На правах рукописи
УДК 517.5

Зёрнышкина Елена Александровна

Неравенства между нормами производных функций с ограничениями на старшую производную

01.01.01 – математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Зёр

Екатеринбург
2008

Работа выполнена в отделе аппроксимации и приложений Института математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В. В. Арестов

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Л. Д. Менихес

кандидат физико-математических наук Е. Е. Бердышева

Ведущая организация:
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Защита диссертации состоится **13 ноября 2008 г.** в 10^{00} на заседании диссертационного совета Д 004.006.02 при Институте математики и механики УрО РАН по адресу: г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН.

Автореферат разослан 10 октября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 004.006.02, кандидат физико-математических наук Н. Ю. Антонов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена неравенствам Колмогорова, Шмидта и Виртингера–Стеклова с односторонней нормой старшей производной. Точнее, в диссертации изучается точное неравенство колмогоровского типа — оценка сверху нормы первой производной через норму функции и норму положительной срезки ее второй производной в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, а также точные неравенства между L^p-средним $(0 \le p \le \infty)$ 2π-периодической функции и L^q-нормой $(1 \le q \le \infty)$ положительной срезки ее (первой) производной на трех классах функций: на классе функций y со свойством $\max y + \min y = 0$; на классе функций, имеющих нуль; и на классе функций с нулевым средним значением на периоде.

Неравенства колмогоровского типа (оценка сверху L^q-нормы промежуточной производной k-го порядка через L^r-норму функции и L^p-норму старшей производной n-го порядка) впервые появились в 1912 г. в работе Г. Харди и Д. Е. Литтльвуда [11]. Наиболее фундаментальный результат принадлежит А. Н. Колмогорову [7] — в 1939 г. он нашел точную константу при $p = q = r = \infty$ для всех n и k $(1 \le k < n)$. Поэтому неравенства для норм промежуточных производных часто называют неравенствами Колмогорова.

В настоящее время исследованию неравенства Колмогорова посвящено большое число работ. Они играют важную роль во многих областях математики и ее приложений — математическом анализе, теории аппроксимации (в частности, в задаче Стечкина о приближении неограниченных операторов ограниченными), теории вложения функциональных пространств, в задачах оптимального восстановления и др. Неравенства колмогоровского типа на оси и/или полуоси исследовали В. В. Арестов, В. И. Бердышев, В. Ф. Бабенко, А. П. Буслаев, В. Н. Габушин, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, Н. П. Купцов, Е. Ландау, Ю. И. Любич, Г. Г. Магарил-Ильяев, А. П. Маторин, С. А. Пичугов, Е. Стейн, С. Б. Стечкин, Л. В. Тайков и др.; более полную информацию о случаях, когда известна точная константа в неравенствах колмогоровского типа на оси и полуоси можно найти в обзорных работах [1], [3].

Неравенство Колмогорова обобщалось в различных направлениях. В частности, изучаются его "несимметричные" аналоги, когда вместо старшей производной рассматривается ее срезка. Такие "несимметричные" обобщения оказались полезными, в частности, для исследования задач наилучшего одностороннего приближения, а также задач приближения в пространствах с несимметричными нормами (см., например, [4], [8]).

Неравенства с положительной срезкой старшей производной менее изучены. В работе Л. Хёрмандера [12] исследован случай $p = q = r = \infty$. В. Н. Габушин [6] получил точную константу для $n = 1$, $k = 0$, $p \geq 1$, $q > r > 0$.

Неравенствам между L^p-средним ($0 \leq p \leq \infty$) периодической функции и L^q-нормой ($1 \leq q \leq \infty$) ее производной на различных классах функций посвящены работы многих авторов — В. Виртингера, В. А. Стеклова, Э. Шмидта, Г. Бора, Г. Харди, Д. Е. Литтльвуда, Д. Фавара, Н. И. Ахиезера, В. И. Левина, С. Б. Стечкина, Н. П. Корнейчука и др. (см. [9], [14]).

Точная константа на классе функций, имеющих нули, а также на классе функций y, удовлетворяющих условию $\max y + \min y = 0$, была найдена Э. Шмидтом [16].

