САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Кузнецов Эдуард Дмитриевич

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ДВУПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ НА КОСМОГОНИЧЕСКИХ ИНТЕРВАЛАХ ВРЕМЕНИ

Специальность 01.03.01 — астрометрия и небесная механика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2010

Работа выполнена в Уральском государственном университете им. А.М.Горького.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Кондратьев Борис Петрович,
Удмуртский государственный университет;

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Чернетенко Юлия Андреевна,
Институт прикладной астрономии РАН;

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Шевченко Иван Иванович,
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН.

Ведущая организация:
Томский государственный университет.

Защита диссертации состоится «2» ноября 2010 г. в 15 часов 30 минут на заседании совета Д 212.232.15 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский проспект, д. 28, ауд. 2143 (Математико-механический факультет).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СПбГУ.

Автореферат разослан «30» июля 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Орлов В.В.

1 Общая характеристика работы

Исследование орбитальной эволюции Солнечной и других планетных систем является одной из фундаментальных задач небесной механики.

Развитие наблюдательной и вычислительной техники привело к заметному прогрессу в изучении движения основных тел Солнечной системы (Солнца и больших планет) в двух взаимосвязанных направлениях. Первое — представление движения с наибольшей возможной точностью на коротком интервале времени (порядка $10 - 10^3$ лет). Второе — качественное описание основных свойств движения на космогонических временах (порядка $10^4 - 10^{10}$ лет).

Согласно исследованиям Ласкара (Laskar, 1994, 2008), Ито и Таникавы (Ito, Tanikawa, 2002), Батыгина и Лафлина (Batygin, Laughlin, 2008) движение планет-гигантов на космогонических временах почти-периодично. Но вопрос об эволюции произвольных планетных систем типа Солнечной остается открытым.

Устойчивость Солнечной системы — ее жизненно важное для нас свойство. Только устойчивые планетные системы могут служить прибежищами жизни и космической цивилизации.

За редчайшими исключениями устойчивость системы N тел на космогонических временах обеспечивается двумя факторами: иерархией масс и иерархией расстояний. Иерархия расстояний типична для систем кратных звезд, но встречается и в Солнечной системе.

Пример 1: кратная система α Близнецов (Кастор). Система состоит из трех тесных двойных систем: Кастор A (массы компонент 2.98 и 0.24 $M_\odot$, расстояние 0.127 а. е.), Кастор B (2.76 и 0.47 $M_\odot$, 0.059 а. е.) и Кастор C (0.59 и 0.58 $M_\odot$, 0.018 а. е.) (Tokovinin, 1997). Расстояние между барицентрами пар A и B составляет 104 а. е. Пара C удалена от центра масс A и B на 1145 а. е.

Пример 2: система Солнце — Земля — Луна. Отношение больших полуосей гелиоцентрической орбиты барицентра системы Земля — Луна и геоцентрической орбиты Луны равно примерно 390. Масса системы Земля — Луна составляет 1/328900 массы Солнца, а масса Луны — 1/81.3 массы Земли.

В планетных системах основную роль играет иерархия масс. Так, масса Юпитера на три порядка меньше массы Солнца. Удаленность планетных орбит друг от друга также вносит некоторый вклад в устойчивость, но он не столь существен. Отношение больших полуосей орбит Сатурна и Юпитера равно примерно 2, а для Земли и Венеры (имеющими существенно меньшие массы) оно составляет всего 1.4.

Иерархия масс наблюдается и в известных внесолнечных планетных системах. В системе звезды 55 Cnc обнаружено пять планет (Schneider, 2010). Масса наиболее массивной планеты 55 Cnc d составляет 0.0036 массы звезды

55 Cnc. Отношения масс планет на соседних орбитах равны 24, 4.9, 1.2, 27, а соответствующие им отношения больших полуосей орбит — 3.0, 2.1, 3.3, 7.4.

В системе υ And известно три планеты (Schneider, 2010). Наиболее массивная υ And d — 0.003 массы υ And. Отношение масс соседних планет — 2.9 и 2.0, а отношения больших полуосей их орбит — 14 и 3 соответственно.

Аналогичные примеры можно привести и для других внесолнечных планетных систем.

Малость масс планет по сравнению с массой центральной звезды играет важную роль в устойчивости планетных систем. Соотношения между большими полуосями планетных орбит могут дополнительно влиять на устойчивость в случае их близости к резонансным.

Актуальность темы определяется тем, насколько хорошо двупланетная модель приближает реальные многопланетные системы. В Солнечной системе масса Юпитера на три порядка меньше солнечной. Масса Сатурна еще в три раза меньше. Масса Урана, который вдвое дальше Сатурна от Солнца, составляет 15% от массы Сатурна, а Нептуна, еще в полтора раза более далекого, — 18%. Массы планет земной группы существенно меньше. Так что двупланетное приближение Солнце — Юпитер — Сатурн вполне приемлемо для выяснения качественной картины орбитальной эволюции Солнечной системы.

Вероятно, подобная картина наблюдается в большинстве внесолнечных планетных систем. Действительно, из 385 открытых к 15 апреля 2010 г. планетных систем лишь у 45 известно более одной планеты, из них у 16 обнаружено более двух планет (Schneider, 2010; Marcy et al., 2010; Mayor et al., 2010). Безусловно, это — эффект селекции. Скорее всего, массы остальных планет малы, так что в большинстве случаев допустимо двупланетное приближение.

Цели работы. Основные цели настоящей работы — разработка новых численно-аналитических методов исследования орбитальной эволюции слабовозмущенных двупланетных систем на космогонических интервалах времени, получение качественных свойств и количественных характеристик параметров, описывающих орбитальную эволюцию Солнечной системы и некоторых внесолнечных планетных систем.

Научная новизна работы. Настоящая диссертация посвящена разработке *новых* численно-аналитических методов решения планетной задачи трех тел и получению на этой основе *новых* результатов о качественных свойствах и количественных характеристиках орбитальной эволюции двупланетных систем.

Новыми являются.

1. Метод представления гамильтониана задачи в виде ряда Пуассона по всем элементам и его реализация с помощью пуассоновского процессора PSP, описанного в работе (Иванова, 1997).

2. Алгоритм вычисления производящей функции осредняющего по быстрым переменным преобразования Хори–Деприи гамильтониана в средних элементах: для системы Солнце — Юпитер — Сатурн с точностью до μ^3, для произвольной системы при сохранении в символьном виде параметров, задающих масштабы и массы — до μ^2, и его реализация с помощью эшелонированного пуассоновского процессора EPSP, описанного в работе (Ivanova, 2001).

3. Алгоритм построения функций замены переменных на основе производящей функции осредняющего по быстрым переменным преобразования Хори–Депри и его реализация с помощью эшелонированного пуассоновского процессора EPSP.

4. Вывод о несохранении x и y-компонент интеграла площадей в системе, определяемой конечным отрезком разложения в ряд Пуассона осредненного гамильтониана.

5. Метод исследования устойчивости по Лагранжу двупланетных систем на основе интегрирования осредненных уравнений движения с последующим возвратом к оскулирующим элементам.

6. Алгоритм оценки ширины резонансных зон, основанный на использовании мажоранты функции замены переменных для большой полуоси.

7. Метод описания резонансных свойств двупланетных систем.

Научная и практическая ценность работы. В настоящей работе предложен, разработан и реализован метод представления гамильтониана задачи в виде ряда Пуассона по всем кеплеровым элементам. В отличие от обычно применяемых чрезвычайно сложных алгоритмов, виртуозно использующих различные специальные функции, предложенный нами алгоритм предельно прост. Однако этот алгоритм требует больших затрат машинной памяти и, в меньшей степени, процессорного времени, почему он и не был никем ранее предложен и реализован. Быстрый прогресс вычислительной техники делает эти недостатки терпимыми.

Выполнение осредняющего по быстрым переменным преобразования Хори–Депри для системы Солнце — Юпитер — Сатурн с точностью до μ^3 позволило получить разложения, пригодные для описания орбитальной эволюции на космогонических интервалах времени.

Разложения, в которых сохранены в символьном виде параметры, задающие масштабы и массы планетных систем, пригодны для исследования орбитальной эволюции слабовозмущенных систем с малыми эксцентриситетами и наклонами.

Мажоранты функций замены переменных позволяют найти и оценить отклонения оскулирующих элементов от средних (короткопериодические возмущения), уточнить размеры резонансных зон.

