (2009) 44:P31-44.

[5]A.I. Abreu, J.A.M. Carrer, W.J. Mansur. Scalar wave propagation in 2-D: a BEM formulation based on the operational quadrature method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 27, No. 2 (2003), P101-105

[6]Chen W., Tanaka M. Dual reciprocity BEM applied to transient elastodynamic problems with differential quadrature method in time "Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2001) – P2331-2347

[7]J.A.M. Carrer W.J. Mansur. A Time-Domain Boundary Element Formulation with Fundamental Solution Generated by Heaviside Function Source: Initial Conditions Contribution // Electronic Journal of Boundary Elements, Vol. BETEQ 2001, No. 1, P20-30

шения в которых вместо фундаментального решения $\mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, \tau)$ использовано "фундаментальное решение сгенерированное функцией Хевисайда", которое представляет собой отклик среды на приложенное возмущение вида функции Хевисайда. В таких функциях интегралы, входящие в граничное интегральное соотношение вычисляются в смысле Коши, однако само решение явно не выражено через интегралы от граничных и начальных условий.

Последнее время развивается использующий классическую формулировку в частности в работе Чена[8] интегралы не существующие в смысле главного значения Коши принято рассматривать в смысле конечной части интеграла Адамара или в англоязычной литературе H.P.V. (Hadamard principal value или Hadamard finite part integral).

Во всех известных подходах решение получается численно; в случае применения интегральных преобразований это происходит на этапе обратного преобразования, в случае вычисления интегралов в смысле конечной части Адамара наиболее сложной в смысле числа операций является сама процедура вычисления конечной части, поскольку при этом происходит суммирование бесконечного ряда.

Помимо тех достоинств решения задач, которые уже были упомянуты, следующим резервом для роста быстродействия может быть увеличение аналитической части предварительных расчетов в рассматриваемой задаче. В результате, получаем ещё одно очень важное достоинство рассматриваемого метода: при решении задач гиперболического типа перемещения определяются в виде аналитических функций, что является безусловным достоинством при дальнейшем расчете деформаций и напряжений, т.к. дифференцирование для получения этих функций также проводится аналитически.

Предлагаемый численно-аналитический метод, основанный на методе граничных элементов, сочетает в себе все эти качества и представляется эффективным средством решения некоторых задач гиперболического типа.

---

[8] Chen W. Dual boundary integral equations for helmholtz equation at a corner using contour approach around singularity.' Journal of Marine Science and Technology, Vol. 9, No. 1, pp. 53-63 (2001)

Цель работы. Построение численно-аналитических алгоритмов решения задач гиперболического типа модифицированным методом граничных элементов; проведение качественного анализа по ускорению и усовершенствованию расчёта задач рассматриваемым методом в сравнении с другими методами решения задач гиперболического типа.

Методы исследования. Поиск решения одномерных и двумерных задач гиперболического типа модифицированным методом граничных элементов в виде аналитических функций, допускающих аналитическое дифференцирование. Усовершенствование МГЭ путем введения численного блока "граничный элемент - точка влияния". Проведение предварительных аналитических вычислений необходимых интегралов от функций влияния.

Научная новизна.

1. В одномерном случае получены аналитические решения, как функции влияния границ. Показана универсальность подхода к решению одномерных задач с различными типами граничных условий и внешних воздействий.

2. В двумерном случае получены аналитические формулы вычисления всех интегралов от функций влияния по произвольно ориентированному отрезку и любой точки наблюдения;

3. Получена оценка точности решения в виде алгоритма, рассчитываемого одновременно с решением задачи;

4. Разработан программный комплекс на языке C#, позволяющий находить решение задачи гиперболического типа модифицированным МГЭ.

Результаты диссертационной работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность работы. Полученные алгоритмы позволяют считать задачу гиперболического типа во-первых, со значительным увеличением скорости счета по сравнению с широко используемыми в настоящее время численными методами (например, метод конечных элементов, метод конечных разностей и т.п.); во-вторых, с использованием только аналитических операций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 103 наименования. Общий объем работы составляет 150 страниц машинописного текста.

