На правах рукописи

Шведов

Шведов Игорь Александрович

ПРОБЛЕМЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

01.01.01 — математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск - 2008

Работа выполнена в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Официальные оппоненты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Зарелуа Александр Владимирович
доктор физ.-мат. наук, профессор Родионов Евгений Дмитриевич
доктор физ.-мат. наук, профессор Тарханов Николай Николаевич

Ведущая организация:
Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится 5 декабря 2008 г. в 16-30 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН.

Автореферат разослан « 1 » сентября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А.Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Тематика диссертации. Теория дифференциальных форм является одной из важнейших частей математического языка и аппарата современного естествознания, по существу это — современное интегро-дифференциальное исчисление. Классический векторный анализ был полностью поглощен теорией дифференциальных форм. Использование дифференциальных форм привело к важным результатам в алгебраической топологии. Ярко проявляется значение внешних форм при исследовании оператора Лапласа и теории эллиптических дифференциальных комплексов.

Сформулируем главные понятия диссертации. На римановом многообразии M пространство $L_p^k(M)$ состоит из дифференциальных k-форм с интегрируемым в степени p модулем. Определим пространство $W_{p,q}^k = \{\omega \in L_p^k \mid d\omega \in L_q^{k+1}\}$. Символы $\mathcal{L}_p$ и $\mathcal{W}_{p,q}$ обозначают формы, локально лежащие в L_p (соответственно, в $W_{p,q}$). Положим также $W_p = W_{p,p}$. Последовательность $\cdots \xrightarrow{d} W_p^{k-1}(M) \xrightarrow{d} W_p^k(M) \xrightarrow{d} \cdots$ образует комплекс де Рама. Гомологии этого комплекса называются L_p-когомологиями многообразия M и обозначаются $H_p^k(M)$. В настоящей диссертации решен ряд задач, возникающих при исследовании L_p-комплексов де Рама дифференциальных форм.

Актуальность темы можно продемонстрировать, очень кратко указав связь с результатами других авторов.

В главе 1 получены результаты, которые могут быть интерпретированы как решение проблемы, поставленной Уитни: построение теории интегрирования L_p-форм по k-мерным поверхностям. В диссертации разработан аппарат обобщенной теории интегрирования в смысле Лебега k-форм по компактным k-мерным поверхностям, включающей с себя как теорию Уитни [10], так и теорию вложения Соболева (при $k = n$ мы получаем теорию интегрирования Лебега в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Часть результатов главы 2 являются обобщениями результатов Доджика [15] об изоморфизме де Рама.

Главы 3–4 посвящены L_p-когомологиям, изучаются возникающие при этом вопросы, связанные с нормальной и компактной разрешимостью оператора внешнего дифференцирования. Вопросами, относящимися к нормальной и компактной разрешимости краевой задачи для уравнения $du = f$, занимались, например, Сакс [8], Телеман [27], Берхин [1], Хилсум [21]. Общий подход к серии краевых задач для оператора d позволил получить и интерпретировать результаты Кодаиры [24], Даффа и Спенсера [16], Дезина [4]. Задачи, которыми для $p = 2$ занимались, в частности Чигер [13], Доджик [14], Мюллер [25], оказались частными случаями задач про L_p-формы на искривленных цилиндрах (такие цилиндры естественно возникают в качестве концов многообразий). Результаты исследования компактной разрешимости оператора d для k-форм обобщают критерий А. Байдера [12] дискретности спектра оператора Лапласа для функций на римановом многообразии.

Результаты главы 5 об аппроксимации дифференциальных форм естественным образом обобщают как результаты Соболева [9] о плотности гладких финитных функций в функциональном пространстве $l_p^s(\mathbb{R}^n)$, так и результаты Масленниковой и Боговского [5], [6] об аппроксимации соленоидальных векторных полей соленоидальными финитными векторными полями. В этом же ключе могут быть интерпретированы и результаты Хейвуда [20]. Некоторые результаты можно рассматривать, как обобщения результатов Гаффни [19] и Чигера [13]. Часть результатов близка к результатам О. В. Бесова [2] и Р. Ойнарова (см. [7]).

В главе 6 исследуется одно из важнейших свойств функториальности L_p-когомологий — формула Кюннета. Вариант этой формулы был установлен Цукером в [28] при дополнительных по сравнению с нашими предположениях.

Глава 7 посвящена исследованиям гомологического характера об абстрактных дифференциальных комплексах. Часть результатов является обобщением результатов Киченассами [22].

В главе 8 получены достаточные условия дискретности спектра оператора Лапласа на многообразии с цилиндрическими концами. Для нуль-форм, т.е. для функций соответствующие результаты имеются у Регины Кляйн [23]. Полученные аддиционные теоремы для многообразий с дискретным спектром оператора Лапласа можно рассматривать, как принцип расщепления, см. Эйхорн [18].

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми.

Основные результаты диссертации.

В главе 1 установлен естественный топологический изоморфизм между пространствами локально бемольных форм по Уитни [10] и дифференциальными формами класса $\mathcal{W}^*_{\infty,\infty}$. Установлена теорема, аналогичная теореме вложения функций Соболева для форм $\mathcal{W}^*_{p,q}$ и построено интегральное представление интеграла дифференциальной формы по k-поверхности X в римановом многообразии Y.

В главе 2 строится и изучается изоморфизм де Рама в случае комплекса L_p-форм. Указаны условия на триангуляцию K многообразия M, при выполнении которых топологические векторные пространства когомологий $H^k_p(M)$ и $H^k_p(K)$ изоморфны.