При численном интегрировании уравнений движения в средних элементах шаг интегрирования существенно (приблизительно в μ^{-1} раз, где μ — малый параметр) увеличивается, поскольку независимой переменной вместо времени t фактически становится «медленное время» μt.

Применение метода исследования устойчивости по Лагранжу двупланетных систем на основе интегрирования осредненных уравнений движения с последующим возвратом к оскулирующим элементам показало, что сближения обнаруживаются при анализе оскулирующих элементов, в средних элементах сближений нет.

Простой и универсальный метод описания резонансных свойств двупланетных систем, использующий оценки резонансных значений больших полуосей и ширины резонансных зон, выраженные в относительных единицах, позволяет классифицировать и описывать резонансные свойства планетных систем в зависимости от значения малого параметра.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Метод представления гамильтониана задачи в виде ряда Пуассона по всем элементам и его реализация с помощью пуассоновского процессора PSP.

2. Алгоритм вычисления производящей функции осредняющего по быстрым переменным преобразования Хори–Деприи, гамильтониана в средних элементах, правых частей уравнений движения в средних элементах, функций замены переменных. Реализация алгоритма с помощью эшелонированного пуассоновского процессора EPSP.

3. Характеристики орбитальной эволюции двупланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн на космогоническом интервале времени 10 млрд. лет на основе численного интегрирования уравнений движения в средних элементах. Доказательство несохранения x и y-компонент интеграла площадей в системе, определяемой конечным отрезком разложения в ряд Пуассона осредненного гамильтониана.

4. Метод исследования устойчивости по Лагранжу двупланетных систем на основе интегрирования осредненных уравнений движения с после-

дующим возвратом к оскулирующим элементам. Условия распада планетных систем при увеличении масс планет. Оценки сверху масс планет системы 47 UMa.

5. Алгоритм оценки ширины резонансных зон, основанный на использовании мажоранты функции замены переменных для большой полуоси. Метод описания резонансных свойств двупланетных систем.

Структура и объем диссертации. Диссертация объемом 231 с. состоит из пяти глав, введения, заключения и списка литературы, содержащего 268 названий. Число рисунков — 25, таблиц — 61.

Апробация работы. Результаты по теме диссертации докладывались на объединенном семинаре кафедры астрономии и геодезии и Астрономической обсерватории УрГУ, на семинаре обсерватории Туорла Университета Турку, на всероссийских и международных конференциях.

1. 29-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 31 января — 4 февраля 2000 г.

2. Конференция «Астрометрия, геодинамика и небесная механика на пороге XXI века». Санкт-Петербург, 19–23 июня 2000 г.

3. 30-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 29 января — 2 февраля 2001 г.

4. Всероссийская астрономическая конференция. Санкт-Петербург, 6–12 августа 2001 г.

5. 31-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 28 января — 1 февраля 2002 г.

6. Международная конференция «Небесная механика — 2002: результаты и перспективы» («Celestial Mechanics — 2002: Results and Prospects»). Санкт-Петербург, 10–14 сентября 2002 г.

7. 32-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 3–7 февраля 2003 г.

8. Международная конференция «Порядок и хаос в звездных и планетных системах» («Order and chaos in stellar and planetary systems»). Санкт-Петербург, 17–24 августа 2003 г.

9. Международная конференция «Journées – 2003. Астрометрия, геодинамика и динамика Солнечной системы: от миллисекунд дуги к микросекундам дуги» («Journées – 2003. Astrometry, Geodynamics and Solar System Dynamics: from milliarcseconds to microarcseconds»). Санкт-Петербург, 22–25 сентября 2003 г.

10. 33-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 2–6 февраля 2004 г.

11. Всероссийская астрономическая конференция ВАК-2004 «Горизонты Вселенной». Москва, 3–10 июня 2004 г.

12. Коллоквиум МАС №197 «Динамика населения планетных систем» («Dynamics of Populations of Planetary Systems»). Белград, Сербия и Черногория, 31 августа — 4 сентября 2004 г.

13. Международный симпозиум «Астрономия – 2005: состояние и перспективы развития». Москва, 30 мая — 6 июня 2005 г.

14. Международный семинар «Задача нескольких тел: теория и компьютерное моделирование» («Few-body problem: theory and computer simulations»). Турку, Финляндия, 4–9 июля 2005 г.

15. Четвертая конференция по небесной механике «CELMEC IV». Сан-Мартино-аль-Чимино, Витербо, Италия, 11–16 сентября 2005 г.

16. 36-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 29 января — 2 февраля 2007 г.

17. Международная конференция «Аналитические методы небесной механики» («Analytical methods of celestial mechanics»). Санкт-Петербург, 8–12 июля 2007 г.

18. Международная научная конференция «Астрономия и астрофизика начала XXI века». Москва, 1–5 июля 2008 г.

19. Международная конференция «Приложения компьютерной алгебры — 2008» («Applications of Computer Algebra (ACA) 2008». Session «Computer Algebra for Dynamical Systems and Celestial Mechanics»). Хагенберг, Линц, Австрия, 27–30 июля 2008 г.

20. 38-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 2–6 февраля 2009 г.

21. Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково–2009». Санкт-Петербург, 15–19 июня 2009 г.

22. Пятая конференция по небесной механике «CELMEC V». Сан-Мартино-аль-Чимино, Витербо, Италия, 6–12 сентября 2009 г.

2 Содержание работы

Введение содержит постановку задачи и ее обоснование (*актуальность, новизна, научное и практическое значение*), краткое изложение содержания, выносимые на защиту результаты, а также перечень основных публикаций и конференций, симпозиумов, семинаров, где докладывались результаты диссертации.

Первая глава *«Орбитальная эволюция больших планет Солнечной системы»* содержит исторический обзор и обзор литературы по теме диссертации. В историческом развитии рассматривается эволюция методов описания орбитальной эволюции Солнечной системы: от математических моделей, основанных на описании движения почти-периодическими функциями, до методов, базирующихся на теории гравитации. Дается описание метода малого параметра, теории Лагранжа–Лапласа. Прослеживается эволюция метода осреднения от работ Лагранжа, Лапласа, Гаусса до исследований Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова, Г.Хори и А.Деприи, А.Н.Колмогорова, В.И.Арнольда и Ю.Мозера.

Дается обзор развития теорий движения планет Солнечной системы. Анализируются методы построения, модели возмущающих сил, интервалы применимости, точности прогнозирования координат планет и элементов их орбит.

Рассмотрены численные теории серий DE/LE ((Standish, 2006; Folkner et al., 2008) и др.), EPM ((Питьева, 2007; Pitjeva, 2009) и др.), INPOP (Fienga et al., 2008, 2009) для вычисления высокоточных эфемерид на интервалах времени $10 - 10^3$ лет.

Дано описание численных теорий ((Applegate et al., 1986), (Nobili et al., 1989), (Quinn et al., 1991), (Ito, Tanikawa, 2002) и др.), описывающих эволюцию больших планет Солнечной системы на длительных интервалах времени ($10^4 - 10^{10}$ лет), и основных результатов, полученных на основе этих теорий.

Рассмотрены высокоточные аналитические теории движения планет для вычисления эфемерид: TOP82 (Simon, Francou, 1981), JASON84 (Simon, Bretagnon, 1984), теории серии VSOP (Moisson, Bretagnon, 2000), теория на основе универсального метода вычисления возмущающей функции (Герасимов и др., 2000), и др.

Дано описание численно-аналитических теорий для исследования эволюции Солнечной системы на длительных интервалах времени. Проанализированы теории, построенные с помощью метода Гаусса (Вашковьяк, 1979, 1981a,b), (Давыдов, Молчанов, 1971), метода Альфана–Горячева (Сухотин, 1981, 1984; Сухотин, Холшевников, 1986). Выполнен обзор работ Ласкара ((Laskar, 1994, 2008; Laskar, Gastineau, 2009) и др.) по изучению орбитальной эволюции, устойчивости и хаотических свойств Солнечной системы. Проведено сравнение результатов Ласкара с данными численного интегрирования (Batygin, Laughlin, 2008) движения планет Солнечной системы на интервале времени 20 млрд. лет.

