На правах рукописи

Кокарев Виктор Николаевич

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПОЛУЧЕНИИ И РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТИПА МОНЖА-АМПЕРА НА КОМПАКТНЫХ И НЕКОМПАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2010

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии Самарского государственного университета

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Климентов Сергей Борисович,

доктор физико-математических наук, профессор
Миклюков Владимир Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор
Фоменко Валентин Трофимович

Ведущая организация:

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Защита состоится 2 сентября 2010 г. в 16 30 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики имени С.Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4, ауд. 417.

С диссертацией можно ознакомися в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 3 июля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Действительные уравнения типа Монжа - Ампера связаны с важнейшими проблемами геометрии: проблемой Минковского о нахождении выпуклой поверхности с заданной гауссовой кривизной, проблемой Вейля о существовании замкнутой выпуклой поверхности с заданной метрикой, проблемой характеризации несобственных выпуклых аффинных сфер. К комплексному уравнению типа Монжа-Ампера приводит важнейшая в кэлеровой геометрии проблема Калаби. Этими проблемами занимались А. Д. Александров, А. В. Погорелов, Е. Калаби, С. Т. Яу, Ш. Ш. Чжень и многие другие.

С 70-х годов XX века рассматриваются уравнения, содержащие смешанный дискриминант от гессиана неизвестной функции. Большинство таких уравнений возникает в задачах, связанных с восстановлением выпуклой поверхности по элементарной симметрической функции ее главных кривизн, радиусов кривизны или условных радиусов кривизны. Впервые такая задача была рассмотрена А. В. Погореловым [1]. Им было доказано существование замкнутой выпуклой поверхности с заданной элементарной симметрической функцией ее главных радиусов кривизны при некоторых ограничениях на эту функцию. Н. М. Ивочкиной [2] найдены условия разрешимости краевой задачи, связанной с восстановлением выпуклой поверхности по элементарной симметрической функции ее главных нормальных кривизн. Л. Каффарелли, Л. Ниренберг, Дж. Спрук [3] получили условия разрешимости краевой задачи для уравнения, содержащего функцию от смешанных дискриминантов гессиана неизвестной функции.

Уравнения, содержащие смешанный дискриминант от гессиана неизвестной функции будем называть уравнениями Монжа-Ампера m -го порядка. В диссертации собраны результаты автора по геометрическим проблемам, приводящим к рассмотрению эллиптических уравнений типа Монжа-Ампера m -го порядка на многобразиях.

Цель работы. Целями работы являются:

1) доказательство теоремы о существовании замкнутой выпуклой поверхности с заданной элементарной симметрической функцией ее услов-

[1] Погорелов А.В. Многомерная проблема Минковского. - М.: Наука, 1975. - 96 с.

[2] Ивочкина Н.М. Решение задачи Дирихле для уравнений кривизны порядка m// Матем. сб. - 1989. - Т. 180, № 7. - С. 867 - 887.

[3] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equatons. III. Functions of the eigenvalues of Hessian// Acta Math. - 1985. - V. 155, № 3, 4. - P. 261 - 304.

ных радиусов кривизны,

2) доказательство существования кэлеровой метрики с заданной смешанной формой объема на компактных кэлеровых многообразиях положительной и нулевой голоморфной секционной кривизны,

3) исследование решений уравнений – аналогов уравнений несобственных аффинных сфер. Доказательство того, что класс уравнений, задающих несобственную аффинную сферу достаточно широк и не ограничивается простейшими уравнениями Монжа-Ампера.