В главе 3 исследована зависимость (для некомпактных многообразий) L_p-когомологий от параметра p. Приведены примеры подкомплексов $W_2(X)$, позволяющие интерпретировать результаты о краевых задачах для оператора d. Изучены L_p-когомологии цилиндров $[a,b) \times X$, снабженных римановой метрикой искривленного произведения $(ds)^2 = (dt)^2 + f^2(t)(dg)^2$. Получены результаты о плотности финитных k-форм в соответствующих пространствах, обобщающие результаты Соболева о плотности гладких финитных функций в функциональном пространстве $l_p^s(\mathbb{R}^n)$. Результаты также являются обобщением результатов Масленниковой и Боговского [5], [6] об аппроксимации соленоидальных векторных полей соленоидальными финитными векторными полями. Разработаны аддиционные методы вычисления редуцированных когомологий.

В главе 4 найдены условия нормальной и компактной разрешимости оператора d_Γ на подпространстве $\Gamma \subset W_p(M)$, заданном некоторыми краевыми условиями. Построены примеры граничных условий Γ на компактном многообразии, для которых оператор d_Γ не является нормально разрешимым, а также примеры условий Γ, для которых оператор d_Γ нормально, но не компактно разрешим. Найдены как необходимые, так и достаточные условия нормальной разрешимости оператора d на искривленном цилиндре.

В главе 5 решен ряд аппроксимационных задач типа задач Соболева и Хейвуда для дифференциальных k-форм на многообразии с цилиндрическими концами.

В главе 6 доказана формула Кюннета, связывающая L_p-когомологии искривленного произведения с L_p-когомологиями сомножителей. Исследованы условия, при которой эта формула справедлива.

В главе 7 для (полу)точной последовательности комплексов банаховых пространств выяснено, как нормальная (компактная) разрешимость дифференциалов одного из комплексов влияет на свойства дифференциалов остальных двух комплексов. Предложен аналог вложения Киченассами для банаховых комплексов, в частности для дифференциальных эллиптических комплексов на замкнутом многообразии.

В главе 8 найдены условия, при которых дифференциалы эллиптического комплекса, действующие в весовых L_p-пространствах, компактно разрешимы. Установлена аддиционная теорема для многообразий с дискретным спектром оператора Лапласа, где вопрос о сохранении дискретности спектра оператора Лапласа при разрезании и склеивании многообразий сводится к вопросам о компактной разрешимости операторов d. Получен также критерий дискретности спектра оператора Шредингера.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты могут использоваться в исследованиях по функциональному анализу и римановой геометрии.

Апробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на Ленинградской международной топологической конференции (1982), на V Тираспольском симпозиуме по общей топологии и ее применениям (1986), на международной топологической конференции (Баку, 1987), на Советско-Японском симпозиуме по теории размерности (Хабаровск, 1989), на научных семинарах в университетах Бар-Илан (Тель-Авив) и Бен-Гуриона (Беер-Шева) в 1996 г, на международной школе-конференции по анализу и геометрии, посвященной 75-летию академика Ю.Г. Решетняка (Новосибирск, 2004), а также неоднократно докладывались на различных научных семинарах в Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН.

Публикации. Результаты опубликованы в работах 29–49. Результаты совместных публикаций, выносимые на защиту, получены в процессе неразделимой творческой деятельности соавторов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, восьми глав и списка литературы (88 наименований). Объём диссертации — 314 стр.

КРАТКИЙ ОБЗОР ГЛАВ ДИССЕРТАЦИИ

Глава 1. Исчисление дифференциальных форм соболевского типа.

§ 1.1 *Дифференциальные формы на липшицевом многообразии.*

На римановом многообразии M пространство $L_p^k(M)$ образовано дифференциальными k-формами с модулем, интегрируемым в степени p; $W^k_{p,q}(M) := \{\omega \in L^k_p \mid d\omega \in L^{k+1}_q\}$. Символы $\mathcal{L}_p$ и $\mathcal{W}_{p,q}$ обозначают пространства форм, локально лежащих в L_p (соответственно, в $W_{p,q}$). Коэффициенты внешнего дифференциала $d\omega$ формы ω являются некоторыми линейными комбинациями частных производных коэффициентов самой формы ω. Классы дифференциальных форм $\mathcal{W}^*_{p,q}$ оказываются инвариантными относительно билипшицевых замен координат и поэтому могут быть определены на любом липшицевом многообразии.

Условие суммируемости коэффициентов формы $d\omega$ проявляется в свойствах формы ω, связанных в основном с интегрированием. В связи с построением геометрической теории интегрирования Уолф и Уитни [10] рассматривали класс бемольных форм, инвариантный при липшицевых отображениях. Оказывается, что дифференциальные формы класса $\mathcal{W}^*_{\infty,\infty}$ — это в точности локально бемольные формы. В последнем пункте классы форм $\mathcal{W}^*_{p,q}$ использованы для переноса теории Чженя — Вейля, описывающей характеристические классы расслоения в дифференциально-геометрических терминах, на случай расслоений над липшицевым многообразием.

§ 1.2. *Об интегрировании дифференциальных форм класса* $\mathcal{W}^*_{p,q}$. Классы $\mathcal{W}^*_{p,q}$ дифференциальных форм на липшицевых многообразиях, введенные в § 1.1, представляют аналог функциональных классов Соболева $W^1_{q,\,\mathrm{loc}}$ для случая дифференциальных форм. В частности, формы класса $\mathcal{W}^0_{p,p}$ — это просто функции класса $W^1_{p,\,\mathrm{loc}}$. Функция f из $W^1_{p,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, вообще говоря, определена в $\mathbb{R}^n$ лишь почти всюду и может быть разрывной. Согласно теореме вложения Соболева при $p > n$ функцию f из $W^1_{p,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ можно так переопределить на множестве меры 0, чтобы она стала непрерывной. В § 1.2 предлагается аналогичная теорема для дифференциальных форм классов $\mathcal{W}^*_{p,q}$. В таком варианте теоремы вложения роль значений функции f в точках пространства $\mathbb{R}^n$ играют интегралы k-мерной формы ω

по ориентированным k-мерным поверхностям в $\mathbb{R}^n$. Непосредственно определение интеграла дифференциальной формы ω степени k, заданной на $\mathbb{R}^n$, по k-мерной поверхности в $\mathbb{R}^n$, параметризованной липшицевым отображением g в $\mathbb{R}^n$ области из $\mathbb{R}^k$, сводится к определению формы $g^*\omega = adx \wedge \ldots \wedge dx_k$ и интегрированию функции a по области U.