Аналитические теории движения (построенные методом осреднения) показывают, что движение планет устойчиво и почти-периодично. Численные и численно-аналитические теории указывают на то, что движение планет хаотично. Хаотизация движения связана с наличием резонансов, как средних движений, так и вековых (Varadi et al., 1999; Murray, Holman, 1999; Guzzo, 2005, 2006). В работах (Hayes, 2007, 2008; Hayes, Danforth, 2008) показано, что различным начальным данным (полученным по численной эфемериде DE405 на различные эпохи) могут соответствовать как хаотические, так и регулярные решения. Выявлена очень сильная зависимость оценок времени Ляпунова от начальных данных. Показано, что возмущения от внутренних планет превышают «расстояния» между начальными данными, соответствующими хаотическим и регулярным движениям и расположенным в области неопределенности, определяемой точностью наблюдений. Вопрос о том, какой области начальных условий, регулярной или хаотической, принадлежат начальные данные, описывающие фактическую Солнечную систему, остается открытым.

Рассмотрены методы исследования долгопериодической эволюции двупланетных систем. В работах (Robutel, 1993a,b, 1995) методами КАМ-теории показана устойчивость системы Солнце — Юпитер — Сатурн при массах планет, довольно далеких от реальности. В работе (Locatelli, Giorgilli, 2000) численно-аналитическим методом построено компьютерное доказательство того, что гамильтониан приближенной вековой модели для системы Солнце — Юпитер — Сатурн порождает два инвариантных тора, окружающих орбиты с начальными данными Юпитера и Сатурна. Следовательно, в рамках двупланетной задачи Солнце — Юпитер — Сатурн орбиты Юпитера и Сатурна устойчивы на бесконечном интервале времени. Устойчивость двупланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн в смысле выполнения условий теоремы Нехорошева для начальных данных, расположенных в окрестности инвариантного тора, исследована в работе (Giorgilli et al., 2009). Показано, что для окрестности инвариантного тора, содержащей начальные данные, соответствующие реальной системе Солнце — Юпитер — Сатурн, сохраняется экспоненциальная устойчивость системы на интервале времени, сравнимом с возрастом Вселенной.

Выполнен обзор основных результатов по исследованию орбитальной эволюции двупланетных, в том числе внесолнечных, систем, полученных в работах (Gladman, 1993; Masaki, Kinoshita, 2002; Marchal, 2005; Henrard, Libert, 2005; Libert, Henrard, 2005, 2007; Michtchenko et al., 2006).

Сделан вывод, что остается актуальным изучение планетного варианта задачи трех тел как с целью определения общих свойств решений, так и с целью исследования орбитальной эволюции конкретных двупланетных систем. При исследовании двупланетных систем важно определить условия, при которых полученное решение адекватно описывает основные качественные и количественные характеристики динамической эволюции реальной многопланетной системы. Иерархия масс и, реже, иерархия расстояний в планетных системах в большинстве случаев обеспечивают выполнение этих условий.

Вторая глава ***«Разложение гамильтониана двупланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам»*** посвящена обоснованию, разработке и реализации метода разложения гамильтониана двупланетной задачи в ряд Пуассона по всем кеплеровым элементам с использованием пуассоновского процессора PSP.

В разделе 2.1 для изучения эволюции орбит выбрана система координат Якоби. Массы материальных точек — m_0, $\mu m_i m_0$, $i = 1, \dots, N$. Все связанные с массами величины (кроме m_0) выбраны безразмерными; m_i — порядка единицы или меньше, параметр μ — малый. Для Солнечной системы μ положен равным 10^{-3}.

Выражение гамильтониана N-планетной задачи приведено в разделе 2.2.

В разделе 2.3 предложены две системы оскулирующих элементов, близких к кеплеровым. В первой все позиционные элементы малы и безразмерны, а угловые являются долготами:

$$\begin{aligned} x^{(1)}_{3s-2} &= \widetilde{a}_s, & x^{(1)}_{3s-1} &= e_s, & x^{(1)}_{3s} &= \widetilde{I}_s\,, \\ y^{(1)}_{3s-2} &= \alpha_s, & y^{(1)}_{3s-1} &= \beta_s, & y^{(1)}_{3s} &= \gamma_s\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\widetilde{a} = (a - a^0)/a^0$, $\widetilde{I} = \sin(I/2)$, $\alpha = l + g + \Omega$, $\beta = g + \Omega$, $\gamma = \Omega$ выражаются через кеплеровы элементы a, a^0, e, I, l, g, Ω: большую полуось и ее некоторое среднее значение, эксцентриситет, наклон, среднюю аномалию, аргумент перицентра, долготу восходящего узла. Индекс s принимает значения от 1 до числа планет N.

Вторая система отличается от первой переходом от больших полуосей к комбинациям частот

$$\omega_s = \varkappa_s a_s^{-3/2}, \quad \omega_s^0 = \varkappa_s (a_s^0)^{-3/2}. \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x_{3s-2}^{(2)} &= z_s, \quad x_{3s-1}^{(2)} = e_s, \quad x_{3s}^{(2)} = \widetilde{I}_s\,, \\ y_{3s-2}^{(2)} &= \alpha_s, \quad y_{3s-1}^{(2)} = \beta_s, \quad y_{3s}^{(2)} = \gamma_s\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\text{для первой планеты:} \quad z_1 = \frac{\omega_1^0}{\omega_1} - 1,$$

$$\text{для } s\text{-ой планеты при } s \geqslant 2: \quad z_s = \frac{\omega_1^0 \omega_s}{\omega_s^0 \omega_1} - 1.$$

Раздел 2.4 посвящен получению явного выражения гамильтониана N-планетной задачи в виде ряда Пуассона и описанию свойств коэффициентов разложения гамильтониана в ряд Пуассона по всем элементам.

В разделе 2.5 указаны упрощения в важном частном случае двупланетной задачи при $N = 2$.

Приведенные массы и гравитационные параметры:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{m_1}{1+\mu m_1}, \quad M_2 = \frac{m_2(1+\mu m_1)}{1+\mu m_1+\mu m_2}, \\ \varkappa_1^2 &= G m_0 (1+\mu m_1)\,, \quad \varkappa_2^2 = G m_0 \frac{1+\mu m_1+\mu m_2}{1+\mu m_1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Невозмущенный гамильтониан:

$$-h_0 = \frac{M_1 \varkappa_1^2}{2a_1} + \frac{M_2 \varkappa_2^2}{2a_2} = \frac{M_1 \varkappa_1^2}{2a_1^0(1+\widetilde{a}_1)} + \frac{M_2 \varkappa_2^2}{2a_2^0(1+\widetilde{a}_2)}. \tag{5}$$

Пертурбационная функция:

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{m_2 a_0}{\mu}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\left|\mathbf{r}_2 + \frac{\mu m_1}{\overline{m}_1}\mathbf{r}_1\right|}\right) - \frac{m_1 m_2 a_0}{\left|\mathbf{r}_2 - \frac{1}{\overline{m}_1}\mathbf{r}_1\right|} = \\ &= \frac{m_2 a_0 \left[2\frac{m_1}{\overline{m}_1}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + \mu\left(\frac{m_1}{\overline{m}_1}\right)^2 r_1^2\right]}{r_2 \widetilde{R}_2 (r_2 + \widetilde{R}_2)} - \frac{m_1 m_2 a_0}{\left|\mathbf{r}_2 - \frac{1}{\overline{m}_1}\mathbf{r}_1\right|}, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\widetilde{R}_2^2 = \mathbf{r}_2^2 + 2\mu \frac{m_1}{\overline{m}_1}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + \left(\mu \frac{m_1}{\overline{m}_2}\right)^2 \mathbf{r}_1^2\,,$$

a_0 — масштабный фактор, $\overline{m}_i = 1 + \mu m_1 + \dots + \mu m_i$.