Методы исследования. При доказательстве теорем о существовании замкнутой выпуклой поверхности с заданной элементарной симметрической функцией ее условных радиусов кривизны и о существования кэлеровой метрики с заданной смешанной формой объема используется метод продолжения по параметру, восходящий к С. Н. Бернштейну. Центральным моментом при использовании этого метода являетя получение априорной оценки решения. При изучении решений уравнений – аналогов уравнений несобственных аффинных сфер находится дифференциальное неравенство на решение уравнения и априорная оценка решения. Это позволяет доказать, что решениями таких уравнений является только квадратичные полиномы.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. Впервые получены достаточные условия существовании замкнутой выпуклой поверхности с заданной элементарной симметрической функцией ее условных радиусов кривизны и существования кэлеровой метрики с заданной смешанной формой объема. Впервые получено обобщение теоремы Ёргенса-Калаби-Погорелова о полных выпуклых решениях уравнений близких к уравнению несобственной выпуклой аффинной сферы.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в работе имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по геометрии "в целом", в кэлеровой геометрии, в аффинной дифференциальной геометрии.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Восьмой Всесоюзной геометрической конференции (Одесса, 1984), на Всесоюзной конференции по геометрии "в целом" (Новосибирск, 1987), на IX Всесоюзной геометрической конференции (Кишинев, 1988), на Международном геометрическом семинаре им Н.И. Лобачевского (Казань, 1997), на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Ростов-на-Дону, 2002, 2008), на Международных геометрических конференциях "геометрия в Одессе" (Одесса, 2007, 2009), на геометрическом семинаре в ХГУ под руководством акад. РАН А.В. Погорелова (Харьков, многократно), на семинаре по геометрии и анализу в Институте математики СО РАН им. С.Л. Соболева под руководством акад. РАН Ю.Г. Решетняка (Новосибирск, 2009), на геометрическом семинаре в Институте математики СО РАН им. С.Л. Соболева под руководством чл. кор. РАН И.А. Тайманова (Новосибирск, 2009), на геометрическом семинаре в МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. И.Х. Сабитова (Москва, 2008), на геометрическом семинаре в Южном федеральном университете под руководством проф. С.Б. Климентова (Ростов-на-Дону, 2009)

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 22 научных статьях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 133 страницах, состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 74 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении содержится обзор полученных ранее результатов, связанных с темой диссертации, приводится постановка задач, рассматриваемых в работе, дается краткое изложение содержания диссертации.

Глава 1. Замкнутые выпуклые поверхности с заданными функциями условных радиусов кривизны

Пусть $f^k = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k x_i x_j, (k = 1, \dots, m)$ - положительно определенные квадратичные формы. Составим форму $f = \sum_{k=1}^m \lambda_k f^k$ и рассмотрим определитель матрицы квадратичной формы f: $\det f = \det(\lambda_1 a_{ij}^1 + \dots + \lambda_m a_{ij}^m)$.

Это однородный многочлен степени n по $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, то есть

$$\det f = \sum_{k_n=1}^{m} \dots \sum_{k_1=1}^{m} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \dots \lambda_{k_n} D(f^{k_1}, \dots, f^{k_n}).$$

Коэффициент при $\lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \dots \lambda_{k_n}$, взятый симметричным по всем индексам, называется смешанным дискриминантом форм $f^{k_1}, f^{k_2}, \dots, f^{k_n}$ или матриц $(a_{ij}^{k_1}), (a_{ij}^{k_2}), \dots, (a_{ij}^{k_n})$.

Пусть S – замкнутая выпуклая поверхность в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве E^{n+1}, в котором введены декартовы координаты

$x_1, \dots, x_{n+1}$. Если S регулярна, по крайней мере дважды дифференцируема, и гауссова кривизна ее в любой точке положительна, то ее опорная функция H обладает той же степенью регулярности . Обозначим $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = H_{ij}$. Для замкнутой выпуклой поверхности E с положительной гауссовой кривизной обозначим опорную функцию через H^0 и аналогично $\dfrac{\partial^2 H^0}{\partial x_i \partial x_j} = H^0_{ij}$. Пусть S и E - регулярные замкнутые выпуклые поверхности в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве E^{n+1} с положительной гауссовой кривизной. Тогда S и E имеют биективные сферические отображения на единичную сферу

$$\nu_S \colon S \to S^n, \nu_E \colon E \to S^n.$$

Тем самым определено отображение

$$\nu_E^{-1} \circ \nu_S \colon S \to E,$$

которое сопоставляет всякой точке x поверхности S с внешней нормалью ν точку y поверхности E с той же внешней нормалью.

Дифференциалы указанных отображений устанавливают изоморфизмы между $\mathbf{T}_x(S), \mathbf{T}_y(E)$ и $\mathbf{T}_\nu(S^n)$ — касательными пространствами к S, E и S^n в точках x, y и ν. Пусть вектору $d\nu \in \mathbf{T}_\nu(S^n)$ соответствуют векторы $dx \in \mathbf{T}_x(S)$ и $dy \in \mathbf{T}_y(E)$.