Апробация работы. Основные положения и результаты докладывались на следующих конференциях и семинарах: V Всероссийская конференция "Механика микронеоднородных материалов и разрушение"(Екатеринбург, 2008 г.), Международная молодежная научная конференция "XXXIV гагаринские чтения"(Москва, 2008 г.), Пятая Всероссийская научная конференция с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи"(Самара, 2008 г.), Всероссийская конференция "Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела"(Пермь, 2008 г.), X международный семинар "Супервычисления и математическое моделирование"(Саров, 2008 г.), Девятая Всероссийская научная конференция "Краевые задачи и математическое моделирование"(Новокузнецк , 2008 г.) XVI Международная конференция по "Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2009)"(Алушта, 2009 г.) "Шестая Всероссийская научная конференция с международным участием "математическое моделирование и краевые задачи", (Самара, 2009 г.) "XXIX Российская школа, посвященная 85-летию со дня рождения академика В.П. Макеева"(Миасс 2009 г.) X Международная конференция "Забабахинские научные чтения"(Снежинск 2010 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-2]. Результаты, вошедшие в диссертацию, получены автором самостоятельно.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается общая характеристика работы, приводятся историко-библиографические справки, сведения о публикациях.

В диссертации рассматривается МГЭ и его модификация ММГЭ для решения одно и двумерные задач гиперболического типа. Содержательно суть этих задач может быть описана следующим образом. Требуется найти решение уравнения в области Ω:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u,$$

$$u(\mathbf{x}, t_0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, t_0) = \psi(\mathbf{x}), \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \overline{u}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial(\mathbf{x}, t)}{\partial \boldsymbol{n}} &= \overline{q}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \end{aligned} \tag{2}$$

здесь $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ в совокупности дают границу Γ области Ω.

В МГЭ переходят от рассмотрения самих дифференциальных уравнений к эквивалентным интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} c(\xi)\mathbf{u}(\xi, t_F) = \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{q}^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, \tau)\, d\Gamma(\mathbf{x})\, d\tau - \\ - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \mathbf{q}(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, \tau)\, d\Gamma(\mathbf{x})\, d\tau + \\ + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau}\mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, \tau) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)\frac{\partial \mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, \tau)}{\partial \tau}\right)\Bigg|_{\tau = t_0} d\Omega(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{q}(\mathbf{x}, \tau) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, \tau)$ фундаментальное решение уравнения (1) $c(\xi)$ — функция угла, равна 1 внутри области и $\frac{1}{2}$ для точек, лежащих на регулярной границе.

В ряде случаев интегрирование по области Ω удается свести к интегрированию по границе Γ. Достоинствами метода является снижение на единицу размерности задачи и практически неограниченные возможности распараллеливания, поскольку наиболее затратные по времени операции интегрирования производятся независимо друг от друга на элементах границы.

В ММГЭ граница разбивается на отрезки прямых. В отличие от классического МГЭ интегрирование проведено аналитически, причем не по каждому элементу границы, а по единожды выбранному базовому элементу, помещенному в начало координат.

Таким образом, в отличие от классического МГЭ, где фиксируется точка и вычисляется влияние каждого элемента границы на эту точку, в ММГЭ фиксируется базовый элемент и определяется влияние этого базового элемента на эквивалентную точку.

Глава 1 посвящена обзору и постановке задачи. Описан вывод МГЭ для общей задачи гиперболического типа. Приведено сравнение особенностей методов конечных элементов и граничных элементов. Обоснованы возможности усовершенствования алгоритмов, увеличения скорости и точности решений. Во-первых, максимальным распараллеливанием МГЭ. Это становится возможным, если учесть, что принцип абсолютного распараллеливания заложен в МГЭ на уровне алгоритма. Во-вторых, осуществлением процедуры аналитического интегрирования для всех функций влияния. Эта процедура, дает неоспоримое преимущество с уже используемыми МГЭ в различных областях науки, т.к. если функции влияния будут получены в аналитическом виде, то и неизвестные функции в интегральных уравнениях, такие как деформации, напряжения, градиенты напряжений в теории упругости или функции потока в диффузионных задачах, также будут получены путем аналитического дифференцирования, что, несомненно, приведет к более точному решению, чем с использованием численного дифференцирования. В-третьих путем использования ортогонального преобразования, заменяющего вычисление влияния произвольного граничного элемента на заданную точку тела, вычислением влияния выгодно выбранного, базового элемента на произвольную точку тела по известным формулам, выраженным через элементарные функции.