Гамильтониан двупланетной задачи выражается через элементы первой системы (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} h_0 &= -\frac{Gm_0}{2}\left[\frac{m_1}{a_1^0(1+\widetilde{a}_1)}+\frac{m_2}{a_2^0(1+\widetilde{a}_2)}\right], \\ h_2 &= \frac{a_0}{a_2^0}\left(1+\widetilde{a}_2\right)^{-1}(h_5+h_6), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} h_5 = \frac{a_2}{a_0}h_3 = m_2 &\Bigg[2\left(1+\widetilde{a}_1\right)\left(1+\widetilde{a}_2\right)^{-1}\frac{m_1}{1+\mu m_1}\frac{a_1^0}{a_2^0}\frac{\mathbf{r}_1}{a_1}\frac{\mathbf{r}_2}{a_2}+ \\ &+\mu\left(1+\widetilde{a}_1\right)^2\left(1+\widetilde{a}_2\right)^{-2}\left(\frac{m_1}{1+\mu m_1}\right)^2\left(\frac{a_1^0}{a_2^0}\right)^2\left(\frac{r_1}{a_1}\right)^2\Bigg]\times \\ &\times\left[\frac{r_2}{a_2}\frac{\rho}{a_2}\left(\frac{r_2}{a_2}+\frac{\rho}{a_2}\right)\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$h_6 = \frac{a_2}{a_0}h_4 = -m_1m_2\left(\frac{\Delta}{a_2}\right)^{-1}, \tag{9}$$

причем

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{a_2} &= \left|\frac{\mathbf{r}_2}{a_2}+\left(1+\widetilde{a}_1\right)\left(1+\widetilde{a}_2\right)^{-1}\frac{\mu m_1}{1+\mu m_1}\frac{a_1^0}{a_2^0}\frac{\mathbf{r}_1}{a_1}\right|, \\ \frac{\Delta}{a_2} &= \left|\frac{\mathbf{r}_2}{a_2}-\left(1+\widetilde{a}_1\right)\left(1+\widetilde{a}_2\right)^{-1}\frac{1}{1+\mu m_1}\frac{a_1^0}{a_2^0}\frac{\mathbf{r}_1}{a_1}\right|. \end{aligned} \tag{10}$$

В разделе 2.6 выполнено построение алгоритма разложения гамильтониана двупланетной задачи Солнце — Юпитер — Сатурн в ряд Пуассона по всем элементам с помощью пуассоновского процессора PSP. Общий вид разложения гамильтониана h_2:

$$h_2 = \sum A_{kn}x^k\cos ny, \tag{11}$$

где позиционные $x=\{x_1,\ldots,x_6\}$ и угловые элементы $y=\{y_1,\ldots,y_6\}$ соответствуют одной из двух систем: (1) или (3). Суммирование осуществляется по всем неотрицательным k_s и целым n_s $(s=1,\ldots,6)$. Соотношения для индексов:

$$\begin{aligned} &n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6=0\,, \\ &n_3+n_6=\text{четное}\,, \\ &k_s=|n_s|+\text{четное неотрицательное}\ (s=2,3,5,6)\,, \\ &k_2+k_3+k_5+k_6=|n_1+n_4|+\text{четное неотрицательное}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Раздел 2.6.1 посвящен оцениванию границ изменения индексов k_s, n_s, $s = 1, \ldots, 6$. Оценивается степень d относительно наклонов и эксцентриситетов, на которой следует остановится в (11), чтобы получить гамильтониан в осредненных элементах с точностью до μ^σ. Используется то, что для Юпитера и Сатурна эксцентриситеты $e_1 \approx 0.05$, $e_2 \approx 0.05$ и синусы половинных углов наклона $\widetilde{I}_1 \approx 0.01$, $\widetilde{I}_2 \approx 0.02$ являются малыми одного порядка μ_1, а также то, что радиусы сходимости для переменных типа e равны примерно 0.2 В этом случае получается следующая зависимость $d(\sigma)$:

$$d(1) = 1\,, \quad d(2) = 6\,, \quad d(3) = 11\,, \quad d(4) = 16\,, \quad \ldots . \tag{13}$$

Сделан вывод, что для $\sigma = 2$ в новом и старом гамильтониане нужно учитывать члены порядка $\mu\mu_1^6$, $\mu^2\mu_1$; при $\sigma = 3$ — $\mu\mu_1^{11}$, $\mu^2\mu_1^6$, $\mu^3\mu_1$, при $\sigma = 4$ — $\mu\mu_1^{16}$, $\mu^2\mu_1^{11}$, $\mu^3\mu_1^6$, $\mu^4\mu_1$.

Если при $k_1 + \ldots + k_6 \leqslant d$ потребовать дополнительно $0 \leqslant n_1 \leqslant c$, $|n_4| \leqslant c$, то сумма (11) будет содержать конечное число слагаемых. Выбор $c(\sigma)$ определяется скоростью сходимости при $\mu_1 = 0$, то есть для плоских круговых орбит:

$$c(2) = 13\,, \quad c(3) = 25\,, \quad c(4) = 37\,. \tag{14}$$

В разделе 2.6.2 получены оценки числа слагаемых $N(d, c)$ в разложении гамильтониана двупланетной задачи (11):

$$N(6, 13) \approx 43 \cdot 10^3\,, \quad N(11, 25) \approx 3.5 \cdot 10^6\,, \quad N(16, 37) \approx 78 \cdot 10^6\,. \tag{15}$$

Выбор значений постоянных a_0, m_1, m_2, a_1^0, a_2^0, необходимых для вычисления коэффициентов A_{kn} разложения (11), выполнен в разделе 2.6.3. Масштабный фактор a_0 положен равным астрономической единице длины. Массы планет, соответствующие стандарту IERS 1992, взяты из (Moisson, 1999):

$$\begin{aligned} \mu = 10^{-3}, \quad m_1 &= (1047.3486\mu)^{-1} = 0.954791938\,, \\ m_2 &= (3497.90\mu)^{-1} = 0.285885817\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Для уменьшения влияния малых знаменателей, которые появятся в процессе выполнения осредняющих преобразований, средние значения больших полуосей выбраны равными $a_1^0 = 5.215$, $a_2^0 = 9.530$ вместо $a_1^0 = 5.2026$, $a_2^0 = 9.5549$. Этот выбор ухудшил следующую за 5/2 подходящую дробь: 72/29 заменилась на 42/17, что, однако, несущественно. При $n_1 = 17$, $n_4 = -42$ имеем $k_2 + k_3 + k_5 + k_6 \geqslant 42 - 17 = 25$, что лежит далеко за границами (13).

В разделах 2.6.4, 2.6.5 описан алгоритм построения разложения гамильтониана в ряд Пуассона по всем элементам.

Обоснование алгоритма построения разложения гамильтониана h_2 с символьными параметрами выполнено в разделе 2.7. При сохранении параметров

$a_1^0, a_2^0, a_0, m_1, m_2, \mu$ в символьном виде, для подавляющего большинства коэффициентов удается сохранить рациональный вид, что обеспечивает высокую точность значений коэффициентов, а также позволяет использовать разложения для произвольных двупланетных систем с малыми эксцентриситетами и наклонами орбит. Чтобы сохранить параметры в символьном виде, введены дополнительные безразмерные полиномиальные переменные

$$m_1, \quad m_2, \quad \mu, \quad d_1 = \frac{a_0}{a_2^0}, \quad d_2 = \frac{1}{1+\mu m_1}\frac{a_1^0}{a_2^0}.$$

В разделе 2.8 описаны результаты построения разложений с помощью пуассоновского процессора PSP (Иванова, 1997). Диапазон изменения индексов выбран так, чтобы получить гамильтониан в осредненных элементах с точностью до μ^2: $k_1 + \dots + k_6 \leqslant d = 6$, $|n_s| \leqslant c = 15$ $(s = 1, ..., 6)$.

Разложения с числовыми параметрами для обеих систем элементов содержат по 61 086 слагаемых. Разложения с символьными параметрами содержат более 730 000 слагаемых для каждой системы элементов.

Построенные разложения подтвердили состоятельность оценок пределов суммирования и числа слагаемых ряда Пуассона при заданной точности разложения гамильтониана.

В разделе 2.9 доказано свойство, что при малых порядках слагаемых перестановка индексов $k_3 \leftrightarrow k_6$ не ведет к изменению значений коэффициентов.

Третья глава *«Построение осредненных уравнений движения слабовозмущенной двупланетной задачи»* содержит описание алгоритма осредняющего по быстрым переменным преобразования Хори–Деприи.

В разделе 3.1 рассмотрена неканоническая параметризация скобок Пуассона для обеих систем элементов. При выполнения операции осреднения используется метод Хори–Деприи (иначе — метод преобразований Ли). Этот метод опирается на скобки Пуассона, что позволяет отказаться от канонических элементов. Для проведения выкладок достаточно выразить скобки Пуассона в нужной исследователю системе фазовых переменных.

Алгоритм выполнения преобразований Ли построен в разделе 3.2. Особенности реализации преобразований Ли с использованием эшелонированного пуассоновского процессора EPSP (Ivanova, 2001) рассмотрены в разделе 3.3. Разложения с численными значениями параметров, соответствующими системе Солнце — Юпитер — Сатурн, построены в разделе 3.3.1. Осредненный гамильтониан $H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \mu^3 H_3$, производящая функция $T = \mu T_1 + \mu^2 T_2 + \mu^3 T_3$, правые части уравнений движения в средних элементах получены с точностью до третьей степени малого параметра μ. Функции замены переменных, описывающие связь между оскулирующими и средними элементами — с точностью до μ^2. Таким образом, для задачи Солнце — Юпитер — Сатурн построено второе улучшенное приближение по терминологии Крылова–Боголюбова (Боголюбов, Митропольский, 2005).