Экстремумы отношения $\dfrac{dx d\nu}{dy d\nu}$ по всему $\mathbf{T}_\nu(S^n)$ называются главными условными радиусами кривизны поверхности S относительно поверхности E в точке x с внешней нормалью ν. Далее будем их называть условными радиусами кривизны поверхности S относительно поверхности E и обозначать $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n$. Тогда на единичной сфере S^n возникает функция $\varphi(\nu) = \sigma_k(\tilde{R}_1(\nu), \dots, \tilde{R}_n(\nu))$, где σ_k -k-я элементарная симметрическая функция.

Для k-й элементарной симметрической функции условных радиусов кривизны σ_k имеет место соотношение

$$C_n^k D(\underbrace{H_{ij}, \dots, H_{ij}}_{k}, H^0_{ij}, \dots, H^0_{ij}, \delta_{ij}) = D(\underbrace{H^0_{ij}, \dots, H^0_{ij}}_{n}, \delta_{ij}) \sigma_k,$$

$$(i, j = 1, \dots, n+1). \tag{1}$$

При этом

$$\int\limits_E \nu \sigma_k d\Omega_E = 0, \tag{2}$$

где $d\Omega_E$ – элемент площади поверхности E.

Следовательно, проблема существования замкнутой выпуклой поверхности с заданной элементарной симметрической функцией ее условных радиусов кривизны сводится к вопросу о разрешимости относительно функции H уравнения

$$C_n^k D(\underbrace{H_{ij},\ldots,H_{ij}}_{k}, H_{ij}^0,\ldots,H_{ij}^0,\delta_{ij}) = D(\underbrace{H_{ij}^0,\ldots,H_{ij}^0}_{n},\delta_{ij})\varphi,$$

$$(i,j=1,\ldots,n+1). \tag{3}$$

при выполнении необходимого условия

$$\int\limits_E \nu\varphi(\nu)d\Omega_E = 0, \tag{4}$$

Разрешимость уравнения (3) доказывается методом продолжения по параметру. Для этого в уравнение (3) вместо функции φ вводится функция $t\varphi + (1-t)C_n^k$ и доказывается, что полученное уравнение

$$C_n^k D(\underbrace{H_{ij},\ldots,H_{ij}}_{k}, H_{ij}^0,\ldots,H_{ij}^0,\delta_{ij}) = D(\underbrace{H_{ij}^0,\ldots,H_{ij}^0}_{n},\delta_{ij})(t\varphi + (1-t)C_n^k),$$

$$(i,j=1,\ldots,n+1). \tag{5}$$

разрешимо при всех $t \in [0,1]$. Необходимое условие (4) для функции $t\varphi + (1-t)C_n^k$ выполнено. Для доказательства разрешимости уравнения (5) достаточно доказать два предложения.

1. Множество тех t из отрезка $[0,1]$, при которых уравнение (5) разрешимо, открыто в $[0,1]$.

2. Множество тех t из отрезка $[0,1]$, при которых уравнение (5) разрешимо, замкнуто в $[0,1]$.

Доказательство предложения (1) сводится к исследованию соответствующего уравнения в вариациях и проводится стандартными методами как, например, в книге А.В Погорелова [4]. Наиболее трудным является доказательство второго предложения. Здесь требуется наличие априорной $C^{2,\alpha}$ - оценки решения. Известно (там же), что C^2 – оценка решения может быть получена при наличии оценки сверху на радиус нормальной кривизны искомой поверхности.

[4]Погорелов А.В. Многомерная проблема Минковского. - М.: Наука, 1975. - 96 с.

Пусть $R_E(\nu), r_E(\nu), R(\nu), r(\nu)$ – максимальные и минимальные радиусы нормальной кривизны в точках с внешней нормалью ν для поверхностей E и S , соответственно. Пусть для всех ν выполняются условия

$$\left(\frac{R_E(\nu)}{r_E(\nu)}\right)^{2(n-k)} \leqslant \frac{n}{n-1}, \tag{6}$$

$$\frac{R(\nu)}{r(\nu)} \leqslant \frac{2n+1}{2n-1}. \tag{7}$$

Пусть $\gamma(s)$ – геодезическая на поверхности E, проходящая через точку $\gamma(0)$ с внешней нормалью ν в направлении η. Пусть $k_n(s)$ - нормальная кривизна этой геодезической. Обозначим

$$\tilde{\theta}(\nu) = \max_{\eta} \frac{dk_n}{ds}(0), \quad \tau(\nu) = \max_{\eta} |\frac{d^2 k_n}{ds^2}(0)|,$$