Такой интеграл определен не для каждой поверхности, поскольку не для всех липшицевых отображений g и форм $\omega \in \mathcal{W}^*_{p,q}$ форму $g^*(\omega)$ можно определить. В этом параграфе для достаточно больших p и q определен интеграл $\int_g \omega$ произвольной формы $\omega \in \mathcal{W}^k_{p,q}$ по произвольной k-мерной поверхности, параметризованной липшицевым отображением g. Этот новый интеграл совпадает с непосредственным интегралом для почти всех поверхностей. Интеграл $\int_g \omega$ непрерывно зависит от формы $\omega \in W^*_{p,q}$, а также (в определенном смысле) от области интегрирования.

Теория интегрирования дифференциальных форм классов $\mathcal{W}^*_{p,q}$ в случае $p = q = \infty$ развита в книге Уитни [10], где изучаются бемольные формы. Совпадение класса $\mathcal{W}^*_{\infty,\infty}$ с классом локально-бемольных форм установлено в § 1.1. Таким образом, интегрирование Уитни оказывается частным предельным случаем интегрирования форм классов $\mathcal{W}^*_{p,q}$. Существенное отличие случая $p < \infty$, $q < \infty$ от случая $p = q = \infty$ заключается в том, что для любого липшицева отображения $g\colon U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^k$ и формы $\omega \in \mathcal{W}^k_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ интегрирование по поверхности в $\mathbb{R}^n$, параметризованной отображением g, сводится к интегрированию в смысле Лебега некоторой ограниченной измеримой функции на U. В § 1.2 показано, что интегрирование форм класса $\mathcal{W}^*_{p,q}$ при $p, q < \infty$ не может быть сведено к интегрированию в смысле Лебега и приведены соответствующие примеры. Установлен ряд свойств интеграла $\int_g \omega$, в частности теорема Стокса и теорема о замене переменной интегрирования.

§ 1.3. *Интегральное представление интеграла дифференциальной формы.* Пусть X — гладкая k-мерная компактная поверхность, лежащая в $k+m$-мерном римановом многообразии Y. Оказывается, на Y существуют такие дифференциальные формы τ степени m и φ степени $m-1$, что для гладких ограниченных форм ω на Y

$$\int_X \omega = \int_Y \omega \wedge \tau + \int_Y d\omega \wedge \varphi.$$

Для форм степени 0 это представление совпадает с известным представлением Соболева функций

Глава 2. Изоморфизм де Рама L_p-когомологий некомпактных римановых многообразий.

Классическая теорема де Рама устанавливает изоморфизм между когомологиями многообразия и гомологиями комплекса дифференциальных форм на этом многообразии. В этой главе аналогичный изоморфизм строится в случае комплекса дифференциальных форм класса L_p на римановом многообразии.

Предположим, что задана гладкая триангуляция $\tau : |K| \to M$ многообразия M. В пространстве коцепей симплициального комплекса K введем норму $\|c\|_{C_p^*(K)} = \Big(\sum\limits_{T \in K} |c(T)|^p\Big)^{1/p}$. Пространство $C_p^k(K)$ состоит из k-мерных коцепей c, у которых $\|c\|_{C_p^*(K)} < \infty$.

Комплекс K называется звездно-ограниченным, если количество симплексов в звезде каждой вершины комплекса K равномерно ограничено. Если комплекс K звездно-ограничен, то кограничный оператор d переводит $C_p^k(K)$ в $C_p^{k+1}(K)$, причем $d : C_p^k(K) \to C_p^{k+1}(K)$ — ограниченный оператор. Обозначим $H_p^k(K)$ когомологии комплекса $\{C_p^*(K); d\}$.

В главе 2 указаны условия на триангуляцию τ, при выполнении которых топологические векторные пространства $H_p^k(M)$ и $H_p^k(K)$ изоморфны. Следствием этого изоморфизма является изоморфизм пространств $\overline{H}_p^k(M)$ и $\overline{H}_p^k(K)$. Последний изоморфизм был ранее установлен Доджиком [15] при $p = 2$ и дополнительных ограничениях на радиус инъективности и тензор кривизны многообразия M. Метод Доджика существенно использует эти ограничения и пригоден (что отмечено в [15]) только для отделимых когомологий $\overline{H}_p^*$. Наш метод основан на другой конструкции.

Глава 3. L_p-когомологии римановых многообразий.

§ 3.1 называется так же, как и глава. L_p-когомологии компактного многообразия X не зависят от p и совпадают с его обычными когомологиями $H^*(X, \mathbb{R})$. L_2-когомологии римановых многообразий и, в частности, искривленных цилиндров изучали, в частности, Доджик [14], Мюллер [25], Чигер [13]. Последний подробно рассмотрел L_2-когомологии многообразий с коническими особенностями. Для некомпактных многообразий L_p-когомологии могут зависеть от p. В § 3.1 исследована эта зависимость для конуса над римановым многообразием. Приведены примеры подкомплексов $W_2(X)$, позволяющие интерпретировать результаты о краевых задачах для оператора d, полученные ранее Кодаирой [24], Даффом и Спенсером [16], Дезиным [4].