Глава 2 посвящена МГЭ применительно к одномерной задаче гиперболического типа. В одномерном случае область Ω представляет собой отрезок $[a, b]$, а граница области Γ точки a и b отрезка. Для класса задач с поперечными колебаниями под отклонением $\mathbf{u}$ точек отрезка будем понимать скалярную величину u характеризующую поперечное отклонение точек.

Фундаментальное решение уравнения (1) для одномерного случая

$$u^*(\xi, x, t_F, \tau) = \frac{cH(c(t_F - \tau) - r)}{2} \tag{4}$$

представляет собой отклик среды на приложенное в точке ξ в момент времени τ возмущение вида δ-функции.

С учетом простого вида фундаментального решения в одномерном случае а также того, что граница Г вырождается в точки a и b отрезка, интегрирование первых двух слагаемых в уравнении (3) производится аналитически. Перемещения выражаются явным образом через функции, характеризующие начальные и граничные условия

$$c(\xi)u(\xi, t_F) = -\frac{c}{2}\left(\int\limits_{t_0}^{\max(t_0, t_{R_b})} q(b,\tau)\,d\tau - \int\limits_{t_0}^{\max(t_0, t_{R_a})} q(a,\tau)\,d\tau \right) - \frac{cn_\tau}{2} u(x, t_R)\Big|_a^b +$$

$$+ \frac{\varphi(\xi - R_F) + \varphi(\xi + R_F)}{2} + \frac{1}{2c} \int\limits_{\max(\xi - R_F, a)}^{\min(\xi + R_F, b)} \psi(x)\,dx. \tag{5}$$

Если границы устремить к бесконечности, в последнем выражении члены, определяемые границей, в правой части последнего выражения обращаются в ноль, и выражение (4) превращается в известную формулу Даламбера.

Для неизвестных функций на границе система (4) образует уравнения Фредгольма, которые сводятся к дифференциальным уравнениям с запаздыванием, для неизвестных функций деформаций и к рекуррентным соотношениям для неизвестных функций перемещений.

Поперечные напряжения находятся из системы (5). Первая производная u_x находится аналитически, при этом исключается некорректная операция численного дифференцирования

Рассмотрен ряд тестовых примеров решения задач, дано сопоставление с решениями другими методами. В качестве практического примера рассматривается задача о колебаниях ограниченной струны, края которой закреплены к неподвижному основанию, а в нескольких внутренних точках приложены упругие и демпфирующие силы. Задача имеет практическое значение. При прокладке проводов, помимо высот опор и длины безопорных пролетов выбираются демпфирующие элементы, расположенные вблизи точек закрепления провода и предназначенные для гашения колебаний провода вблизи опорной конструкции. Решение такой задачи можно рассматривать как сумму известного статического и неизвестного динамического решений.

Формулировка для динамической задачи выглядит следующим образом:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + \sum_{i=1}^{n-1} \delta(x - x_i) f_i(t), \tag{6}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{7}$$

$$u(x_0, t) = 0, \quad u(x_n, t) = 0, \tag{8}$$

и дополнительными условиями, характеризующими действие упругих подвесов и неразрывность струны в точках x_i

$$u_x(x_i + 0, t) - u_x(x_i - 0, t) = h\, u(x_i, t) + \lambda u_t(x_i, t), \tag{9}$$

$$u(x_i + 0, t) = u(x_i - 0, t), \tag{10}$$

где $h = \frac{H}{\rho}$ — приведенная жесткость упругих подвесов, $\lambda = \frac{\Lambda}{\rho}$ — приведенный коэффициент демпфирования.

Получены выражения для определения перемещений в точках закрепления подвесов и для определения напряжений в местах жесткого закрепления.

Третья глава посвящена МГЭ и его модификации в двумерном случае для задачи гиперболического типа.

В первом параграфе главы 3 описаны граничные интегральные уравнения для двумерного случая. С учетом вида фундаментального решения граничные уравнения имеют вид:

$$c(\xi)u(\xi,t_F) = \int\limits_{t_0}^{t_F}\int\limits_{\Gamma} u(\mathbf{x},\tau)\frac{r\,H(c\,(t_F-\tau)-r)}{2\,\pi\left(c^2\,(t_F-\tau)^2-r^2\right)^{3/2}}\,n_r\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_F}\int\limits_{\Gamma}\nabla u(\mathbf{x},\tau)\frac{H(c\,(t_F-\tau)-r)}{2\,\pi\sqrt{c^2\,(t_F-\tau)^2-r^2}}\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{c^2}\int\limits_{\Omega}\left.\frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=t_0}\frac{H(c\,(t_F-t_0)-r)}{2\,\pi\sqrt{c^2\,(t_F-t_0)^2-r^2}}\,d\Omega(\mathbf{x})+$$