где максимумы берутся по всем направлениям в точке $\gamma(0)$. Введем функции

$$\theta(\nu) = \tilde{\theta}(\nu) R_E^3(\nu),$$

$$\varkappa(\nu) = 4\tau(\nu) R_E^4(\nu) + \frac{9n^3 R_E^7(\nu)\tilde{\theta}^2(\nu)}{r_E^2(\nu)} + \frac{1}{2}\sqrt{R_E^2(\nu) - r_E^2(\nu)}.$$

Пусть K_E – гауссова кривизна поверхности E в точке с внешней нормалью ν. Обозначим

$$A(\nu) = \frac{R_E^{n-k+2} K_E^{1/k}}{r_E^{n-k+1}},$$

$$B(\nu) = \frac{1}{k}\left(\frac{2n^3\theta^2 R_E^{2n-2}}{r_E^n} + 2(n-k)(n-k-1)\frac{\theta^2 K_E}{r_E^2} + \right.$$
$$+ \frac{(n-k)^2 \varkappa R_E^{n-k-1}}{r_E^{n-k}} +$$
$$\left. + \frac{(k-1)(n-k)^2\theta K_E}{k r_E}\left(2|\varphi_k'| + \frac{(n-k)^2\theta\varphi_k K_E}{k r_E}\right)\right)$$

где все величины в правых частях считаются в точке $\gamma(0)$ или ν. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть S и E – регулярные замкнутые выпуклые, удовлетворяющие условиям (6) и (7) поверхности в евклидовом пространстве E^{n+1}. Пусть $\varphi(\nu) = \sigma_k\left(\tilde{R}_1(\nu), \ldots, \tilde{R}_n(\nu)\right)$ –k-я элементарная* *симметрическая функция условных радиусов кривизны поверхности S относительно E. Тогда для радиусов нормальной кривизны поверхности S справедлива оценка*

$$R \leqslant \max_{\nu,\eta} \frac{1}{A} \left[\varphi_k(1+B) - \varphi_k''\right], \quad \text{где} \quad \varphi_k = \left(\frac{\varphi}{K_E C_n^k}\right)^{1/k},$$

а дифференцирование выполняется по длине дуги большого круга на единичной сфере в точке ν в направлении η. Максимум берется по всем точкам сферы и всем направлениям в этих точках.

Отметим, что если поверхность E является единичной сферой, то $A(\nu) \equiv 1$, $B(\nu) \equiv 0$, $K_E(\nu) \equiv 1$ и полученная оценка совпадает с оценкой А. В. Погорелова для радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности с заданной элементарной симметрической функцией ее главных нормальных радиусов кривизны.

Далее с помощью теоремы 7.2 из статьи Н.М. Ивочкиной [5] доказывается существование априорной $C^{2,\alpha}$ - оценки на решение.

Для того, чтобы условие (7) выполнялось на каждом шаге при продвижении по параметру, функцию φ нужно подчинить некоторым условиям. В результате получаем теорему.

Теорема 2. *Пусть максимальный и минимальный радиусы нормальной кривизны замкнутой выпуклой поверхности E в каждой точке удовлетворяют условию*

$$\left(\frac{R_E}{r_E}\right)^{2(n-k)} < \frac{2n}{2n-1}.$$

Тогда для существования замкнутой выпуклой поверхности S с данной k -ой элементарной симметрической функцией условных относительно E радиусов кривизны $\sigma_k(\tilde{R}_1(\nu), \ldots, \tilde{R}_n(\nu)) = \varphi(\nu)$ достаточно выполнения условий

$$1. \int\limits_E \nu\varphi(\nu) d\Omega_E = 0,$$

$$2. \left(1 - \frac{k}{2n^2}\right)^{1/k} R_{max,t} < r_E \left(\frac{\varphi_t}{C_n^k}\right)^{1/k},$$

$$\text{где} \quad \varphi_t = t\varphi + (1-t)C_n^k, \quad t \in [0,1],$$

[5] Ивочкина Н.М. Решение задачи Дирихле для уравнений кривизны порядка m// Матем. сб. - 1989. - Т. 180, № 7. - С. 867 - 887.