В разделе 3.3.2 построено второе приближение для разложений с символьными параметрами.

Четвертая глава *«Орбитальная эволюция двупланетной системы Солнце — Юпитер – Сатурн на космогонических интервалах времени»* посвящена описанию метода исследования орбитальной эволюции двупланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн на космогоническом интервале времени 10 млрд. лет на основе численного интегрирования уравнений движения в средних элементах.

Раздел 4.1. посвящен описанию начальных условий и методов интегрирования. Начальные данные для интегрирования основывались на средних эклиптических гелиоцентрических элементах на эпоху JD2451545.0, отнесенных к эклиптике и равноденствию J2000.0 (Simon et al., 1994). Интервал интегрирования составил 10 млрд. лет. Использование осредненных уравнений движения позволило увеличить шаг интегрирования в методе Рунге–Кутты 11-го порядка (Данилов, 2008) до 10 тыс. лет. В методе Эверхарта 15-го порядка (Everhart, 1974) применялся автоматический выбор шага интегрирования. Методы численного интегрирования осредненных уравнений движения имели сравнимую точность. Метод Эверхарта 15-го порядка показал бóльшую эффективность на интервалах времени, меньших 1 млрд. лет, метод Рунге–Кутты 11-го порядка — на интервалах времени, превышающих 1 млрд. лет.

В разделе 4.2 исследована орбитальная эволюция двупланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн на основе решений первого (с точностью до первой степени малого параметра μ), второго (с точностью до μ^2) и второго улучшенного (с точностью до μ^3 в средних элементах) приближений.

Показано, что элементы орбит Юпитера и Сатурна на рассматриваемом интервале времени 10 млрд. лет изменяются почти периодически. Эксцентриситеты и наклоны орбит Юпитера и Сатурна остаются малыми, а их значения отделены от нуля.

Разность между первым и вторым приближениями пропорциональна $\sqrt{\mu}$, а не μ, что свидетельствует о наличии слабого резонанса. Относительные разности между результатами второго и второго улучшенного приближений не превосходят μ, за исключением относительной разности амплитуды колебаний эксцентриситета Сатурна, которая на 10% превышает μ.

В первом приближении (с точностью до μ) узлы орбит Юпитера и Сатурна либрируют с амплитудами 12.9° и 32.8° соответственно. Этот результат находится в согласии с данными, полученными при аналитическом решении вековых уравнений двупланетной задачи (Смарт, 1965). При учете второго приближения характер эволюции узлов орбит Юпитера и Сатурна относительно плоскости эклиптики изменяется. Появляется вековой ход, который становится заметным на интервалах времени, превышающих 10 млн. лет. Скорость векового изменения средних за период значений долгот восходящих узлов орбит Юпитера и Сатурна составляет 5.6° за млрд. лет.

Если в качестве основной плоскости выбрать плоскость Лапласа, то эволюция узлов будет иметь наиболее простой характер. На плоскости Лапласа разность долгот одноименных узлов орбит Юпитера и Сатурна в точности равна 180° (Шарлье, 1966). Данное свойство использовалось для контроля результатов вычисления. При изменении наклона основной плоскости к плоскости эклиптики происходит изменение режима эволюции долгот восходящих узлов орбит Юпитера и Сатурна: от либрационного к ротационному.

В разделе 4.3 приведены оценки точности численного интегрирования уравнений движения в средних элементах. На всем рассматриваемом интервале времени модуль относительной ошибки интеграла δE не превосходит $5.2 \cdot 10^{-13}$ при интегрировании уравнений движения второго и $8.75 \cdot 10^{-13}$ при интегрировании уравнений второго улучшенного приближений. В обоих случаях среднее значение относительной разности δE остается постоянным на всем интервале интегрирования.

При численном интегрировании осредненных уравнений движения интеграл энергии сохраняется с существенно более высокой точностью, чем интеграл площадей. Компоненты интеграла площадей σ_x и σ_y сохраняются с гораздо меньшей точностью, чем z-компонента. Для второго приближения модуль относительной ошибки $\delta\sigma_z$ не превосходит $3.5 \cdot 10^{-10}$, а ее среднее значение остается постоянным. В решении для второго улучшенного приближения модуль $\delta\sigma_z$ достигает $7.7 \cdot 10^{-10}$, а среднее значение относительной разности возрастает со скоростью $3.75 \cdot 10^{-11}$ (млрд. лет)$^{-1}$. Для второго приближения максимальные по модулю отклонения значений σ_x/σ_{z0} и σ_y/σ_{z0} от нуля достигают $8.8 \cdot 10^{-7}$ и $5.6 \cdot 10^{-7}$ соответственно. Здесь σ_{z0} — значение z-компоненты интеграла площадей в начальный момент. В решении для второго улучшенного приближения максимальные по модулю отклонения значений σ_x/σ_{z0} и σ_y/σ_{z0} достигают $7.3 \cdot 10^{-7}$ и $7.4 \cdot 10^{-7}$ соответственно.

Порядок максимальных значений относительных разностей для интегралов движения составляет: 10^{-13} — для интеграла энергии, 10^{-10} — для z-компоненты интеграла площадей, 10^{-7} — для компонент σ_x, σ_y интеграла площадей.

Раздел 4.4 посвящен вопросу сохранения интегралов площадей при осредняющих преобразованиях. Результаты численного интегрирования осредненных уравнений движения показали, что компоненты интеграла площадей σ_x

и σ_y сохраняются с гораздо меньшей точностью, чем z-компонента и интеграл энергии.

Интегралы площадей и их форма, как показал А.Пуанкаре (Пуанкаре, 1965), в планетном варианте слабовозмущенной задачи нескольких тел сохраняются при осредняющих преобразованиях в первом приближении по малому параметру. В работе (Холшевников, 1991) результат Пуанкаре был усилен: форма интегралов сохраняется в любом приближении по малому параметру. Кроме того, интеграл площадей сохраняет вид в системе координат Якоби (Шарлье, 1966).

В настоящей работе доказано, что компоненты σ_x и σ_y (в отличие от σ_z и интеграла энергии E) *не сохраняются в системе, определяемой конечным отрезком разложения в ряд Пуассона* осредненного гамильтониана H.

Доказательство выполнено двумя способами. В первом — выражения для компонент интеграла площадей сохранены в замкнутом виде. Во втором — компоненты интеграла площадей разлагаются в ряд Пуассона с точностью до шестого порядка малости относительно позиционных элементов.

В разделе 4.5 приведены оценки короткопериодических возмущений, исключенных в результате проведения осредняющих преобразований. Анализ функций замены переменных позволяет получить оценки этих возмущений. Получено, что короткопериодические возмущения сохраняются малыми на всем рассмотренном интервале времени.

В разделе 4.6 для проверки построенной в настоящей работе численно-аналитической теории выполнено сравнение параметров динамической эволюции двупланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн, получаемых различными методами. Использовалась вековая теория эволюции системы Солнце — Юпитер — Сатурн с точностью до первого порядка относительно возмущающих масс (Мюррей, Дермотт, 2010), а также результаты численного интегрирования уравнений движения двупланетной задачи Солнце — Юпитер — Сатурн с помощью программы NBI (Varadi, 1999). Описания орбитальной эволюции двупланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн, полученные с помощью численно-аналитической теории, теории вековых возмущений и численной модели NBI, качественно и, в целом, количественно согласуются между собой. Это подтверждает верность проведенных аналитических преобразований с использованием специализированных систем компьютерной алгебры PSP и EPSP, а также правомерность использования полученных разложений с числовыми параметрами при исследовании орбитальной эволюции системы Солнце — Юпитер — Сатурн.

В разделе 4.7 выполнено сравнение результатов, полученных при использовании рядов с числовыми и символьными параметрами, реализующих второе приближение. По результатам сравнения сделан вывод о возможности использования разложений с символьными параметрами при исследовании орбитальной эволюции слабовозмущенных двупланетных систем на космогонических интервалах времени.

Пятая глава *«Орбитальная эволюция слабовозмущенных двупланетных систем»* содержит описание метода исследования устойчивости двупланетных систем на основе интегрирования осредненных уравнений движения с последующим возвратом к оскулирующим элементам.