$$+\frac{1}{c^2}\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{x},t_0)\frac{c^2\,(t_F-t_0)\,H(c\,(t_F-t_0)-r)}{2\,\pi\left(c^2\,(t_F-t_0)^2-r^2\right)^{3/2}}\,d\Omega(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Первый и последний интегралы, входящие в соотношение (11) по отдельности не сходятся, поскольку имеют неинтегрируемые в смысле главного значения особенности в окрестности точек $c(t_F-\tau)-r=0$, однако их сумма конечна.

В случае, когда начальные условия заданы в виде гармонических функций, удается во-первых с помощью второго тождества Грина интегралы по области Ω преобразовать к эквивалентным граничным интегралам, во-вторых, интегрированием по частям, выделить особенности в расходящихся интегралах.

$$u(\xi,t_F) = -\int\limits_{t_0}^{t_F}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}\frac{(t_F-\tau)\;H(c\,(t_F-\tau)-r)}{2\,\pi\,r\sqrt{c^2\,(t_F-\tau)^2-r^2}}n_r\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_F}\int\limits_{\Gamma}\nabla u(\mathbf{x},\tau)\frac{H(c\,(t_F-\tau)-r)}{2\,\pi\sqrt{c^2\,(t_F-\tau)^2-r^2}}\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{c^2}\int\limits_{\Gamma}\psi(\mathbf{x})\frac{\partial U^*}{\partial\mathbf{n}}\,d\Gamma(\mathbf{x})+\frac{1}{c^2}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}}U^*(\xi,\mathbf{x},t_F,t_0)\,d\Gamma(\mathbf{x})+$$

$$+\frac{1}{c^2}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}}\,U^*_\tau\,d\Gamma(\mathbf{x})+\int\limits_{\Gamma}\varphi(\mathbf{x})\,\frac{n_r}{2\,\pi\,r}\,d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (12)$$

где $\nabla^2 U^* = u^*$, $\left.\frac{\partial u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=t_0} = \nabla^2 U^*_\tau$. При этом все интегралы стоящие в правой части последнего выражения интегрируемы в обобщенном смысле, а перемещения выражены через функции, заданные на границе, следовательно для их нахождения необходимо разбиение на элементы не всей области Ω, а только ее границы Γ. Размерность задачи снижена на единицу.

Для численного решения граничного интегрального уравнения сделан ряд допущений. Граница Γ области Ω разбита на граничные элементы — отрезки.

Выберем теперь элемент границы отрезок. Относительно него введем специальную систему координат таким образом, что ее начало O совпадает с началом отрезка, ось OX направлена вдоль направления, задаваемого отрезком, ось OY образована поворотом оси OX на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Такой элемент в дальнейшем договоримся называть базовым, а систему координат — системой координат связанной с базовым элементом. Направлением нормали будем считать направление, противоположное оси OY.

Функции $u(\mathbf{x},t)$ и $q(\mathbf{x},t)$, заданные на i-м базовом элементе в интервале времени $[t_{j-1}, t_j]$ аппроксимируются полиномами по координате и времени:

$$u(\mathbf{x},t) = \sum_{p=0}^{P}\sum_{s=0}^{S} u^{(p,s)}\, N(\mathbf{x})^p\, (\tau - t_{j-1})^s, \tag{13}$$

$$q(\mathbf{x},t) = \sum_{p=0}^{P}\sum_{s=0}^{S} q^{(p,s)}\, N(\mathbf{x})^p\, (\tau - t_{j-1})^s, \tag{14}$$

где $u^{(p,s)} = \dfrac{\partial^p}{\partial x^p}\dfrac{\partial^s}{\partial t^s}u(x,t)$, $q^{(p,s)} = \dfrac{\partial^p}{\partial x^p}\dfrac{\partial^s}{\partial t^s}q(x,t)$, $N^p(\mathbf{x})$ — полиномиальные функции формы, в частности, когда базовый элемент является отрезком, т.е. задан линейной функцией, $N^p(\mathbf{x}) = x^p$, здесь x — координата в системе координат, связанной с базовым элементом.