В § 3.2 (*редуцированные L_p-когомологии искривленных цилиндров*) и § 3.3 (*L_p-когомологии искривленных цилиндров*) изучаются L_p-когомологии цилиндров $[a, b) \times X$, снабженных римановой метрикой искривленного произведения $(ds)^2 = (dt)^2 + f^2(t)(dg)^2$.

В § 3.2 описываются редуцированные L_p-когомологии искривленных цилиндров. Результаты обобщают на случай произвольного p результат Доджика про поверхности вращения из [14], результаты о цилиндрах являются новыми и для $p = 2$.

Приведем один из результатов параграфа 3.2. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ полярные координаты: $t = |y|$, $x = y/|y| \in S^n$. Обозначим $\mathbb{R}_f^{n+1}$ римановo многообразие, получающееся в результате задания в $\mathbb{R}^{n+1}$ римановой метрики, совпадающей вне некоторого шара с метрикой искривленного произведения $(ds)^2 = (dt)^2 + f^2(t)(dx)^2$. Такие метрики могут быть охарактеризованы как метрики, которые в окрестности бесконечности инвариантны относительно группы вращений $SO(n+1)$.

Теорема 3.2.5 *Пусть* $k_0 = [n/p] + 1$. *Тогда*

1) $\overline{H}_p^k(\mathbb{R}_f^{n+1}) = 0$ *при* $k \notin \{0, k_0, n+1\}$;

2) $\overline{H}_p^{k_0}(\mathbb{R}_f^{n+1}) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_a^{\infty} f^{(\{\frac{n}{p}\}-1)p}(t)dt < \infty, \quad \int\limits_a^{\infty} f^{-\{\frac{n}{p}\}p'}(t)dt < \infty \quad \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1\right),$$

в этом случае $\overline{H}_p^0(\mathbb{R}_f^{n+1}) = \overline{H}_p^{n+1}(\mathbb{R}_f^{n+1}) = 0$ *и* $\dim \overline{H}_p^{k_0}(\mathbb{R}_f^{n+1}) = \infty$;

3) *если* $\operatorname{vol} \mathbb{R}_f^{n+1} < \infty$, *то* $\overline{H}_p^0(\mathbb{R}_f^{n+1}) \cong \overline{H}_p^{n+1}(\mathbb{R}_f^{n+1}) \cong \mathbb{R}$;

если $\operatorname{vol} \mathbb{R}_f^{n+1} = \infty$, *то* $\overline{H}_p^0(\mathbb{R}_f^{n+1}) = \overline{H}_p^{n+1}(\mathbb{R}_f^{n+1}) = 0$.

§ 3.4. *Аддиционные формулы для редуцированных L_p-когомологий.* Гармонические k-формы на компактном многообразии M изоморфны k-мерным когомологиям M. Для некомпактного M Атья в [11] предложил описывать гармонические L_2-формы при помощи редуцированных L_2-когомологий. Чигер в [13] установил, что L_2-когомологии и редуцированные L_2-когомологии компактного псевдомногообразия совпадают. В общем случае применение аддиционных методов вычисления редуцированных когомологий затруднено неточностью соответствующих когомологических последовательностей. В § 3.4 предлагается способ преодоления этих трудностей. Полученные результаты применяются для вычисления редуцированных L_p-когомологий многообразий специального вида, которые могут быть охарактеризованы как многообразия, квазиизометричные вне некоторого компакта искривленному цилиндру. L_p-когомологии таких многообразий выражаются с помощью гомологических последовательностей в зависимости от ограниченности или неограниченности следующих интегралов, которые играют важную роль и в следующих главах. Для цилиндра $[a,b)\times_f X$ они таковы (σ_i — веса на $[a,b)\subset\mathbb{R}$): $I_k=\int\limits_a^b(f^{n/p-k}\sigma_k)^p\,dt$ при $0\le k\le n$, $I_k=\infty$ при $k\ge n+1$, $I_k=0$ при $k<0$; $J_k=\int\limits_a^b(f^{n/p-k-1}\sigma_k)^{-p'}\,dt$ при $1\le k\le n+1$, $J_k=\infty$ при $k\le 0$, $J_k=0$ при $k>n+1$. Результаты носят исчерпывающий характер в том смысле, что в ней учтены все комбинации значений констант I_k, J_k, I_{k-1}. Некоторые частные случаи были установлены в [14], [13], [25], [26], [35].

Глава 4. Нормальная и компактная разрешимость оператора внешнего дифференцирования.

Замкнутый оператор $T:X\to Y$, действующий на банаховых пространствах, нормально (компактно) разрешим, если непрерывен (компактен) "обратный" оператор из $\operatorname{Im}T$ в $\operatorname{dom}T/\ker T$. Замкнутость образа T эквивалентна нормальной разрешимости T, поэтому пространство $H_p^k(M)$ совпадает с пространством $\overline{H}_p^k(M)$ в том и только в том случае, когда оператор внешнего дифференцирования $d_{p,M}^{k-1}:L_p^{k-1}(M)\to L_p^k(M)$ нормально разрешим.

§4.1. *О нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования при однородных краевых условиях.*

Здесь найдены условия нормальной и компактной разрешимости оператора d_Γ на подпространстве Γ, заданном некоторыми краевыми условиями, $V_p(M)\subset\Gamma\subset W_p(M)$ (символ $V_p(M)$ обозначает замыкание в $W_p(M)$ множества форм с компактными носителями, зануляющимися на крае M). Задача на компактном M сводится к окрестности края, т.е. к цилиндру $I\times\partial M$. Построены примеры граничных условий Γ на компактном многообразии, для которых оператор d_Γ не является нормально разрешимым, а также примеры условий Γ, для которых оператор d_Γ нормально, но не компактно разрешим.

Вопросы нормальной и компактной разрешимости краевой задачи для уравнения $du = f$, близкие к теме § 4.1, рассматривались в работах [17], [4], [8], [27], [1], [21], из них можно извлечь доказательство компактной разрешимости $d_{V^k(M)}$ и $d_{W^k(M)}$.