Неравенство на классе функций с нулевым средним значением при $p = q = 2$ обычно называют неравенством Виртингера (см., например, [9]). Но еще в работах 1896, 1897 гг. В. А. Стекловым установлена справедливость этого неравенства для непрерывно-дифференцируемых функций, зануляющихся на концах отрезка или обладающих нулевым средним значением, как одномерный случай неравенства Пуанкаре (см. [5]).

Точные константы в неравенствах между L^p-средним периодической функции и L^q-нормой положительной срезки ее производной изучены в меньшей степени. Известно (см. [8]), что при $q = \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ на классе периодических функций с нулевым средним значением точная константа равна удвоенной точной константе в соответствующем (т. е. при тех же значениях параметров p и q) неравенстве без ограничений. Аналогичное утверждение нетрудно получить и в случае $q = 1$, $1 \leq p \leq \infty$.

В силу сказанного, тема исследования данной диссертации является актуальной.

Цель работы. Основной целью работы является:

1) получение точной константы в неравенстве колмогоровского типа — оценке сверху нормы первой производной через норму самой функции и норму положительной срезки ее второй производной в пространстве $L^2(\mathbb{R})$;

2) изучение точных констант в неравенствах между L^p-средним ($0 \le p \le \infty$) периодической функции и L^q-нормой ($1 \le q \le \infty$) положительной срезки ее производной на следующих классах: $Q^1_+(q)$ — класс функций y, обладающих свойством $\max y + \min y = 0$, $Q^2_+(q)$ — класс функций, имеющих нуль, и $Q^3_+(q)$ — класс функций с нулевым средним значением.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа и теории приближения функций. Наряду с известными методами, используются оригинальные методы автора, которые позволяют сузить ("очистить") класс функций и на полученном классе точно решить задачу.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Основные из них заключаются в следующем.

I. Найдена точная константа в неравенстве колмогоровского типа — оценка нормы первой производной через норму самой функции и норму положительной срезки ее второй производной в пространстве L^2 на числовой оси.

II. Найдены точные константы в аналогах неравенства Шмидта между L^p-средним ($p \ge 0$) периодической функции и L^q-нормой ($q \ge 1$) положительной срезки ее производной.

III. Изучена точная константа в аналоге неравенства Виртингера–Стеклова между L^p-средним ($0 \le p \le \infty$) периодической функции с нулевым средним значением и L^q-нормой ($1 \le q \le \infty$) положительной срезки ее производной. Для этой константы получены двусторонние оценки через точные константы в неравенствах Шмидта и Виртингера – Стеклова между нормой функции и нормой первой производной; в случаях $p = 2$ и $p = \infty$ для всех $1 \le q \le \infty$ выписано ее точное значение.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и предложенные в работе методы могут быть использованы при решении экстремальных задач теории приближения и теории функций.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международных и всероссийских математических конференциях, в частности, на всероссийской научной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Екатеринбург, 2001, 2008 гг.); на Международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященной столетию академика С. М. Никольского (Москва, 23–29 мая 2005 г.); на IV Международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения" (Новороссийск, 2006 г.); на Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики" (Тула, 2005, 2006 гг.); на зимней научной школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2006 г.); на Международной летней научной Школе С. Б. Стечкина по теории функций (Миасс, 2001–2008 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [17]–[24] автора; выступления автора на конференциях отражены в тезисах докладов [19]–[24].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и двух глав. Объем диссертации — 80 страниц. Список литературы содержит 26 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Обозначения. Предшествующие результаты. Пусть $L^p(I), 0 < p < \infty$ — пространство измеримых функций y с суммируемой на (конечном или бесконечном) интервале I степенью $|y|^p$, $L^\infty(I)$ — пространство измеримых существенно ограниченных на I функций, а $L^0 = L^0(I)$ — пространство измеримых функций с суммируемой функцией $\ln_+ |y| = \ln(\max(1, |y|))$. На этих пространствах рассматриваются функционалы

$$\|y\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |y(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|y\|_{L^p(a,b)} = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |y(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|y\|_{L^\infty(I)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in I} |y(x)|,$$

$$\|y\|_{L^0(a,b)} = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln|y(x)|dx\right).$$