Функции, соответствующие начальным условиям $\psi(\mathbf{x})$, $\dfrac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}}$, $\varphi(\mathbf{x})$ и

$\dfrac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}}$ — аппроксимированы полиномами по координате:

$$\psi(x)=\sum_{r=0}^{R}\psi^{(r)}\,N^r(\mathbf{x}),\quad \frac{\partial\psi(x)}{\partial\mathbf{n}}=\sum_{r=0}^{R}\psi_n^{(r)}\,N^r(\mathbf{x}),$$
$$\varphi(x)=\sum_{r=0}^{R}\varphi^{(r)}\,N^r(\mathbf{x}),\quad \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\mathbf{n}}=\sum_{r=0}^{R}\varphi_n^{(r)}\,N^r(\mathbf{x}). \tag{15}$$

Нумерация отрезков границы проведена следующим образом: сначала, занумерованы $i=1,\dots,N$ те отрезки, на которых заданы граничные условия I рода, затем $i=N+1,\dots,N+M$, те на которых заданы граничные условия II рода.

На первом этапе решения задачи необходимо из граничного интегрального уравнения определить N неизвестных функций $\overline{q}_i(\mathbf{x},t)$, $\quad i=1,\dots,N$ для первых N отрезков, где заданы граничные условия I рода, и M неизвестных функций $\overline{u}_i(\mathbf{x},t)$, $\quad i=N+1,\dots,N+M$ для оставшихся M отрезков, где заданы граничные условия II рода. Для решения этой задачи использована конечно-разностная по времени схема. Задача решалась с фиксированным шагом по времени.

Таким образом, для реализации описанного метода необходимо вычислять криволинейные интегралы по граничным элементам от компонентов функций влияния для различных точек влияния, лежащих как на границе, так и внутри области. Классический подход предполагает численное вычисление этих интегралов в каждой конкретной задаче. Более универсальным подходом является получение аналитических формул для точного вычисления всех необходимых интегралов.

В третьем параграфе главы 3 рассмотрена наиболее простая реализация ММГЭ. Значения функций, входящих в граничное интегральное соотношение, аппроксимированы постоянными значениями внутри i-го элемента на j-м интервале времени. А именно, функция $\overline{u}(\mathbf{x},t)$ аппроксимирована полиномом первого порядка по времени, функция $\overline{q}(\mathbf{x},t)$ — полиномом нулевого порядка, функции $\varphi(\mathbf{x})$, $\varphi_n(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$, $\psi_n(\mathbf{x})$ — полиномами нулевого порядка.

Коэффициенты полиномов граничных функций $\overline{u}(\mathbf{x}, t)$ и $\overline{q}(\mathbf{x}, t)$ определяются через конечно-разностную схему по значениям функций в узловых точках $\mathbf{x}_i$, лежащих в серединах элементов в моменты времени τ_j, τ_{j-1}.

Система уравнений для определения неизвестных коэффициентов в силу соотношения (12) имеет вид:

$$c(\xi_m)\, u_{mk} = -\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{N+M} u_{ij}^{(0,1)} F_{2,mikj}^{(0,0)} - \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{N+M} q_{ij}^{(0,0)} F_{1,mikj}^{(0,0)} +$$
$$+ \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{N+M}\left(\psi_i^{(0)} F_{3,mik}^{(0)} + \psi_{ni}^{(0)} F_{4,mik}^{(0)} + \varphi_{ni}^{(0)} F_{5,mik}^{(0)} + \varphi_i^{(0)} F_{6,mik}^{(0)}\right), \quad (16)$$

и представляет собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов $u_{ij}^{(0,1)}$ и $q_{ij}^{(0,0)}$. Поскольку последние коэффициенты связаны линейной зависимостью со значениями искомых функций $\overline{u}(\mathbf{x}, t)$ и $\overline{q}(\mathbf{x}, t)$ в узловых точках, то фактически система уравнений (16) определяет искомые значения граничных функций.