В разделе 5.1 уточняется используемое в настоящей работе понятие *устойчивость*. Под устойчивым понимается такое поведение системы, при котором оскулирующие эллипсы на космогонических временах остаются в границах, препятствующих тесным сближениям. Точнее,

$$c_1 < a_1(1-e_1), \quad a_1(1+e_1) < a_2(1-e_2) - c_2, \quad a_2(1+e_2) < c_3\,. \qquad (17)$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяют размах допустимых колебаний. Афелийное расстояние первой от своего солнца планеты остается меньшим перигелийного расстояния второй планеты с некоторым запасом, определяемым радиусом сферы действия более массивной планеты. Это определение выделяет один из видов устойчивости по Лагранжу.

В разделе 5.1.1 при исследовании устойчивости по Лагранжу двупланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн методом осреднения показано, что при увеличении масс Юпитера и Сатурна в $\chi = 19$ раз возможны тесные сближения этих планет до расстояния, меньшего сферы действия Юпитера относительно Солнца. Такие сближения должны приводить к существенным изменениям элементов орбит планет, а возможно, и к распаду системы.

Неожиданно найденное критическое значение $\chi \approx 19$ оказалось существенно *ниже* критического значения Накози $\chi \approx 29$ (Nacozy, 1976), полученного в результате численного интегрирования.

С помощью программ численного интегрирования уравнений движения задачи N тел NBI (Varadi, 1999) и Mercury 6.2 (Chambers, 1999) было уточнено критическое значение параметра χ. В модели NBI использовались: модифицированный интегратор Коуэла–Штермера 15 порядка и интегратор Грегга–Булирша–Штоера 20 порядка. В модели Mercury 6.2 — интеграторы Эверхарта 15 порядка и Булирша–Штоера. Два набора начальных данных соответствовали численным эфемеридам DE405 и EPM2005. Получено, что распад системы Солнце — Юпитер — Сатурн наступает при $\chi \geqslant 25$.

Влияние начальных условий на оценку параметра χ исследовано с помощью численного интегрирования уравнений движения двупланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн на интервале времени 10^6 лет для 101 набора начальных данных. Координаты барицентров Юпитера и Сатурна соответствовали численной эфемериде DE405 на моменты 1 января 2000 г. $12^h\ 00^m\ 00^s$ координатного времени — 1 апреля 2000 г. $12^h\ 00^m\ 00^s$ координатного времени с шагом 1 сутки. Использовалась программа численного интегрирования уравнений движения задачи N тел NBI с модифицированным интегратором Коуэла–Штермера 15 порядка.

Данные моделирования показали, что при $\chi = 24$ для всех рассмотренных начальных условий система Солнце — Юпитер — Сатурн устойчива на интервале времени 10^6 лет. При $\chi = 25$ большинство решений устойчивы на интервале 10^5 лет, но только 20 решений сохранили устойчивость на интервале 10^6 лет. Следовательно, критическое значение χ можно принять равным 25.

Интересно, что исследование только осредненной системы уравнений в задаче Солнце – Юпитер – Сатурн приводит к критическому значению параметра $\chi = 99$. Численное интегрирование дает $\chi = 25$. Исследование оскулирующих элементов, полученных по формулам замены переменных после интегрирования осредненной системы, приводит к оценке $\chi = 19$. Первое значение сильно завышено, поскольку игнорирует колебания оскулирующих элементов вокруг средних с возрастающей вместе с χ амплитудой. Различие между критическими значениями параметра χ, полученными численным методом и методом, использующим интегрирование осредненных уравнений движения с возвратом к оскулирующим элементам, сравнительно небольшое. Предложенный в настоящей работе метод исследования устойчивости системы при варьировании масс планет позволяет получать оценку снизу критического значения параметра χ, близкую к точной.

В разделе 5.1.2 при исследовании орбитальной эволюции внесолнечной планетной системы 47 UMa показано, что система сохраняет устойчивость при увеличении масс планет в 38 раз. Максимальное значение коэффициента χ, при котором диапазоны изменения эксцентриситетов орбит не противоречат наблюдениям, не превышает 10, что дает нижнюю оценку значения угла наклона плоскости орбиты к картинной плоскости $i = 5.7°$ и верхние оценки масс планет $m_1 = 26.3$, $m_2 = 7.9$ масс Юпитера. Полученные в ходе исследования оценки масс планет и угла наклона плоскости орбиты к картинной плоскости согласуются с результатами других авторов.

В разделе 5.2 выполнено исследование резонансных свойств внесолнечных двупланетных систем. Введены понятия узкой и широкой резонансных зон. Ширина резонансной зоны зависит от амплитуды возмущений. В методе осреднения информацию о короткопериодических возмущениях содержит функция замены переменных, описывающая связь между средними и оскулирующими элементами. Ширина резонансной зоны оценивается на основе вычисления мажоранты функции замены переменных. Если малый параметр действительно мал, то зоны разных резонансов не перекрываются. Вне зоны резонанса движение условно периодично, по крайней мере в первом приближении по μ. При определении узкой зоны учитываются только резонансные гармоники. При определении широкой зоны учитывается дополнительно влияние нерезонансных короткопериодических слагаемых.

Для описания резонансных зон использованы относительные единицы измерения: значения большой полуоси и ширины резонансных зон выражены в единицах большой полуоси первой планеты a_1.

В разделе 5.2.1 определены резонансные значения большой полуоси, ширины резонансных зон, области перекрытия резонансов для внутреннего случая (более массивная планета находится ближе к звезде, чем менее массивная). При увеличении малого параметра μ резонансные значения большой полуоси уменьшаются, так же как и расстояния между ними, что ведет к росту областей перекрытия резонансов.

В разделе 5.2.2 получены аналогичные значения для внешнего случая (более массивная планета расположена дальше от звезды, чем менее массивная). При увеличении μ растут и резонансные значения большой полуоси, и расстояния между ними, что приводит к сокращению размеров областей перекрытия резонансов.

В разделе 5.2.3 рассмотрены резонансные свойства внесолнечных двупланетных систем. На основе результатов, полученных в разделах 5.2.1, 5.2.2, дано описание возможных состояний систем с учетом одиночных резонансов и областей перекрытия резонансных зон, попадающих в диапазон возможных значений больших полуосей орбит планет, определяемых из наблюдений.

Проведенный анализ резонансных свойств двупланетных систем показал большое разнообразие резонансных условий, возможных или реализующихся в этих системах. Наличие резонансов может по разному проявляться в динамической эволюции планетных систем. С одной стороны, под действием резонансов устойчивые конфигурации планет могут сохраняться на интервалах времени в миллиарды лет. С другой стороны, перекрытие резонансов и соответствующих им стохастических слоев приводит к медленной диффузии динамической системы. Выявление резонансов и исследование орбитальной эволюции резонансных внесолнечных систем — актуальные задачи небесной механики, требующие высокоточных данных об элементах орбит планет.

Полученные результаты являются первым шагом этого большого исследования. Они задают ориентиры для выбора направлений дальнейших исследований.

Раздел 5.3 посвящен исследованию динамической эволюции внесолнечной двупланетной системы 47 UMa.

В разделе 5.3.1 приводятся сведения об истории открытия и определения элементов орбит планет системы 47 UMa.

В разделе 5.3.2 выполнен анализ резонансных свойств планетной системы 47 UMa и исследована орбитальная эволюция в окрестности узких резонансных зон. Аналитическое решение неприменимо в областях узкого резонанса, но его можно использовать для изучения орбитальной эволюции в областях широкого резонанса и в нерезонансных зонах. Описание стохастических свойств движения планет проводилось с помощью интегральной автокорелляционной функции, вычисляемой на основе результатов численного интегрирования осредненных уравнений движения. При уменьшении отношения больших полуосей орбит планет a_2/a_1 система попадает в область перекрытия резонансных зон, что приводит к хаотизации движения.

Сделан вывод, что предложенный в диссертации метод исследования орбитальной эволюции слабовозмущенных двупланетных систем может использоваться для изучения особенностей динамической эволюции подобных систем на космогонических интервалах времени.

Заключение содержит обсуждение результатов, выносимых на защиту. Сформулированы нерешенные задачи и направления исследований, интересные по мнению автора.

Работа по теме диссертации проходила при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований, Программы поддержки ведущих научных школ, Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Федерального агентства по образованию Министерства образования и науки Российской Федерации.