1. Пусть $W^n(r,p)$ — класс функций $y \in L^r(\mathbb{R})$, у которых производная $y^{(n-1)}$ локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $y^{(n)} \in L^p(\mathbb{R})$. Обозначим через $K = K(n,k,r,p,q)$ точную (т. е. наименьшую) константу в неравенстве

$$\|y^{(k)}\|_{L^q(\mathbb{R})} \le K\|y\|^{1-\alpha}_{L^r(\mathbb{R})}\|y^{(n)}\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R})}, \qquad y \in W^n(r,p),$$
$$0 \le k < n, \qquad \alpha = \tfrac{k-1/q+1/r}{n-1/p+1/r}. \tag{1}$$

Неравенства вида (1) впервые появились в 1912 г. в работе Г. Харди и Д. Е. Литтльвуда [11]; они показали, что при $p = q = r = \infty$ и любых n и k $(1 \le k < n)$ неравенство (1) имеет место с некоторой конечной константой. Первые точные неравенства были получены Е. Ландау [13] (для функций, определенных на полуоси) и Ж. Адамаром [10] (для функций, определенных на оси) при $n = 2$, $k = 1$, $p = q = r = \infty$. Фундаментальный результат в этой тематике принадлежит А. Н. Колмогорову [7]; он нашел точную константу в неравенстве (1) при $p = q = r = \infty$ для всех n и k $(1 \le k < n)$. Поэтому неравенства (1) часто называют неравенствами Колмогорова.

Теорема (А. Н. Колмогоров). *В случае $1 \le k < n$ на классе функций $W^n(\infty,\infty)$ справедливо неравенство*

$$\|y^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le K\|y\|^{1-\frac{k}{n}}_{L^\infty(\mathbb{R})}\|y^{(n)}\|^{\frac{k}{n}}_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

с точной константой $K = K(n,k,\infty,\infty,\infty) = \mathcal{K}_{n-k}\mathcal{K}_n^{\frac{k}{n}-1}$, где $\mathcal{K}_n$ — константы Фавара. Неравенство обращается в равенство на функциях вида $y(x) = c\varphi_n(ax+b)$, где $a,b,c \in \mathbb{R}$ — произвольные константы, $\varphi_n(x)$ — n-й периодический интеграл с нулевым средним значением от функции $\varphi_0(x) = \operatorname{sign}\sin x$.

Б. С.-Надь [15] получил в 1941 г. неравенство (1) с наилучшей константой в случае $n = 1$, $k = 0$, $p \ge 1$, $0 < r < q \le \infty$.

Теорема (Б. С.-Надь). *В случае $1 \le p < \infty, 0 < r < q \le \infty$ на классе функций $W^1(r,p)$ справедливо неравенство*

$$\|y\|_{L^q(\mathbb{R})} \le K\|y\|^{1-\alpha}_{L^r(\mathbb{R})}\|y'\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \alpha = \frac{1/r-1/q}{1-1/p+1/r} \tag{2}$$

с точной константой

$$K = K(1,0,r,p,q) = \left(\frac{1-r/q}{2\alpha}H\left(\frac{1/q}{\alpha},\frac{p-1}{p}\right)\right)^{\alpha},$$

где функция $H(u,v)$ определяется равенствами

$$H(u,v)=\frac{G(u+v)}{G(u)G(v)},\quad G(u)=\left(\frac{e}{u}\right)^{u}\Gamma(1+u),\quad G(0)=1. \quad (3)$$

Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $y(x)=cy_{q,r,p}(|ax+b|)$, где $a\neq 0,b,c$ — произвольные действительные числа, а функция $y_{q,r,p}$ при $x\geq 0$ определена следующим образом: $u=y_{q,r,p}(x)$ является обратной для функции

$$x(u)=\int_u^1\frac{dt}{(t^r-t^q)^{1/p}},\quad 0\leq u\leq 1;$$

$y_{q,r,p}(x)$ — монотонно убывающая функция, которая в случае $r\geq p$ всюду положительна, а в случае $r<p$ в точке $x_0=x(0)$ равна нулю; в этом случае полагаем $y_{q,r,p}(x)=0$ для $x>x_0$.