$$R_{max,t} = \max_{\nu,\eta} \frac{1}{A}\left[\varphi_{kt}(1+B) - \varphi''_{kt}\right],$$

$$A = \frac{R_E^{n-k+2} K_E^{1/k}}{r_E^{n-k+1}},$$

$$B = \frac{1}{k}\left(\frac{2n^3\theta^2 R_E^{2n-2}}{r_E^n} + 2(n-k)(n-k-1)\frac{\theta^2 K_E}{r_E^2} + \right.$$
$$+ \frac{(n-k)^2 \varkappa R_E^{n-k-1}}{r_E^{n-k}} +$$
$$\left. + \frac{(k-1)(n-k)^2\theta K_E}{k r_E}\left(2|\varphi'_{kt}| + \frac{(n-k)^2\theta\varphi_{kt}K_E}{k r_E}\right)\right),$$

дифференцирование функции $\varphi_{kt} = \left(\dfrac{\varphi_t}{C_n^k K_E}\right)^{1/k}$ *выполняется по длине дуги большого круга на сфере* S^n *, исходящего из точки* ν *в направлении* η*. Максимум берется по всем точкам сферы и всем направлениям в этих точках.*

Если поверхность E *принадлежит классу* C^{m+2,α_0}, $(m \geqslant 2, 0 < \alpha_0 < 1)$*, а функция* $\varphi(\nu)$ *принадлежит классу* C^{m,α_0} *, то поверхность* S *будет принадлежать классу* C^{m+2,α_0}.

Поверхность S *единственна с точностью до параллельного переноса.*

Глава 2. Кэлеровы многообразия с заданными смешанными формами объема

Одна из эквивалентных формулировок проблемы Калаби такова (см., например, книгу А. Бессе [6] п.п. 2.101, 11.33): пусть (M, g^0) — компактное кэлерово многообразие комплексной размерности n. Любая ли $2n$-форма μ, индуцирующая ориентацию M, является формой объема некоторой кэлеровой метрики g на M? При этом кэлеровы формы ω_0 и ω метрик g^0 и g должны быть когомологичны.

Проблема была решена С.Т. Яу [7]. Ответ положителен при выполнении необходимого условия: объем формы μ должен равняться объему многообразия M относительно метрики g^0.

[6] Бессе А. Многообразия Эйнштейна, т. 1, 2. - М.: Мир, 1990. - 704 с.

[7] Yau S.T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampere equation, I// Comm. Pure Appl. Math. - 1978. - V. 31. - P. 339 - 411.

Начиная с работ Минковского в математике рассматриваются различные смешанные объекты: смешанные объемы, смешанные дискриминанты, смешанные поверхностные функции. Автор ввел в рассмотрение смешанные формы объема на кэлеровых многообразиях. Пусть $g^1, \dots, g^n$ - кэлеровы метрики на кэлеровом многообразии M, $\omega_1, \dots, \omega_n$ - соответствующие кэлеровы формы. Так как формы четной степени при внешнем перемножении коммутируют, то $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n/n!$ является множителем при $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n$ в выражении $(\lambda_1\omega_1 + \dots + \lambda_n\omega_n)^n/n!$. По аналогии со смешанными дискриминантами и смешанными объемами естественно называть $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n/n!$ смешанной формой объема для метрик $g^1, \dots, g^n$ или их кэлеровых форм $\omega_1, \dots, \omega_n$. В частности, $\omega_1^m \wedge \omega_2^{n-m}/n!$ будем называть смешанной формой объема m -го порядка для метрик g^1 и g^2. Очевидно, локально $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n/n! = i^{n^2} D(g^1, \dots, g^n) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n$, где D обозначает смешанный дискриминант форм $g^1, \dots, g^n$.

Сформулируем

ОБОБЩЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ КАЛАБИ. *Пусть (M, g^0) — компактное кэлерово многообразие комплексной размерности n с заданной кэлеровой метрикой g^0. Любая ли $2n$ - форма μ, индуцирующая ориентацию на M, является смешанной формой объема m - го порядка некоторой кэлеровой метрики g и данной метрики g^0? Кэлеровы формы метрик g и g^0 также должны быть когомологичны.*

Форму μ можно представить в виде $\mu = e^F\omega_0$, а метрику g можно искать в виде $g_{\alpha\bar{\beta}} = g^0_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}$, где φ - глобально определенная на M функция, $\varphi_{,\alpha\bar{\beta}} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$. Тогда рассматриваемая нами задача сводится к вопросу о разрешимости комплексной версии уравнения Монжа-Ампера m -го порядка на кэлеровом многообразии:

$$D(\underbrace{g^0_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}, \dots, g^0_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}}_{m}, g^0_{\alpha\bar{\beta}}, \dots, g^0_{\alpha\bar{\beta}}) = e^F \det(g^0_{\alpha\bar{\beta}}). \qquad (1)$$