В § 4.2 (*нормальная разрешимость оператора внешнего дифференцирования на искривленном цилиндре*) и § 4.3 (*о нормальной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на искривленных произведениях*) найдены как необходимые, так и достаточные условия нормальной разрешимости оператора $d^k_{p,M}$ на искривленном цилиндре. Сходные вопросы возникали, например, у Чигера [13], он доказал нормальную разрешимость операторов $d^k_{2,M}$ на многообразиях M, которые можно получить из замкнутых псевдомногообразий удалением особенностей. В частности, в параграфе 4.3 предлагается метод получения ненулевых элементов L_p-когомологий, позволивший к тому же получить ряд необходимых условий нормальной разрешимости оператора d на искривленном произведении. Для риманова многообразия X и двух весовых функций τ и ξ на X мы определяем коцепной комплекс $\big(R^i_p(X,\tau,\xi),\partial\big)$:

$$R^i_p(X,\tau,\xi) = L^{i-1}_p(X,\tau)\times L^i_p(X,\xi),\quad \partial(\omega_1,\omega_2) = (\omega_2 - d\omega_1, d\omega_2),$$

$$\operatorname{Dom}\partial^i = \big\{(\omega_1,\omega_2)\in R^i_p(X,\tau,\xi) : \omega_2 - d\omega_1 \in L^i_p(X,\tau),\ d\omega_2\in L^{i+1}_p(X,\xi)\big\}.$$

Найдены некоторые условия нормальной разрешимости оператора $\partial : R^i_p(X,\tau,\xi)\to R^{i+1}_p(X,\tau,\xi)$, построена точная последовательность, связывающая когомологии комплекса $R_p(X,\tau,\xi)$ с когомологиями комплексов де Рама $L_p(X,\tau)$ и $L_p(X,\xi)$, вычислены когомологии и редуцированные когомологии комплекса $R_p(X,\tau,\xi)$ для $X = [a,b)$. Установлена связь вопроса о нормальной разрешимости оператора d на искривленном цилиндре $[a,b)\times_f Y$ с теоремами вложения весовых пространств Соболева на полуинтервале $[a,b)$.

§ 4.4. *О компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования.* Здесь найдены разнообразные условия компактной разрешимости оператора d, действующего в пространствах $L_p^k(M, \sigma)$. Полученные условия для искривленных цилиндров и поверхностей вращения эффективны, т.е. их проверка сводится к вычислению и оценкам конкретных интегралов. Наши исследования компактной разрешимости оператора d имеют прямое отношение к результатам А. Байдера [12] о дискретности спектра оператора Лапласа на римановом многообразии. Рассмотрим оператор $d_{\mathcal{D}} : L_2^0(X, \sigma) \to L_2^1(X, \sigma)$, область задания $\operatorname{Dom} d_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(X)$ которого состоит из гладких финитных функций. Пусть $d_{\mathcal{D}}^* : L_2^1(X, \sigma) \to L_2^0(X, \sigma)$ — оператор, сопряженный оператору $d_{\mathcal{D}}$, $c(x)$ — гладкая функция на M, A — самосопряженное расширение по Фридрихсу оператора $d_{\mathcal{D}}^* \circ d_{\mathcal{D}} + c$ и d_V — замыкание оператора $d_{\mathcal{D}}$. Спектр самосопряженного оператора дискретен тогда и только тогда, когда его ядро конечномерно и он компактно разрешим. Используя это, нетрудно доказать, что при $c(x) \equiv 0$ спектр оператора A дискретен тогда и только тогда, когда оператор d_V компактно разрешим. Условия компактной разрешимости оператора $d_V : L_p^k(X, \sigma) \to L_p^{k+1}(X, \tau)$ из теоремы 2 § 4.4 в частном случае $k = 0$ и $p = 2$ совпадают с критерием Байдера [12, теорема 2.2] дискретности спектра оператора A. Решение задачи о компактной разрешимости оператора d, действующего в пространствах дифференциальных форм, позволяет указать условия дискретности спектра оператора Лапласа $d^* \circ d + d \circ d^*$, действующего в пространствах $L_2^*(X, \sigma)$ дифференциальных форм.

Глава 5. Финитная аппроксимация дифференциальных форм.

§ 5.1. *Финитная аппроксимация замкнутых дифференциальных форм на римановых многообразиях специального вида.* Возможность аппроксимации в $\mathbb{R}^n$ потенциальных векторных полей градиентами финитных функций вытекает из результатов Соболева [9]. Аппроксимируемость в $\mathbb{R}^n$ соленоидальных векторных полей финитными установлена Хейвудом в [20]. Но потенциальные векторные поля можно трактовать как точные дифференциальные формы степени 1, а соленоидальные — как замкнутые формы степени $n-1$. В § 5.1 мы исследуем задачи финитной аппроксимации в L_p-норме замкнутых дифференциальных форм на римановых многообразиях и предлагаем решение ряда аппроксимационных задач типа задач Соболева и Хейвуда для дифференциальных k-форм на многообразии с цилиндрическими концами.