Пусть $W_+^n(r,p)$ — класс функций $y\in L^r(\mathbb{R})$, у которых производная $y^{(n-1)}$ локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $y_+^{(n)}\in L^p(\mathbb{R})$, где $y_+^{(n)}(x)=\max\{0,y^{(n)}(x)\}$. Обозначим $K_+=K_+(n,k,r,p,q)$ наилучшую константу в неравенстве

$$\begin{gathered}\|y^{(k)}\|_{L^q(\mathbb{R})}\leq K_+\|y\|_{L^r(\mathbb{R})}^{1-\alpha}\|y_+^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\alpha},\qquad y\in W_+^n(r,p),\\ 0\leq k<n,\qquad \alpha=\tfrac{k-1/q+1/r}{n-1/p+1/r}.\end{gathered}\tag{4}$$

Неравенства (4) менее изучены. В работе Л. Хёрмандера [12] 1954 г. исследован случай $p=q=r=\infty$. В. Н. Габушин [6] получил в 1976 г. точную константу K_+ в неравенстве (4) для $n=1$, $k=0$, $p\geq 1$, $q>r>0$, доказав равенство $K_+=2^{\alpha}K$. Кроме того, Габушиным был получен критерий конечности константы в неравенствах (1) и (4).

2. Обозначим через $\mathcal{W}^q$ пространство абсолютно-непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций y, удовлетворяющих условию $y'\in L^q(-\pi,\pi)$, а через $\mathcal{W}_+^q$ — множество абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций y, для которых $y'_+\in L^q(-\pi,\pi)$.

Определим три класса $Q^j=Q^j(q)$, $j=1,2,3$, функций y, абсолютно непрерывных на всей числовой оси, 2π-периодических, сужение которых на отрезок $[-\pi,\pi]$ принадлежит пространству $\mathcal{W}^q$, и для которых выполняется соответственно свойство

$$\max y + \min y = 0, \qquad \text{для } j = 1, \tag{5}$$

$$\exists\, x_0 \in [-\pi, \pi] : \; y(x_0) = 0, \qquad \text{для } j = 2, \tag{6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(x)dx = 0, \qquad \text{для } j = 3. \tag{7}$$

Аналогичные классы функций $y \in \mathcal{W}_+^q$, обладающих свойством (5), (6) или (7), обозначим Q_+^1, Q_+^2 и Q_+^3 соответственно.

Пусть $C_{p,q}(Q^j)$ — точная константа в неравенстве

$$\begin{gathered} \|y\|_{L^p(-\pi,\pi)} \le C_{p,q}(Q^j)\|y'\|_{L^q(-\pi,\pi)}, \quad y \in Q^j, \\ 0 \le p \le \infty, \; 1 \le q \le \infty, \; j = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{8}$$

Неравенства (8) на различных классах функций исследовали В. Виртингер, Э. Шмидт, Г. Бор, Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Б. С.-Надь, Д. Фавар, Н. И. Ахиезер, В. И. Левин, С. Б. Стечкин, Н. П. Корнейчук и др. (см. [9], [14]).

Неравенство (8) на классах Q^1, Q^2 изучал Э. Шмидт [16]. Он доказал для всех $0 \le p \le \infty, 1 \le q \le \infty$ равенства

$$\begin{gathered} C_{p,q}(Q^1) = \frac{\pi}{2} H\left(\frac{1}{p}, \frac{q-1}{q}\right), \quad p \ne 0; \\ C_{0,q}(Q^1) = \lim_{p \to +0} C_{p,q}(Q^1) = \frac{\pi}{2}\left(G\left(\frac{q-1}{q}\right)\right)^{-1}, \\ C_{p,q}(Q^2) = 2C_{p,q}(Q^1), \end{gathered} \tag{9}$$

где функции $H(u, v)$ и $G(u)$ определены в (3).

Как показал Шмидт [16], при $q \ne 1$ функции, на которых неравенство (8) обращается в равенство, имеют вид $y(x) = c_1 Y_{p,q}(x + c_2)$ — в случае Q^1 и $y(x) = c_1 \left|Y_{p,q}\left(\frac{x}{2} + c_2\right)\right|$ — в случае Q^2, где c_1, c_2 — произвольные константы, а функция $Y_{p,q}$ является решением дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} |Y_{p,q}|^p + \gamma^q |Y'_{p,q}|^q = 1, \quad 0 < p < \infty, \, q \ne 1, \\ \ln|Y_{0,q}| + \gamma^q |Y'_{0,q}|^q = 0, \quad p = 0, \, q \ne 1, \end{gathered}$$

где $\frac{1}{\gamma} = 4\int_0^1 \eta^{\frac{1}{1-q}}\, d\xi$, а $\xi \in [-1, 1]$ и $\eta \ge 0$ связаны соотношением $|\xi|^p + |\eta|^{\frac{q}{q-1}} = 1$ при $p \ne 0$ и $\ln|\xi| + |\eta|^{\frac{q}{q-1}} = 0$, если $p = 0$.