Последнюю удобно представить в матричном виде с неизвестным вектором коэффициентов разложения граничных функций в ряд Тейлора, а сам этот вектор выразить через линейную зависимость от значений граничных функций в узловых точках

$$\mathbf{Dx} + \mathbf{Ay} = \mathbf{b} - \mathbf{d}, \quad (17)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Kx} + \mathbf{c}, \quad (18)$$

где:

$\mathbf{y} = (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2})^T$ – $(N+M)$-мерный вектор неизвестных значений коэффициентов полиномов от разложения в ряд Тейлора функций $\overline{u}(\mathbf{x}, \tau)$, $\overline{q}(\mathbf{x}, \tau)$ на i-ом отрезке границы $q_{ik}^{(0,0)}$ и $u_{N+ik}^{(0,1)}$, причем первая компонента вектора содержит неизвестные$\|y_{1,i}\| = q_{ik}^{(0,0)}$, а вторая $\|y_{2,i}\| = u_{N+ik}^{(0,1)}$;

Систему уравнений (17) с учетом соотношения (18) можно переписать следующим образом

$$(\mathbf{D} + \mathbf{AK})\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{d} - \mathbf{Ac}. \quad (19)$$

В последнем уравнении матрица $\mathbf{D}$ зависит от геометрии границы, матрица $\mathbf{K}$ – постоянная определяет линейное преобразование коэффициентов разложения в ряд Тейлора через значения функций в узловых точках, матрица $\mathbf{A}$ не меняется при постоянном шаге решения по времени (поскольку $F_{1,mikk} = F_{1,mik-1k-1}$). Таким образом итоговую матрицу системы $(\mathbf{D}+\mathbf{AK})$ и вектор $\mathbf{c}$ можно рассчитать единожды на первом шаге, вектора $\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}$ пересчитываются на каждом шаге решения.

Благодаря этому свойству матрицы разрешающей системы, СЛАУ решается только на первом шаге, а на последующих решение получается стандартной операцией умножение матрицы на вектор.

Рассмотрено несколько примеров, в частности рассмотрены колебания круглой мембраны. Предполагалось, что в начальный момент времени мембрана радиуса R_0 находится в нулевом положении, скорости точек мембраны постоянны и равны $u_t(r) = 0.1$, граница мембраны закреплена. Для примера решалась задача для круглой мембраны с радиусом $R_0 = 5$. Скорость звука принималась равной $c = 1$. Поставлено два численных эксперимента. В первом случае решение проводилось с шагом по времени $dt = 0.5$ с, по координате граница разбивалась на 12 элементов. Во втором случае решение проводилось с шагом по времени $dt = 0.5$ с, а по координате граница разбивалась на 36 элементов. Полученные решения сравнивались с аналитическим решением, полученным через функции Бесселя (суммировались первые 100 членов ряда).

Колебания точки, отстоящей на 2.5 ед от центра мембраны приведены на рисунке 1. Таким образом, можно сделать вывод что решение достаточно быстро сходится к аналитическому.

Решение всей задачи можно условно поделить на три этапа. На первом этапе формируется система линейных уравнений, при этом распараллеливание счета является абсолютным, так как вычисление коэффициентов разрешающей системы осуществляется подстановкой координат точек влияния в элементарные функции независимо друг от друга. На втором этапе решается СЛАУ, при этом собственно решение производится только на первом шаге, а на последующих решение по сложности эквивалентно операции умножения матрицы на вектор, при этом операция решения СЛАУ легко распараллеливается. Первые два этапа повторяются на каждом шаге по

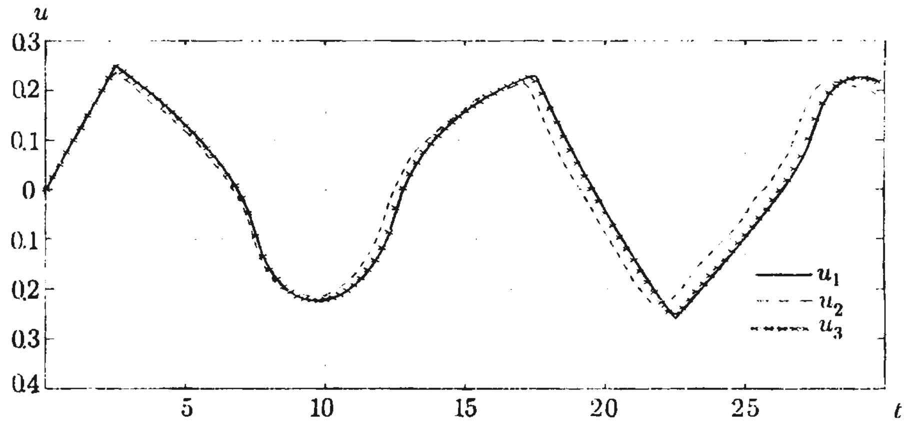

Рис. 1: Отклонение точки $r = 2.5$ мембраны. u_1 — решение через функции Бесселя, u_2 — решение ММГЭ с разбиением границы на 12 элементов, u_3 — решение ММГЭ с разбиением границы на 36 элементов.