Из когомологичности кэлеровых форм метрик g и g^0 получаем необходимое условие разрешимости уравнения (1)

$$\mathrm{Vol}_{g^0}(M) = \int_M e^F dV_{g^0}, \qquad (2)$$

где $\mathrm{Vol}_{g^0}(M)$ - объем многообразия M относительно метрики g^0, dV_{g^0} - форма объема метрики g^0. Для случая $m = n$ (проблема Калаби) условие (2) является и достаточным. Для $m < n$ это уже не так. Здесь также как при обобщении проблемы Минковского нужно ввести условия, гарантирующие эллиптичнось решаемого уравнения.

Разрешимость уравнения (1) доказывается методом продолжения по параметру. Чтобы применить этот метод, доказываем существование априорных $C^{2,\alpha}$ - оценок решения уравнения (1). Сначала рассматривается случай, когда голоморфная секционная кривизна многообразия M положительна.

Пусть голоморфная секционная кривизна $K(\sigma)$ многообразия M всюду удовлетворяет условиям

$$1-\varepsilon \leqslant K(\sigma) \leqslant 1, \varepsilon < 1/2. \qquad (3)$$

Обозначим $\psi_m = e^{F/m}$. Пусть выполнено условие

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)^{1/m} \max_{z,\eta} \frac{2}{1-2\varepsilon}\left((\frac{1}{2}+\varepsilon)\psi_m - \eta\bar{\eta}(\psi_m)\right) < \psi_m(x), \forall x \in M, \qquad (4)$$

Здесь $z \in M$, η — такое векторное поле типа $(1,0)$ в окрестности точки z, что для комплексно сопряженного поля $\bar{\eta}$ скалярное произведение $(\eta, \bar{\eta}) = 1$. Максимум берется по всем точкам $z \in M$ и всем таким векторным полям η.

Тогда имеет место

Теорема 1. *Пусть компактное кэлерово многообразие M удовлетворяет условиям (3). Пусть φ — решение уравнения* (1) *при $m > 1$. Тогда при выполнении условий* (4) *φ допускает оценку в метрике C^{2,α_0},* $(0 < \alpha_0 < \alpha)$, *зависящую только от M , заданной метрики g^0, функции F и ее производных до второго порядка.*

С помощью этой теоремы доказывается следующая теорема существования.

Теорема 2. *Пусть M - компактное кэлерово многообразие с кэлеровой формой ω_0 и с голоморфной секционной кривизной $K(\sigma)$, удовлетворяющей условиям $1-\varepsilon \leqslant K(\sigma) \leqslant 1, \varepsilon < 1/2$. Чтобы форма $\mu = e^F\omega_0$ являлась формой смешанного объема m - го порядка $(1 < m < n)$ для единственной из того же класса, что и ω_0 кэлеровой формы ω и формы ω_0, достаточно выполнения условий*

$$1) \int\limits_M e^F \omega_0 = \int\limits_M \omega_0,$$

$$2) \left(1-\frac{m}{n}\right)^{1/m} \max_{z,\eta} \frac{2}{1-2\varepsilon}\left((\frac{1}{2}+\varepsilon)\psi_{mt} - \eta\bar{\eta}(\psi_{mt})\right)(z) <$$

$$< \psi_{mt}(x), \forall x \in M,$$

где $\psi_{mt} = (te^F + 1 - t)^{1/m}, t \in [0,1]$, η — векторное поле типа $(1,0)$ в окрестности точки z такое, что для $\bar{\eta}$ — комплексно сопряженного векторного поля скалярное произведение $(\eta, \bar{\eta}) = 1$. Максимум берется по всем точкам $z \in M$ и всем таким векторным полям η. Если $\omega_0, F \in C^{k,\alpha}(M), k \geqslant 2, 0 < \alpha < 1$, то $\omega \in C^{k,\alpha}$, если ω_0 и F вещественно аналитические, то форма ω вещественно аналитическая.