При $p = \infty$, $q \neq 1$ и при $q = \infty, 0 \leq p \leq \infty$ функция $Y_{p,q}$ является 2π-периодической кусочно-линейной с вершинами на $[-\pi, \pi]$ в точках $(\pm\pi, 0), (\pm\frac{\pi}{2}, \pm 1)$.

В случае $q = 1$ неравенство (8) строгое — экстремальной функции (т. е. функции, на которой неравенство обращается в равенство) из соответствующего класса Q^j, $j = 1, 2$, не существует. Точность констант $C_{p,1}(Q^1) = \pi/2$ и $C_{p,1}(Q^2) = \pi$ можно обосновать, рассмотрев при $n \to \infty$ последовательность 2π-периодических кусочно-линейных функций с вершинами на $[-\pi, \pi]$ в точках $(\pm 1/n, \pm 1), (\pm\pi \mp 1/n, \pm 1), (\pm\pi, 0)$ для случая $j = 1$, и в точках $(\pm\pi \mp 1/n, 1), (\pm\pi, 0)$ для случая $j = 2$.

На классе Q^3 при $p = q = 2$ точная константа в неравенстве (8) равна 1. Равенство достигается на функциях вида $c_1 \sin(x + c_2)$. В более общем случае, когда $p = 2$, $1 \leq q \leq \infty$ неравенство (8) на классе Q^3 нетрудно получить из неравенства на классе Q^1 (неравенства Шмидта), при этом

$$C_{2,q}(Q^3) = C_{2,q}(Q^1) \tag{10}$$

и экстремальными являются функции вида $c_1 Y_{2,q}(x + c_2)$.

Константа $C_{\infty,\infty}(Q^3) = \pi/2$ получена Бором [9]. Случай $p = \infty$, $1 \leq q < \infty$ исследован С. Б. Стечкиным [9]. Точная константа описывается соотношениями

$$C_{\infty,q}(Q^3) = \pi \left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}, \quad 1 < q < \infty,$$

$$C_{\infty,1}(Q^3) = \lim_{q \to +1} C_{\infty,q}(Q^3) = \pi.$$

Отметим, что $C_{\infty,q}(Q^3) \neq C_{\infty,q}(Q^1)$ при $1 \leq q < \infty$. Неравенство (8) при $q \neq 1$ обращается в равенство на функциях вида cY_q, где c — произвольная константа и

$$Y_q(x) = \left|\frac{x}{\pi}\right|^{\frac{q}{q-1}} - \frac{q-1}{2q-1}, \tag{11}$$

при $q = 1$ неравенство (8) строгое, $C_{\infty,1}(Q^3) = \pi$.

Некоторые обобщения неравенства (8) приведены в [8]. В частности, $C_{1,1}(Q^3) = \pi/2$. Экстремальной является последовательность 2π-периодических кусочно-линейных функций с вершинами на $[-\pi, \pi]$ в точках $(\pm 1/n, \pm 1)$, $(\pm\pi \mp 1/n, \pm 1), (\pm\pi, 0)$.

При $q = \infty$ точную константу получили Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин [8]:

$$C_{p,\infty}(Q^3) = C_{p,\infty}(Q^1) = \frac{\pi}{2}(p+1)^{-\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Экстремальной является 2π-периодическая кусочно-линейная функция с вершинами на отрезке $[-\pi, \pi]$ в точках $(\pm\pi, 0), \left(\pm\frac{\pi}{2}, \pm 1\right)$.

Во второй главе диссертации изучается точное неравенство

$$\begin{gathered} \|y\|_{L^p(-\pi,\pi)} \le C_{p,q}(Q^j_+)\|y'_+\|_{L^q(-\pi,\pi)}, \quad y \in Q^j_+, \\ 0 \le p \le \infty, \ 1 \le q \le \infty, \ j = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{12}$$

Для точной константы в неравенстве (12) на классе Q^3_+ известно (см. [8]), что $C_{p,\infty}(Q^3_+) = 2C_{p,\infty}(Q^3)$ для всех $1 \le p \le \infty$. Аналогичное равенство нетрудно получить и в случае $q = 1$.