§ 5.2. *Финитная аппроксимация дифференциальных форм в весовых пространствах соболевского типа.* Здесь мы изучаем, каким условиям должна удовлетворять форма ω, чтобы она принадлежала W_p-замыканию множества гладких финитных форм, т.е. подпространству $V_p \subset W_p$. Эти вопросы связаны с выполнением на многообразии M формулы типа Стокса. А именно: форма $\omega \in W_p^k(M,\sigma)$ принадлежит подпространству $V_p^k(M,\sigma)$ тогда и только тогда, когда для каждой формы $u \in W_{p'}^{m-k-1}(M,\sigma')$, равной 0 на ∂M, выполнено равенство $\int\limits_M d(\omega \wedge u) = 0$. Полученные в параграфе результаты можно рассматривать, как обобщения результатов Гаффни [19] и Чигера [13]. При $l = 1$ задача о плотности финитных функций в весовых пространствах Соболева $W_p^{(l)}(M,\sigma)$ для областей M евклидова пространства — это задача о совпадении пространств $W_p^0(M,\sigma)$ и $V_p^0(M,\sigma)$. Мы получаем условия принадлежности формы подпространству $V_p^k(M,\sigma)$ для искривленного цилиндра $M = [a,b) \times_f X$ над компактным X. Наши результаты о финитной аппроксимации в $W_p^k(M,\sigma)$ для случая $k = 0$ близки к результатам О. В. Бесова [2] и Р. Ойнарова (см. [7]). В § 5.2 усилены результаты В. Н. Масленниковой и М. Е. Боговского [6] об аппроксимации соленоидальных и потенциальных векторных полей.

Глава 6. Формула Кюннета.

§ 6.1 — *формула Кюннета для редуцированных L_2-когомологий.*

Для L_2-когомологий произведения выполнена формула Кюннета: если Y компактно, то $H_2^k(X\times Y)\cong \bigoplus\limits_{i+j=k} H_2^i(X)\otimes H_2^j(Y)$. Для искривленных произведений $X\times_f Y$ справедливо следующее: если искривляющая функция f ограничена и для каждого $1\le j\le n=\dim Y$ оператор $d_Y: L_2^{j-1}(Y)\to L_2^j(Y)$ нормально разрешим, то

$$H_2^k(X\times_f Y)\cong \bigoplus_{i+j=k} H_2^i(X, f^{n/2-j}; H^j(Y)).$$

Эта формула, выражающая L_2-когомологии искривленного произведения $X\times_f Y$ через весовые когомологии многообразия X с весами $f^{n/2-j}$ и коэффициентами в гильбертовых пространствах $H^j(Y)$, была установлена С. Цукером в [28] при некотором дополнительном предположении об области задания оператора $d_{X\times_f Y}$. Без этого дополнительного ограничения формула доказана в [37], причем в случае L_p-когомологий при $1<p<\infty$. Топологический изоморфизм индуцирует изоморфизм редуцированных L_2-когомологий

$$\overline{H}_2^k(X\times_f Y)\cong \bigoplus_{i+j=k} \overline{H}_2^i(X, f^{n/2-j}; \overline{H}_2^j(Y)).$$

Цель данного параграфа — доказать последнюю формулу в случае ограниченной искривляющей функции f, не требуя нормальной разрешимости d_Y. Доказательство использует спектральную теорему для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве и поэтому не переносится на случай L_p-когомологий при $p\neq 2$.

§ 6.2. *L_p-когомологии искривленных произведений липшицевых римановых многообразий.* Пусть X и Y — римановы многообразия размерностей m и n соответственно, f — гладкая положительная функция на X. Пусть $\rho(x)$ и $\sigma(y)$ — весовые функции на X и Y. В работе [37] доказано, что если $p\in(1,\infty)$, функция f ограничена и

L_p-комплекс де Рама $L_p(Y,\sigma;\mathbb{R})$ расщепляем (т. е. подпространства $\operatorname{Im} d^j$ и $\ker d^{j+1}$ дополняемы в пространстве $L_p(Y,\sigma,\mathbb{R})$ при $j \in \mathbb{N}$), то имеет место векторный топологический изоморфизм

$$H_p^k(X\times_f Y, \rho\sigma;\mathbb{R}) \cong \bigoplus_{i+j=k} H_p^i(X,\rho f^{n/p-j}; H_p^j(Y,\sigma;\mathbb{R})).$$

Там же было установлено, что L_p-комплекс де Рама гладкого компактного многообразия расщепляем, если $1<p<\infty$. Нам неизвестно, расщепляем ли этот комплекс при $p\in[1,\infty]$. Кроме того, даже если L_p-комплекс де Рама многообразия Y расщепляем, метод доказательства формулы Кюннета, предложенный в [37], не переносится на случай $p\in[1,\infty]$, так как пространства дифференциальных форм при $p\in\{1,\infty\}$ нерефлексивны. Метод, развитый в настоящем параграфе, позволяет установить формулу Кюннета для любого $p\in[1,\infty)$ в том случае, когда либо многообразие Y компактно, либо его L_p-комплекс де Рама расщепляем. Более того, стало возможным отказаться от условия гладкости многообразий, заменив его предположением о том, что X и Y — липшицевы римановы многообразия.

Глава 7. Банаховы комплексы и дифференциальные формы. Банахов комплекс — это коцепной комплекс банаховых пространств и замкнутых линейных операторов.

В § 7.1 (*гомологические аспекты теории банаховых комплексов*) изучаются последовательности комплексов. Одна из задач — выяснить, как нормальная (компактная) разрешимость одного из комплексов влияет на свойства остальных дифференциалов.

Для банахова комплекса $A=(A^i,T^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ и целого числа k определены топологическое векторное пространство гомологий H^kA и банахово пространство редуцированных гомологий $\overline{H}^kA$. Пространства H^kA и $\overline{H}^kA$ совпадают тогда и только тогда, когда оператор T^{k-1} нормально разрешим.

Короткой точной последовательности банаховых комплексов

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0 \tag{1}$$

соответствуют точная последовательность гомологий

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}C \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^iA \xrightarrow{H^i\varphi} H^iB \xrightarrow{H^i\psi} H^iC \xrightarrow{\delta^i} \cdots \tag{2}$$

и полуточная последовательность редуцированных гомологий

$$\cdots \longrightarrow \overline{H}^{i-1}C \xrightarrow{\bar{\delta}^{i-1}} \overline{H}^iA \xrightarrow{\overline{H^i\varphi}} \overline{H}^iB \xrightarrow{\overline{H^i\psi}} \overline{H}^iC \xrightarrow{\bar{\delta}^i} \cdots \tag{3}$$

Мы выясняем, как сказывается на поведении последовательностей (2) и (3) предположение о том, что один из дифференциалов комплексов A, B и C нормально разрешим.