При $m = 1$ уравнение (1) линейное. В этом случае нам достаточно найти условия положительной определенности искомой метрики g. Пусть для всех точек $z \in M$ и всех полей η выполняется условие

$$(\frac{1}{2} - \varepsilon)e^F - \eta\bar{\eta}(e^F) > 0, \tag{5}$$

где $\eta, \bar{\eta}$ означают то же, что и в теореме 2.

Тогда имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть компактное кэлерово многообразие M удовлетворяет условиям (3). Если φ — решение уравнения (1) при $m = 1$, то при выполнении условия (5) метрика g с координатами $g_{\alpha\bar{\beta}} = g^0_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}$ положительно определенная.*

С помощью этой теоремы доказываем следующую теорему существования

Теорема 4. *Пусть M - компактное кэлерово многообразие с кэлеровой формой ω_0 и с голоморфной секционной кривизной $K(\sigma)$, удовлетворяющей условиям $1-\varepsilon \leqslant K(\sigma) \leqslant 1, \varepsilon < 1/2$. Чтобы форма $\mu = e^F\omega_0$ являлась формой смешанного объема первого порядка для единственной из того же класса,что и ω_0 кэлеровой формы ω и формы ω_0, достаточно выполнения условий*

$$1) \int\limits_M e^F\omega_0 = \int\limits_M \omega_0,$$

$$2)(\frac{1}{2} - \varepsilon)e^F - \eta\bar{\eta}(e^F) > 0,$$

где η — векторное поле типа $(1,0)$ в окрестности точки z такое, что для $\bar{\eta}$ — комплексно сопряженного векторного поля скалярное произведение $(\eta, \bar{\eta}) = 1$. Неравенство должно выполняться для всех точек $z \in M$ и всех таких векторных полей η. Если $\omega_0, F \in C^{k,\alpha}(M), k \geqslant 2, 0 < \alpha < 1$, то $\omega \in C^{k,\alpha}$, если ω_0 и F вещественно аналитические, то форма ω вещественно аналитическая.

Далее рассматриваем случай, когда многообразие M плоское. Так как любое плоское компактное кэлерово многообразие голоморфно накрывается комплексным тором , то без ограничения общности можно считать, что M комплексный тор, а метрика g^0 евклидова.

Сначала находим достаточные условия для существования нужных априорных оценок решения. Эти условия сформулированы в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть M, g^0 — n-мерный плоский комплексный тор. Пусть φ - решение уравнения* (1) *при* $1 < m < n$. *Тогда, если*

$$\max\left\{\max_M \sqrt{\frac{|\Delta F|}{mn}}, \max_M \frac{|F|}{m-1}\right\} < \frac{\ln \frac{n-1}{n}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m}}{8nL^2V + 3m - 2 - 1/m},$$

где L диаметр, а V объем M, то φ допускает оценку в метрике C^{2,α_0}, $(0 < \alpha_0 < \alpha)$, зависящую только от M , функции F и ее производных до второго порядка.

После этого методом продолжения по параметру доказывается

Теорема 6. *Пусть M — n-мерный плоский комплексный тор с кэлеровой формой ω_0. Чтобы форма $\mu = e^F\omega_0$ являлась формой смешанного объема m-го порядка $(1 < m < n)$ для единственной из того же класса, что и ω_0 кэлеровой формы ω и формы ω_0, достаточно выполнения условий*

1) $\int\limits_M e^F\omega_0 = \int\limits_M \omega_0,$

2) $\varepsilon_t < \dfrac{\ln \frac{n-1}{n}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m}}{8nL^2V + 3m - 2 - 1/m},$

$$\text{где } \varepsilon_t = \max\left\{\max_M \sqrt{\frac{|\Delta \ln(te^F + 1 - t)|}{mn}}, \max_M \frac{|\ln(te^F + 1 - t)|}{m-1}\right\},$$

$t \in [0,1]$, L - диаметр, V - объем многообразия M. Если ω_0, $F \in C^{k,\alpha}(M)$, $k \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$, то $\omega \in C^{k,\alpha}$, если ω_0 и F вещественно аналитические, то форма ω вещественно аналитическая.