Автор благодарен профессору К.В.Холшевникову, под руководством которого работал со студенческих лет. Автор выражает благодарность Т.В.Ивановой, разработчику систем компьютерной алгебры PSP и EPSP, за предоставленную возможность использовать эти системы при выполнении работы, а также за консультации по эффективному применению указанных систем. Автор благодарен коллегам по кафедре астрономии и геодезии и Астрономической обсерватории Уральского государственного университета, а также коллегам по кафедре небесной механики и Научно-исследовательскому астрономическому институту Санкт-Петербургского государственного университета, с которыми ему посчастливилось сотрудничать.

Основные идеи и результаты настоящей диссертации опубликованы в работах

1.1. Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д. Разложение гамильтониана в ряд Пуассона по всем элементам (теория) // Астрон. вестн. 2001. Т. 35, №3. С. 267–272.

1.2. Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д. Разложение гамильтониана двупланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: оценка и прямое вычисление коэффициентов // Астрон. вестн. 2002. Т. 36, №1. С. 75–87.

1.3. Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Эффект селекции в больших полуосях орбит внесолнечных планет // Астрон. вестн. 2002. Т. 36, № 6. С. 504–515.

1.4. Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Разложение гамильтониана двупланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: применение пуассоновского процессора // Астрон. вестн. 2004. Т. 38, №2. С. 171–179.

1.5. Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Динамическая эволюция слабовозмущенной двупланетной системы на космогоническом интервале времени: система Солнце — Юпитер — Сатурн // Астрон. вестн. 2006. Т. 40, №3. С. 263–275.

1.6. Холшевников К.В., Кузнецов Э.Д. Обзор работ по орбитальной эволюции больших планет Солнечной системы // Астрон. вестн. 2007. Т. 41, №4. С. 291–329.

1.7. Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Орбитальная эволюция двупланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 1. С. 139–149.

1.8. Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Запас устойчивости двупланетных систем по массам планет // Астрон. вестн. 2009. Т. 43, №3. С. 230–239.

1.9. Кузнецов Э.Д. Резонансные свойства внесолнечных двупланетных систем // Астрон. журн. 2010. Т. 87, № 6. С. 605–616.

1.10. Кузнецов Э.Д. К вопросу о сохранении интегралов площадей при осредняющих преобразованиях // Астрон. журн. 2010. Т. 87, № 6. С. 617–624.

Кроме того, результаты изложены в

2.1. Греб А.В., Кузнецов Э.Д. Новый метод разложения возмущающей функции в планетной задаче // Астрометрия, геодинамика и небесная механика на пороге XXI века. СПб.: ИПА РАН, 2000. С. 268–269.

2.2. Холшевников К.В., Кузнецов Э.Д. О распределении больших полуосей орбит внесолнечных планет // Физика Космоса: Тр. 31-й Междунар. студ. науч. конф., Екатеринбург, 28 янв. – 1 февр. 2002 г. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2002. С. 112–127.

2.3. Kuznetsov E.D., Kholshevnikov K.V., Greb A.V. Expansion of the Hamiltonian of the planetary three-body problem into Poisson series in all elements using Poisson series processor PSP // Труды ИПА РАН. Вып. 8. Небесная механика. СПб.: ИПА РАН, 2002. С. 117–118.

2.4. Холшевников К.В., Кузнецов Э.Д. Распределение расстояний в системах внесолнечных планет // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Доклады конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. С. 265–266.

2.5. Kholshevnikov K.V., Kuznetsov E.D. Evolution of a two-planetary regular system on a cosmogonic time scale // Journées-2003. Astrometry, Geodynamics and Solar System Dynamics: from milliarcseconds to microarcseconds / Eds. Finkelstein A., Capitaine N. SPb.: IAA RAS, 2004. P. 286–287.

2.6. Kholshevnikov K.V., Kuznetsov E.D. Behaviour of a weakly perturbed two-planetary system on a cosmogonic time-scale // Order and chaos in stellar and planetary systems. ASP Conference Series. V. 316 / Eds. Byrd G.G., Kholshevnikov K.V., Myllâri A.A., Nikiforov I.I., Orlov V.V. San Francisco: ASP, 2004. P. 99–105.

2.7. Kholshevnikov K.V., Kuznetsov E.D. Behaviuor of a two-planetary system on a cosmogonic time-scale // Proceedings of the IAU Coll. №197. Dynamics of Populations of Planetary Systems / Eds. Knežević Z., Milani A. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. P. 107–112.

2.8. Kholshevnikov K.V., Kuznetsov E.D. Behaviuor of a weakly perturbed Two-Planetary System on very long time-scales // Few-body problem: theory and computer simulations. A workshop held in Turku, 4–9 July 2005 / Ed. C.Flynn. Annales Universitatis Turkuensis. Ser. A. V. 358. Turku. 2006. P. 60–63.

2.9. Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Орбитальная эволюция Солнечной системы // Физика Космоса: Тр. 36-й Международ. студ. науч. конф., Екатеринбург, 29 янв. — 2 февр. 2007 г. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2007. С.142–179.

2.10. Kholshevnikov K.V., Kuznetsov E.D. Orbital evolution of the Solar System // Analytical methods of celestial mechanics. Short abstracts of the international meeting held on July 8–12, 2007. St. Petersburg, 2007. P. 42–45.

2.11. Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Запас устойчивости Солнечной системы по массам планет // Физика Космоса: Тр. 38-й Международ. студ. науч. конф., Екатеринбург, 2–6 февр. 2009 г. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2009. С.78–88.

2.12. Kholshevnikov K.V., Kuznetsov E.D. Evolution of planetary orbits in the Solar System (Review) // Resonances, stabilization, and stable chaos in hierarchical triple systems. Proceedings of the Second International Workshop held in Chiba, Japan, 8–13 September, 2008. Ed. M. M. Saito, M. Shibayama, and M. Sekiguchi. Chiba, 2009. P. 1–7.

2.13. Кузнецов Э.Д. Влияние планетарных масс на устойчивость Солнечной системы // Известия ГАО РАН. 2009. №219. Вып. 4. «Труды Всероссийской астрометрической конференции «Пулково–2009»». С.167–172.

Опубликованы резюме 17 докладов.

В совместных статьях вклад соавторов равнозначен. Во всех указанных работах автор участвовал в постановке задачи. Автору принадлежит разработка вычислительного алгоритма для построения разложения гамильтониана двупланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам с помощью метода вычисления коэффициентов по интегральным формулам (работы 1.1, 1.2). Автором разработан и реализован с помощью пуассоновского процессора PSP алгоритм разложения возмущенного гамильтониана (работа 1.4). Автором разработан и реализован с помощью эшелонированного пуассоновского процессора EPSP метод построения осредненных уравнений движения с помощью преобразований Ли. Автором выполнено численное интегрирование осредненных уравнений движения и исследована орбитальная эволюция двупланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн (работы 1.5, 1.7). Автором проведено исследование эффекта селекции в больших полуосях внесолнечных планетных систем на основе элементов орбит, получаемых из наблюдений (работа 1.3). Автором выполнен обзор современных численных, аналитических, численно-аналитических теорий движения больших планет Солнечной системы, а также работ, в которых исследуются проявления хаоса в эволюции Солнечной системы (работа 1.6). Автором разработан и реализован численно-аналитический метод исследования устойчивости двупланетных систем в зависимости от масс планет, основанный на интегрировании осредненных уравнений движения и использовании функции замены переменных для перехода к оскулирующим элементам орбиты (работа 1.8). Обсуждение результатов проводилось совместно всеми авторами.

Список литературы

Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. В кн. *Боголюбов Н.Н.* Собрание научных трудов. Т. 3. М.: Математика и нелинейная механика, 2005. 605 с.

Вашковьяк М.А. Количественные характеристики эволюции орбит в ограниченной круговой двукратноосредненной задаче трех тел // Препринт Ин-та прикл. математики АН СССР. №157. М., 1979. 30 с.

Вашковьяк М.А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. 1. Качественное исследование // Космические исследования. 1981a. Т. 19, вып. 1. С. 5–18.

Вашковьяк М.А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно-осредненной задаче трех тел. 2. Количественные характеристики // Космические исследования. 1981b. Т. 19, вып. 2. С. 165–177.

Герасимов И.А., Чазов В.В., Рыхлова Л.В., Тагаева Д.А. Построение теории движения тел Солнечной системы, основанной на универсальном методе вычисления возмущающей функции // Астрон. вестн. 2000. Т. 34, №6. С. 559–566.

Давыдов В.Л., Молчанов А.М. Численные эксперименты в задаче об эволюции двухпланетной системы // Препринт Ин-та прикл. математики АН СССР. №16. М., 1971. 30 с.