Обзор результатов диссертации.

1. В первой главе диссертации исследуется неравенство (4) при $k = 1$, $n = 2$, $q = r = p = 2$, принимающее следующий вид:

$$\|y'\|_{L^2(\mathbb{R})} \le K_+ \|y\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} \|y''_+\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}, \quad y \in W^2_+(2,2). \tag{13}$$

Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо равенство $K_+ = \sqrt{2/\lambda}$, где λ — единственный на интервале $(0,1)$ корень уравнения*

$$\frac{\pi + \arccos\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)}{\sqrt{2+\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2-\lambda}} \ln \frac{1+\sqrt{2\lambda - \lambda^2}}{1-\lambda}. \tag{14}$$

Приближенные значения констант: $\lambda \approx 0.855...$, $K_+ \approx 1.529...$

Функции из класса $W^2_+(2,2)$, экстремальной в неравенстве (13), не существует. Можно построить экстремальную последовательность, которая "сходится" к 2-периодической функции, определенной на отрезке $[-1, 1]$ следующим образом:

$$Y(x) = e^{x\rho_0 \cos\varphi} \sin(x\rho_0 \sin\varphi - \varphi) - e^{-x\rho_0\cos\varphi} \sin(x\rho_0 \sin\varphi + \varphi),$$

где $\rho_0 = \frac{\pi + \arccos\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)}{\sqrt{2+\lambda}} \approx 2.452...$ и $\varphi = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \approx 1.006...$.

В **§1.1** найдена (путем перехода от мультипликативного к аддитивному неравенству) точная константа в неравенстве

$$\|y'\|_{L^2(0,1)} \le K(U)\|y\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,1)}\|y''_+\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,1)} \qquad (15)$$

в пространстве $L^2(0,1)$ на классе U функций y, выпуклых вниз на отрезке $[0,1]$ и обладающих свойством $y'(0)=0$. А именно, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Имеет место равенство* $K(U)=\sqrt{2/\lambda}$.

В **§1.2** исходная задача редуцирована к уже решенной в **§1.1** задаче на отрезке на классе U и, как следствие, доказана теорема 1. В рассуждениях этого параграфа использован так называемый метод "очистки", который приводит к сужению класса рассматриваемых функций; подобная идея применялась ранее в работе В. В. Арестова и В. И. Бердышева [2] в несколько иной ситуации.

2. Во второй главе изучается точная константа $C_{p,q}(Q^j_+)$, $j=1,2,3$, в неравенстве (12). Основными результатами являются следующие два утверждения.

Теорема 2. *При всех* $0\le p\le\infty, 1\le q\le\infty$ *справедливо равенство*

$$C_{p,q}(Q^j_+) = 2C_{p,q}(Q^j), \qquad j=1,2.$$

Теорема 3. *При всех* $1\le q\le\infty$ *справедливы неравенства*

$$C_{p,q}(Q^3_+) \ge 2C_{p,q}(Q^1), \qquad 0\le p\le\infty,$$

$$C_{p,q}(Q^3_+) \le 2C_{p,q}(Q^3), \qquad 1\le p\le\infty.$$

При этом в случаях $p=2$ *и* $p=\infty$ *имеет место равенство*

$$C_{p,q}(Q^3_+) = 2C_{p,q}(Q^3), \qquad 1\le q\le\infty.$$

Экстремальной функции в классе $Q^j_+(q)$, $1\le q\le\infty$, при $p\ge 0$ (для случая $j=1,2$) и при $p\ge 1$ (для случая $j=3$) не существует. Однако можно построить экстремальную последовательность, сглаживая соответствующим образом функцию $Y_{p,q;j}$, определенную для $x\in[-\pi,\pi]$ соотношениями

$$Y_{p,q;j}(x) = \begin{cases} Y_{p,q}\left(\frac{x}{2}\right), & j=1, \\ Y_{p,q}\left(\frac{x+\pi}{4}\right), & j=2, \\ Y_{2,q}\left(\frac{x}{2}\right), & j=3,\ p=2, \\ Y_{q}\left(\frac{x+\pi}{2}\right), & j=3,\ p=\infty. \end{cases} \tag{16}$$