времени. Наконец, на третьем этапе вычисляются перемещения точек мембраны внутри области путем подстановки их координат в элементарные функции. Расчет перемещений точек, как и на первом этапе, производится независимо, что позволяет абсолютно распараллелить вычисления.

В четвертом параграфе главы 3 приведена оценка точности метода. Расчет ошибки представляет собой алгоритм, расчет которого производится на n-ом шаге по времени основного расчета программы. Также приводится эвристическая оценка точности алгоритма, которая может быть рассчитана заранее по числу обусловленности разрешающей матрицы:

$$R_n \approx \Delta q \mu^n(A) \frac{h\,m!}{(m/2)!},$$

здесь m — порядок аппроксимации функций.

В пятом и шестом параграфах главы 3 приведены модификации алгоритма в которых коэффициенты аппроксимированы соответственно линейными по времени и линейными по координате функциями.

В пятом параграфе приведена линейная по времени интерполяция, аппроксимация производится с учетом значения функций в промежуточный момент времени $t_{j-\frac{1}{2}}$. При этом для необходимо составлять дополнительные уравнения для момента времени $t_{j-\frac{1}{2}}$.

В шестом параграфе приведена реализация метода, с линейной по координате интерполяцией внутри базового элемента значения деформаций и перемещений. Значения функции $u(\mathbf{x}, \tau)$ аппроксимированы внутри пространства $[\tau_{j-1}, \tau_j] \times \Gamma_i$ полиномом первой степени по координате и времени, построенным по четырем точкам:

При такой аппроксимации узловые точки находятся на краях базового элемента, а интегралы функций влияния имеют особенности, поэтому при их численном интегрировании прибегают к специальным приемам, например сдвигая узловую точку. При аналитическом интегрировании мы можем перейти к пределу, т.е. вычислять значения интегралов функций влияния непосредственно в узловых точках.

В случае, когда два соседних элемента границе расположены под углом, отличным от π, они имеют различные нормали и, соответственно, в окрестности смежной с ними точке различные различные производные по нормали $\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Классический подход предполагает сдвигать узловые точки от краев граничного элемента, при этом в таких точках функции влияния не имеют особенностей, а граница является регулярной. Недостатком такого подхода является удвоение узловых точек приводящее к удвоению размерности разрешающей матрицы системы и усложнение счета. В рассматриваемом подходе из-за того что последняя узловая точка точка текущего граничного элемента совпадает с первой узловой точкой следующего, число уравнений не удваивается, вместо этого система дополняется простыми соотношениями связи.

Рассмотрены три реализации линейной по координате интерполяции. В первом случае разложение в ряд производится в окрестности центральной точки базового элемента, граница в ее окрестности является регулярной и соответственно в значение функции угла $c(\xi)$ в граничном интегральном соотношении принимается равной $\frac{1}{2}$. Во втором случае разложение в ряд производится в окрестности крайней левой точки базового элемента, граница в ее окрестности не является регулярной, а значение функции угла вычисляется $c(\xi)$ через угол φ между соседними граничными элементами. В обоих случаях число уравнений в силу соотношения (15) вдвое меньше числа неизвестных, дополнительные уравнения составлены из условий непрерывности перемещений и согласования напряжений. В третьем случае рассмотрена реализация, когда две узловые точки выбираются на некотором расстоянии от границ базового элемента, а граничные уравнения в силу соотношения (15) составляются для каждой из таких точек. Такой вид аппроксимации принято называть разрывной линейной интерполяцией. Очевидное преимущество такого подхода заключается в том, что система уравнений вытекающих из граничного интегрального соотношения является полной и не требует дополнительных условий, недостаток — увеличение размерности системы уравнений. В конце каждого параграфа приведены примеры решения тестовой задачи.

В седьмом параграфе приведены компактные аналитические формулы для точного вычисления интегралов от компонентов функций влияния и их производных. Эти формулы представляют собой простые функции от координат точки влияния.