Другая задача, с которой мы имеем дело, состоит в том, чтобы выяснить, как влияет предположение о нормальной (компактной) разрешимости одного из дифференциалов комплексов A, B и C, образующих короткую точную последовательность (1), на свойства других дифференциалов этих комплексов.

Методы банаховых комплексов оказываются полезными в § 7.2 (*теорема компактности для дифференциальных форм*) при исследовании свойств вложений комплексов дифференциальных форм. Пусть M — замкнутое ориентируемое гладкое n-мерное многообразие. Киченассами [22] доказал, что если $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{n}$, то пространство $W_p^k(M)$ компактно вложено в потоки с нормой $\inf\limits_{\varphi \in L_q} \{\|\omega - d\varphi\|_{L_q} + \|\varphi\|_{L_q}\}$. В § 7.2 установлено, что конструкция Киченассами связана со свойством рефлективности подкатегории банаховых комплексов с непрерывными дифференциалами в категории всех банаховых комплексов. Предложен аналог вложения Киченассами для банаховых комплексов, в частности для дифференциальных эллиптических комплексов на замкнутом многообразии.

Глава 8. Эллиптические дифференциальные комплексы и многообразия с цилиндрическими концами.

§ 8.1. *Компактная разрешимость дифференциалов эллиптического дифференциального комплекса.* Интерес к компактно разрешимым операторам вызван, в частности, тем, что дифференциалы эллиптического дифференциального комплекса на компактном многообразии без края являются компактно разрешимыми операторами. Кроме того, свойство компактной разрешимости оператора имеет прямое отношение к дискретности спектра этого оператора, а именно самосопряженный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве, имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда он компактно разрешим и $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$.

Если дифференциальный эллиптический комплекс задан на некомпактном многообразии, то его дифференциалы не обязательно компактно разрешимы. Простейший пример — оператор дифференцирования, действующий в $L_2(\mathbb{R})$. Компактная разрешимость дифференциалов эллиптического комплекса на компактном многообразии с краем зависит от выбора граничных условий.

В § 8.1 найдены условия, при которых компактно разрешимы дифференциалы эллиптического комплекса, действующие в весовых L_p-пространствах. Детально разобран случай дифференциала d^0 комплекса де Рама на многообразии с цилиндрическими концами. Наши результаты позволяют исследовать некоторые вопросы дискретности спектра оператора Шредингера. Для нуль-форм, т.е. для функций соответствующие результаты имеются у Регины Кляйн [23].

§ 8.2. *Аддиционная теорема для многообразий с дискретным спектром оператора Лапласа.* Пусть риманово многообразие X разбито поверхностью Y на две области X_+ и X_-. Представляет интерес задача о том, как соотносятся между собой спектральные свойства операторов Лапласа, действующих в пространствах дифференциальных форм на многообразиях X, X_+ и X_-. В случае 0-форм эта задача тесно связана с так называемым принципом расщепления в качественной спектральной теории дифференциальных операторов [3].

В качестве лапласианов в указанной задаче естественно рассматривать самосопряженные расширения минимального оператора $\Delta^k_{\min}$, порожденного дифференциальной операцией Δ^k. Если многообразие X полно (без края), то расширение единственно. В общем случае это не так. Поэтому нужно указывать, какие именно лапласианы, действующие на многообразиях X, X_+ и X_-, имеются в виду. Мы рассматриваем операторы $\Delta^k = \mathrm{D}^* \circ \mathrm{D}$, D — замкнутый оператор, порожденный дифференциальной операцией $d \times \delta$, d — операция внешнего дифференцирования, δ — операция кодифференцирования.

Ключевой момент в исследовании — следующий факт: спектр оператора $\mathrm{D}^* \circ \mathrm{D}$ дискретен тогда и только тогда, когда оператор D компактно разрешим и $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{D} < \infty$. Это позволяет свести вопрос о сохранении дискретности спектра оператора Лапласа при разрезании и склеивании многообразий к аналогичным вопросам о компактной разрешимости операторов внешнего дифференцирования и на этой основе найти условия, при выполнении которых дискретность спектра оператора Лапласа на многообразии X равносильна дискретности спектров соответствующих операторов Лапласа на обоих многообразиях X_+ и X_-. Полученные аддиционные теоремы для многообразий с дискретным спектром оператора Лапласа можно рассматривать, как принцип расщепления, см. Эйхорн [18].

Все результаты параграфа о спектре операторов относятся к самосопряженным операторам, действующим в гильбертовом пространстве. В то же время вспомогательные результаты о компактной разрешимости относятся к операторам, действующим в банаховых пространствах. Нам представляется, что в этой большей общности вспомогательные результаты приобретают самостоятельное значение.

Список литературы

[1] *Берхин П. Н.* Самосопряженная краевая задача для системы $*du + \lambda u = f$ // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222, № 1. С. 15–17.

[2] *Бесов О. В.* О плотности финитных функций в весовом пространстве С. Л. Соболева // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161. С. 29–47.

[3] *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.

[4] *Дезин А. А.* Инвариантные дифференциальные операторы и граничные задачи // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1962. Т. 68. С. 3–88.

[5] *Масленникова В. Я., Боговский М. Е.* Аппроксимация потенциальных и соленоидальных векторных полей // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 5. С. 140–171.

[6] *Масленникова В. Я., Боговский М. Е.* Аппроксимация соленоидальных и потенциальных векторных полей в пространствах Соболева и задачи математической физики // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1986. С. 129–137.