В **§2.1** получена оценка сверху для точной константы $C_{p,q}(V^j)$ в неравенстве вида (12) на классе V^j неубывающих на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций, удовлетворяющих свойству (5), (6) или (7). А именно, для всех $0 \le p \le \infty, 1 \le q \le \infty$ и $j = 1,2,3$ доказано неравенство $C_{p,q}(V^j) \le 2C_{p,q}(Q^j)$. Как следствие, с учетом свойств функции, экстремальной в неравенстве (8) на классе Q^1, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *При всех* $0 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $j = 1,2$ *имеет место равенство* $C_{p,q}(V^j) = 2C_{p,q}(Q^j)$.

В **§2.2** для всех $0 \le p \le \infty$ и $1 \le q \le \infty$ доказаны неравенства $C_{p,q}(Q^j_+) \ge 2C_{p,q}(Q^j), j = 1,2$; $C_{p,q}(Q^3_+) \ge 2C_{p,q}(Q^1)$. Данная оценка снизу получена путем предъявления последовательности, которая строится на основе функции, экстремальной в неравенстве (8) на классе Q^1. Из второго неравенства, очевидно, следует, что при всех значениях параметров p и q, при которых справедливо равенство $C_{p,q}(Q^1) = C_{p,q}(Q^3)$, выполняется неравенство $C_{p,q}(Q^3_+) \ge 2C_{p,q}(Q^3)$. Отсюда, в частности, учитывая равенство (10), получаем для всех $1 \le q \le \infty$ оценку $C_{2,q}(Q^3_+) \ge 2C_{2,q}(Q^3)$. При $p = \infty$ аналогичную оценку для константы $C_{\infty,q}(Q^3_+)$ можно получить построением последовательности функций на основе функции Y_q, экстремальной на классе Q^3 в соответствующем неравенстве (8); отметим, что $C_{\infty,q}(Q^3) \ne C_{\infty,q}(Q^1)$ при $q \ne \infty$.

В **§2.3** показано, что при нахождении величины $C_{p,q}(Q^j_+)$, $j = 1, 3$ достаточно рассматривать подмножество функций из Q^j_+, сужение которых на отрезок $[-\pi,\pi]$ является многочленом.

В **§2.3.1** для константы $C_{p,q}(Q^1_+)$ редукцией к задаче о нахождении величины $C_{p,q}(V^1)$ при всех $0 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ получена оценка сверху $C_{p,q}(Q^1_+) \le 2C_{p,q}(Q^1)$ и, как следствие, оценка сверху $C_{p,q}(Q^2_+) \le 2C_{p,q}(Q^2)$. С учетом доказанной в §2.2 оценки снизу, отсюда следует справедливость теоремы 2.

Аналогичная оценка сверху $C_{p,q}(Q^3_+) \le 2C_{p,q}(Q^3)$ при всех $1 \le p, q \le \infty$ получена в **§2.3.2** редукцией к задаче о нахождении величины $C_{p,q}(V^3)$. С учетом доказанной в §2.2 при $p = 2$ и $p = \infty$ оценки снизу, получаем справедливость теоремы 3.

В **§2.4** исследуется вопрос о существовании экстремальной в неравенстве (12) функции. Доказана следующая теорема.

Теорема 4. *В неравенстве* (12) *экстремальной, не равной тождественно нулю функции, принадлежащей классу* $Q^j_+(q)$, $1 \le q \le \infty$, *не существует для всех значений* $0 \le p \le \infty$ *при* $j = 1, 2$ *и для всех значений* $1 \le p \le \infty$ *при* $j = 3$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В. В. Арестову за постановку задач и внимание к работе. А также искреннюю признательность Р. Р. Акопяну за постоянный интерес к моим исследованиям.

Список цитированной литературы

[1] **Арестов, В. В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В. В. Арестов // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, вып. 6. – С. 89–124.

[2] **Арестов, В. В.** Неравенства для дифференцируемых функций / В. В. Арестов, В. И. Бердышев // Тр. Ин-та математики и механики. Методы решения условно-корректных задач. – 1975. – Вып. 17. – С. 108–138.