В восьмом параграфе приведена задача о собственных частотах вантового моста. Для расчета колебаний вантового моста использован ММГЭ. Для расчете упруго закрепленной части границы использованы граничные условия III рода (на K отрезках); при этом неизвестными считались как перемещения так и деформации границы, а образованная таким образом неполная система уравнений дополнялась условиями упругого закрепления

$$q_i + \lambda u_i = 0.$$

Нагрузка моделировалась приложением усилий, заданных функцией $f(x,t)$, при этом в граничное интегральное уравнение вводилась соответствующая добавка.

Моделированием показана возможность анализа и выбора соответствующих параметров конструкции для обеспечения приемлемых динамических параметров системы.

В девятом параграфе приведено описание программного комплекса, реализующего описанные в диссертации алгоритмы.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах:

1. Федотов В.П., Контеев А.А. К решению уравнений гиперболического типа методом граничных элементов // Вестник Самарского государственного технического университета, серия "физико-математические науки", 2008. №1(16) - С.72-78.

2. Федотов В.П., Контеев А.А. Модифицированный метод граничных элементов для задач о колебаниях плоских мембран // Труды института математики и механики УрО РАН, 2009. Том 15 №2, - С.211-222.

Статьи в других изданиях:

3. V. P. Fedotov and A. A. Konteev Modified boundary element method for problems on oscillations of flat membranes // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2009. Volume 267, Supplement 1, Pages 78-89.

4. Федотов В.П., Контеев А.А. Модифицированный метод граничных элементов для решения уравнений гиперболического типа // тезисы докладов V всероссийской конференции "механика микронеоднородных материалов и разрушение", Екатеринбург, 24-28 марта, 2008. — С. 176.

5. Федотов В.П., Контеев А.А. Применение методов граничных элементов для решения уравнений гиперболического типа // тезисы докладов секции 3 международной молодежной научной конференции "XXXIV гагаринские чтения", Москва, 1-5 апреля, 2008. — С. 57-58

6. Федотов В.П., Контеев А.А. Модифицированный метод граничных элементов для решения двумерного гиперболического уравнения //

Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием "математическое моделирование и краевые задачи", Самара, 29-31 мая, 2008. — С. 176-179.

7. Федотов В.П., Контеев А.А. Модифицированный метод граничных элементов для решения задачи о колебаниях плоской мембраны // тезисы докладов всероссийской конференции "проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела", Пермь, 13-15 октября 2008. — С. 102

8. Федотов В.П., Контеев А.А. Модифицированный метод граничных элементов для решения некоторых задач гиперболического типа // тезисы докладов X международного семинара "супервычисления и математическое моделирование", Саров, 29 сентября - 3 октября, 2008. — С. 115-116

9. Федотов В.П., Контеев А.А. Модифицированный метод граничных элементов для уравнений гиперболического типа // труды девятой Всероссийская научная конференция "Краевые задачи и математическое моделирование", Новокузнецк, ноябрь 2008 г. [Электронный ресурс].-2008. - Режим доступа: http://www.nkfi.ru/nauka/doc/sbornik1/secA1/12.doc

10. Федотов В.П., Контеев А.А. Модифицированный метод граничных элементов для скалярного гиперболического уравнения. // "тезисы докладов XVI Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2009)"Алушта, 25-31 мая 2009. — С. 715-717

11. Федотов В.П., Контеев А.А. Применение модифицированного метода граничных элементов для решения волнового уравнения // "Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием "математическое моделирование и краевые задачи"Ч.3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи, Самара: СамГТУ, 2009. — С. 227-230.

12. Федотов В.П., Контеев А.А. Модифицированный метод граничных элементов для скалярного волнового уравнения. // тезисы докладов XXIX Российской школы, посвященной 85-летию со дня рождения академика В.П. Макеева, Миасс 23—25 июня 2009. — С. 110.

13. Fedotov V.P., Konteev A.A. The Boundary element method as applied to calculating plane membrane vibrations // сборник материалов X Международной конференции 15-19 марта 2010. Снежинск 15-19 марта 2010. – С. 309.

Контеев Алексей Александрович

Модифицированный метод граничных элементов для задач гиперболического типа

Автореф. дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук.

Подписано в печать 28.10.2010. Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,4.
Тираж 100 экз. Заказ № 1015

Отпечатано в типографии ИПЦ «Издательство УрГУ»
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4

102