[7] *Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988.

[8] *Сакс Р. С.* Нормальные разрешимые и нётеровы краевые задачи для системы уравнений Максвелла в случае установившихся процессов // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 272, № 2. — С. 308–312.

[9] *Соболев С. Л.* Плотность финитных функций в пространстве $L_p^{(m)}(E_n)$ // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 3. С. 673–682.

[10] *Уитни Х.* Геометрическая теория интегрирования. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 534 с.

[11] *Atiyah M. F.* Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. Analise et topologie // Astérisque. 1976 .V. 32/33. P. 43–72.

[12] *Baider A.* Noncompact Riemannian manifolds with discrete spectra // J. Differential Geom. 1979. V. 14, № 1. P. 41–58.

[13] *Cheeger J.* On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds // Proc. Symp. Pure Math. 1980. V. 36. P. 91–146.

[14] *Dodziuk J.* L_2-harmonic forms on rotationally symmetric Riemannian manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 77, № 3. P. 395–401.

[15] *Dodziuk J.* Sobolev spaces of differential forms and de Rham — Hodge isomorphism // J. Different. Geom. 1981. V. 16. P. 63–73.

[16] *Duff G. F., Spencer D. C.* Harmonic tensors on Riemannian manifolds with boundary // Ann. Math. 1952. V. 56. P. 118–157.

[17] *Duff G. F., Spencer D. C.* Harmonic tensors on Riemannian manifolds (generalized potential theory) // Ann. Math. 1949. V. 50. P. 587–665.

[18] *Eichhorn J.* Spektraltheorie offener Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit einer rotationssymmetrischen Metrik // Math. Nachr. 1983. Bd 144. S. 23–51.

[19] *Gaffney M. P.* A special Stokes's theorem for complete Riemannian manifolds // Ann. of Math. 1954. V. 60, № 1. P. 140–145.

[20] *Heywood J. G.* On uniqueness questions in the theory of viscous flow // Acta Math. 1976. № 1–2. P. 61–102.

[21] *Hilsum M.* Signature operator on Lipschitz manifolds and unbounded Kasparov bimoduls. Berlin etc.: Springer, 1985. P. 254–288. (Lecture Notes in Math.; 1132).

[22] *Kichenassamy S.* Compactness theorems for differential forms // Comm. Pure Appl. Math. 1989. V. 42, № 1. P. 47–53.

[23] *Kleine R.* Discreteness conditions for the Laplacian on complete, non-compact Riemannian manifolds // Math. Z. 1988. Bd 198, N 1. S. 127–141.

[24] *Kodaira K.* Harmonic fields in Rimanian manifolds (generalized potential theory) // Ann. Math. 1949. V. 50. P. 587–665.

[25] *Muller W.* Spectral geometry and non-compact Riemannian manifolds // Proc. Intern. Congr. of Mathematics, August, 16-24, 1983. Warszawa, 1984. V. 1. P. 565–587.

[26] *Rosenberg S.* Harmonic forms and L_2-cohomology on manifolds with cylinders // Indiana Univ. Math. J. 1985. V. 34, № 2. P. 355–373.

[27] *Teleman N.* The index of signature operators on Lipschitz manifolds // Publ. IHES. 1983. V. 58. P. 39–78.

[28] *Zucker S.* L_2-cohomology of warped product and arithmetic groups // Invent. Math. 1982. V. 70, № 2. P. 169–218.

Работы автора по теме диссертации

[29] *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Дифференциальные формы на липшицевом многообразии // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 16–30.

[30] *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Об интегрировании дифференциальных форм классов $W^*_{p,q}$ // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 5. С. 63–79.

[31] *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Интегральное представление интеграла дифференциальной формы // Функциональный анализ и математическая физика // Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. С. 53–87.

[32] *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* L_p-когомологии римановых многообразий // Исследования по геометрии и математическому анализу: Тр. Ин-та математики /АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск: Наука, 1987. Т. 7. С. 101–116.

[33] *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования при однородных краевых условиях // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 82–96.

[34] *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Изоморфизм де Рама L_p-когомологий некомпактных римановых многообразий. // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 2. С. 34–44.

[35] *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Редуцированные L_p-когомологии искривленных цилиндров // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 5. С. 10–23.

[36] *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* L_p-когомологии искривленных цилиндров // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 6. С. 55–63.

[37] *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О формуле Кюннета для L_p-когомологий искривленных произведений // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 5. С. 29–42.

[38] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на искривленном цилиндре // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 85–95.

[39] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О финитной аппроксимации замкнутых дифференциальных форм на римановых многообразиях специального вида // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 102–117.

[40] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О финитной аппроксимации дифференциальных форм в весовых пространствах соболевского типа // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 91–112.

[41] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Аддиционные формулы для редуцированных L_p-когомологий // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, №2, С. 380--388.

[42] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О формуле Кюннета для редуцированных L_2-когомологий // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, №1, С. 102--110.

[43] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на искривленных произведениях // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 324–337.

[44] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 573–590.

[45] *Сторожук К. В., Шведов И. А.* L_p-когомологии искривленных произведений липшицевых римановых многообразий // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 633--649.

[46] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Гомологические аспекты теории банаховых комплексов // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 893–904.

[47] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* К теореме компактности для дифференциальных форм // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 1. С. 132–142.

[48] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О компактной разрешимости дифференциалов эллиптического дифференциального комплекса // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1280–1294.

[49] *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Аддиционная теорема для многообразий с дискретным спектром оператора Лапласа // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 557–574.

Шведов Игорь Александрович

Проблемы исчисления дифференциальных форм
на римановых многообразиях

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать 26.08.08. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1.5. Уч.-изд. л. 1.5. Тираж 100 экз. Заказ №147.

Отпечатано в ООО "Омега Принт"
630090. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6

10 –