Данилов В.М. Анализ флуктуаций плотности в моделях рассеянных звездных скоплений // Астрон. журн. 2008. Т. 85. №11. С. 986–998.

Иванова Т.В. Пуассоновский процессор PSP: Препринт ИТА РАН №64. СПб., 1997. 46 с.

Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 588 с.

Питьева Е.В. Национальные высокоточные эфемериды планет и Луны — EPM // Труды ИПА РАН. Вып. 17. СПб: ИПА РАН, 2007. С. 42–59.

Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. М.: Наука, 1965. 572 с.

Смарт У.М. Небесная механика. М.: Мир, 1965. 504 с.

Сухотин А.А. Алгоритм метода Гаусса–Альфана–Горячева в лагранжевых переменных и его машинная реализация // Астрон. и геодезия. №9. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1981. С. 67–73.

Сухотин А.А. Эволюция элементов орбит внешних планет на интервале времени 800 тысяч лет // Астрон. и геодезия. №12. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1984. С. 80–91.

Сухотин А.А., Холшевников К.В. Эволюция планетных орбит за 200 тысяч лет, рассчитанная методом Альфана–Горячева // Астрон. и геодезия. № 14. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1986. С. 5–21.

Холшевников К.В. Сохранение формы интеграла площадей при осредняющих преобразованиях // Астрон. журн. 1991. Т. 68. С. 660–663.

Шарлье К. Небесная механика. М.: Наука, 1966. 628 с.

Applegate J.H., Douglas M.R., Gürsel Y., et al. The outer Solar System for 200 million years // Astron. Journ. 1986. V. 92. P. 176–194.

Batygin K., Laughlin G. On the dynamical stability of the Solar System // Astrophys. Journ. 2008. V. 683. P. 1207–1216.

Chambers J.E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1999. Vol. 304. P. 793–799.

Everhart E. Implicit single methods for integrating orbits // Celest. Mech., 1974. V. 10. P. 35–55.

Fienga A., Manche H., Laskar J., Gastineau M. INPOP06. A new numerical planetary ephemerides // Astron. Astrophys. 2008. V. 477. P. 315–327.

Fienga A., Laskar J., Morley T. et al. INPOP08, a 4-D planetary ephemeris: From asteroid and time-scale computations to ESA Mars Express and Venus Express contributions // Astron. Astrophys. 2009. V. 507. P. 1675–1686.

Folkner W. M., Williams J. G., Boggs D. H. JPL planetary and lunar ephemeris, DE421. Interoffice Memorandum. 343R-08-003. JPL. 2008.

Giorgilli A., Locatelli U., Sansottera M. Kolmogorov and Nekhoroshev theory for the problem of three bodies // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2009. V. 104. P. 159–173.

Gladman B. Dynamics of systems of two close planets // Icarus. 1993. V. 106. P. 247–263.

Guzzo M. The web of three-planet resonances in the outer Solar System // Icarus. 2005. V. 174. P. 273–284.

Guzzo M. The web of three-planet resonances in the outer Solar System. II. A source of orbital instability for Uranus and Neptune // Icarus. 2006. V. 181. P. 475–485.

Hayes W.B. Is the outer Solar System chaotic? // Nature Physics. 2007. V. 3. P. 689–691.

Hayes W.B. Surfing on the edge: chaos versus near-integrability in the system of Jovian planets // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2008. V. 386. P. 295–306.

Hayes W.B., Danforth C.M. Solar System: Surfing the Edge of Chaos Part II // American Astronomical Society. DDA meeting. 2008. V. 39. P. 8.04.

Ivanova T. A new echeloned Poisson series processor (EPSP) // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2001. V. 80. P. 167–176.

Henrard J., Libert A.-S. The secular planetary three body problem revisited // Proceedings of the IAU Coll. №197. Dynamics of Populations of Planetary Systems / Eds. Knežević Z., Milani A. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. P. 49–54.

Ito T., Tanikawa K. Long-term integrations and stability of planetary orbits in our Solar System // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2002. V. 336 P. 483–500.

Laskar J. Large scale chaos in the Solar System // Astron. Astrophys. 1994. V. 287. P. L9–L12.

Laskar J. Chaotic diffusion in the Solar System // Icarus. 2008. V. 196. Issue 1. P. 1–15.

Laskar J., Gastineau M. Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth // Nature. 2009. V. 459. P. 817–819.

Libert A.-S., Henrard J. Analytical approach to the secular behaviour of exoplanetary systems // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2005. V. 93. P. 187–200.

Libert A.-S., Henrard J. Exoplanetary systems: The role of an equilibrium at high mutual inclination in shaping the global behavior of the 3-D secular planetary three-body problem // Icarus. 2007. V. 191. P. 469–485.

Locatelli U., Giorgilli A. Invariant tori in the secular motions of the three-body planetary systems // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2000. V. 78. P. 47–74.

Marchal C. The general solution of the planar Laplace problem // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2005. V. 92. P. 123–134.

Marcy G.W., Butler R.P., Fisher D., et al. Masses and orbital characteristics of extrasolar planets using stellar masses derived from Hipparcos, metallicity, and stellar evolution. http://exoplanets.org. 2010.

Masaki Y., Kinoshita H. Orbital theory of an eccentric extrasolar planet disturbed by a massive inner planet // Proceedings the 8^{th} IAU Asian-Pacific Regional Meeting. V. II. Astron. Soc. Jap. 2002. P. 51-52.

Mayor M., Naef D., Pepe F. The Geneva extrasolar planet search programmes. http://exoplanets.eu. 2010.

Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S. Stationary orbits in resonant extrasolar planetary systems // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2006. V. 94. P. 411–432.

Moisson X. Solar system planetary motion to third order of masses // Astron. Astrophys. 1999. V. 341. P. 318–327.

Moisson X., Bretagnon P. Analytical planetary solution VSOP2000 // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2000. V. 80. P. 205–213.

Murray N., Holman M. The origin of chaos in the outer Solar System // Science. 1999. V. 283. P. 1877–1881.

Nacozy P.E. On the stability of the Solar System // Astron. Journ. 1976. V. 81. P. 787–791.

Nobili A.M., Milani A., Carpino M. Fundamental frequencies and small divisors in the orbits of the outer planets // Astron. Astrophys. 1989. V. 210. P. 313–336.

Pitjeva E.V. Ephemerides EPM2008: the updated model, constants, data // Journées-2008. Systems de reference spatio-temporels and X. Lohrman-Kolloquium: Astrometry, Geodynamics and Astronomical Reference Systems. Dresden, Germany. Dresden, 2009.

Quinn T.R., Tremaine S., Duncan M. A three million year integration of the Earth's orbit // Astron. Journ. 1991. V. 101. P. 2287–2305.

Robutel P. An application of KAM theory to the planetary three body problem // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1993a. V. 56. P. 197–199.

Robutel P. The stability of the planetary three-body problem: influence of the secular resonances // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1993b. V. 57. P. 97–98.

Robutel P. Stability of the planetary three-body problem. II. KAM theory and existence of quasiperiodic motions // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1995. V. 62. P. 219–261.

Schneider J. The extrasolar planets encyclopaedia. http://exoplanet.eu. 2010.

Simon J.L., Francou G. Théorie au troisième ordre des masses des quatre grosses planètes // Astron. Astrophys. 1981. V. 103. P. 223–243.

Simon J.L., Bretagnon P. Théorie du mouvement de Jupiter et Saturne sur un intervalle de temps de 6000 ans. Solution JASON84 // Astron. Astrophys. 1984. V. 138. P. 169–178.

Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J. et al. Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets // Astron. Astrophys. 1994. V. 282. P. 663–683.

Standish E.M. JPL planetary ephemeris, DE414. Interoffice Memorandum. 343R-06-002. JPL. 2006. 8 p.

Tokovinin A.A. MSC — a catalogue of physical multiple stars // Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 1997. V. 124. P. 75–84.

Varadi F. NBI. A set of numerical integrators for the gravitational N-body problem // http://www.atmos.ucla.edu/~varadi. 1999.

Varadi F., Ghil M., Kaula W.M. Jupiter, Saturn, and edge of chaos // Icarus. 1999. V. 139. P. 286–294.

Подписано к печати 21.06.10. Формат 60 ×84 1/16 .
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать цифровая. Печ. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ 4849.
Отпечатано в Отдел оперативной полиграфии Химического факультета СПбГУ
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26
Тел.: (812) 428-40-43, 428-69-19

10 2