[3] **Арестов, В. В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными / В. В. Арестов, В. Н. Габушин // Изв. вузов. – 1995. – № 11. – С.42–68. – (сер. Математика).

[4] Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.

[5] **Владимиров, В. С.** Владимир Андреевич Стеклов — ученый и организатор науки / В. С. Владимиров, И. И. Маркуш. – М.: Наука, 1981. – 96 с.

[6] **Габушин, В. Н.** Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \le \infty$ / В. Н. Габушин // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – Т. 40. – С. 869–892.

[7] **Колмогоров, А. Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252–263.

[8] **Корнейчук, Н. П.** Аппроксимация с ограничениями / Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 252 с.

[9] **Харди, Г. Г.** Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

[10] **Hadamard, J.** Sur le module maximum d'une fonction et de ses dériveées / J. Hadamard // Soc. Math. France, Comptes rendus des Séances. – 1914. – V. 41. – P. 68–72.

[11] **Hardy, G. H.** Contribution to the arithmetic theory of series / G. H. Hardy, J. E. Littlewood // Proc. London Math. Soc. (2). – 1912. – V. 11. – P. 411–478.

[12] **Hörmander, L.** A new proof and a generalization of an inequality of Bohr / L. Hörmander // Math. Scand. – 1954. – V. 2. – P. 33–45.

[13] **Landau, E.** Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen / E. Landau // Proc. London Math. Soc. (2). – 1913. – V. 13. – P. 43–49.

[14] **Mitrinović, D. S.** Inequalities involving functions and their integrals and derivatives / D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1991. – 604 p.

[15] **Sz.-Nagy, B.** Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung / B. Sz.-Nagy // Acta Sci. Math. – 1941. – V. 10. – P. 64–74.

[16] **Schmidt, E.** Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet / E. Schmidt // Math. Ann. – 1940. – V. 117. – P. 301–326.

Список работ автора

[17] **Zernyshkina, E. A.** Kolmogorov type inequality in L_2 on the real line with one-sided norm / E. A. Zernyshkina // East J. Approx. – 2006. – V. 12, № 2. – P. 127–150.

[18] **Зёрнышкина, Е. А.** Неравенство Шмидта между нормами функции и положительной срезки ее производной / Е. А. Зёрнышкина // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2006. – № 44. – С. 76–88. – (сер. Математика и механика; вып. 9).

16 -

[19] **Зёрнышкина, Е. А.** Неравенство между нормой функции с нулевым средним значением и положительной срезкой ее производной / Е. А. Зёрнышкина // Тр. Междунар. лет. мат. Шк. С. Б. Стечкина по теории функций. – Тула: Изд-во ТулГУ; 2007. – С. 79–80.

[20] **Зёрнышкина, Е. А.** Неравенство Колмогорова в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с положительной срезкой второй производной / Е. А. Зёрнышкина // Междунар. конф. «Функционал. пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвящ. столетию акад. С. М. Никольского (Москва, 23–29 мая 2005 г.): тез. докл. – М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – 2005. – С. 110.

[21] **Зёрнышкина, Е. А.** Неравенство между нормами функции и положительной срезкой ее производной / Е. А. Зёрнышкина // Соврем. проблемы математики, механики, информатики: тез. докл. Междунар. науч. конф. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. – С. 92–94.

[22] **Зёрнышкина, Е. А.** Неравенство Виртингера с односторонней нормой производной / Е. А. Зёрнышкина // Соврем. проблемы теории функций и их прил. Тез. докл. – Саратов: Изд-во ГосУНЦ Колледж, 2006. – С. 7.

[23] **Зёрнышкина, Е. А.** Неравенство Шмидта между нормами функции и положительной срезки ее производной // 4 Междунар. симпоз. «Ряды Фурье и их приложения»: тез. докл. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2006. – С. 28.

[24] **Зёрнышкина, Е. А.** Неравенство Виртингера между нормой функции и положительной срезкой ее производной / Е. А. Зёрнышкина // Соврем. проблемы математики, механики, информатики: материалы Междунар. науч. конф. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. – С. 53–54.

Подписано в печать 15.09.2008.
Формат 60 × 84 1/16. Бумага пр. – печатная. Усл. печ. л. 1.
Тираж 100 экз. Заказ № 59 Размножение с готового
оригинал-макета в типографии ОТИ МИФИ
Озерск, пр. Победы, 48.