Глава 3. Уравнения несобственной выпуклой аффинной сферы

В 1907 году Г. Чичейка рассмотрел очень интересный класс поверхностей — аффинные сферы. Аффинные сферы изучали С. Т. Яу, Ш. Ш. Чжень, Е. Калаби, А. В. Погорелов. В частности, так называемая несобственная выпуклая аффинная сфера в евклидовом пространстве E^{n+1} это полная выпуклая поверхность, которая может быть задана уравнеием

$$x^{n+1} = z(x^1, \cdots, x^n), \quad \text{при} \quad \det(z_{ij}) = 1.$$

В 1954 году К. Ёргенс доказал, что при $n = 2$ всякая несобственная выпуклая аффинная сфера является эллиптическим параболоидом. В 1958 году Е. Калаби распространил этот результат на $n = 3, 4, 5$, а А. В. Погорелов в 1971 году на все n.

Уравнение $\det(z_{ij}) = 1$ можно записать в виде $\sigma_n = 1$, где $\sigma_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ - произведение собственных значений матрицы гессиана (z_{ij}). Естественно поставить вопрос: что можно сказать о полных выпуклых решениях $z(x^1, \ldots, x^n)$ "возмущенного" уравнения

$$\sigma_n = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}), \tag{1}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрические функции от собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы (z_{ij}), то есть σ_k есть сумма всех главных миноров k - го порядка матрицы (z_{ij}), а φ — регулярная функция положительных переменных.

В §§1-5 третьей главы доказывается

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ задана в области $\sigma_k > C_n^k(1-\varepsilon)^{k/n}, k = 1, \ldots, n-1$, принадлежит классу $C^{3,\alpha}, 0 < \alpha < 1$, и удовлетворяет в этой области условиям*

$$1 - \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant 1 + \varepsilon, \tag{2}$$

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_i}\right| \leqslant \varepsilon \frac{\varphi}{\sigma_i}, \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}\right| \leqslant \varepsilon \frac{\varphi}{\sigma_i \sigma_j}, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j \partial \sigma_k}\right| \leqslant \varepsilon \frac{\varphi}{\sigma_i \sigma_j \sigma_k}. \tag{5}$$

где $i, j, k = 1, \ldots, n-1$, *а* $\varepsilon < \dfrac{1}{1210(n-1)^2(n+3)n^6}$. *Тогда всякое полное* ***выпуклое решение*** $z(x^1, \ldots, x^n)$ ***уравнения*** (1) ***является квадратичным*** *полиномом.*

Доказательство этой теоремы состоит из следующих этапов.

В §2 доказывается существование априорной C^2 – оценки выпуклого решения уравнения (1) в ограниченной области.

В §3 из геометрических соображений доказывается, что можно получить глобальные оценки сверху для вторых производных выпуклого решения уравнения (1). Тогда, если выпуклое решение уравнения (1) полное, то оно задано на всей плоскости $x^{n+1} = 0$.

В §4 на плоскости $x^{n+1} = 0$ вводится метрика с контравариантными координатами метрического тензора $g^{ij} = \dfrac{\partial(\sigma_n - \varphi)}{\partial z_{ij}}$. Из оценок §3 получается, что эта метрика положительно определенная и полная. Из третьих производных z_{ijk} функции z строится аффинный инвариант $P = g^{ai}g^{bj}g^{ck}z_{ijk}z_{abc}$. Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что $P \equiv 0$.

Доказано, что в области где $P \neq 0$, выполняется неравенство

$$\Delta\sqrt{P} \geqslant AP^{3/2} - \frac{n|\mathrm{grad}\sqrt{P}|^2}{\delta P^{1/2}} \tag{6}$$

с любым $\delta > 0$. Здесь Δ – оператор Лапласа-Бельтрами относительно введенной метрики, модуль градиента вычисляется для той же метрики.

$$A = \frac{n+1}{4n(n-1)} - (72n^7 + 1167n^6 + 81\delta n^2)\varepsilon_1 - 230,5n^6\varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_1 = (n-1)\varepsilon, \quad \varepsilon_2 = (n-1)^2\varepsilon.$$

В §5 исследуется неравенство (6). Пусть выполнено условие.

$$\varepsilon < \frac{1}{1210(n-1)^2(n+3)n^6}.$$

Тогда, если существует точка O, в которой $P(O) > 0$, то на конечном расстоянии от нее найдется точка O_1, для которой $\lim\limits_{x \to O_1} P(x) = +\infty$. Это противоречит полноте введенной метрики. Теорема 1 доказана.

В §6 рассматривается еще один аналог для уравнения несобственной выпуклой аффинной сферы. Возникает естественный вопрос: что можно сказать о полных выпуклых решениях уравнения

$$\mathrm{spur}_m(z_{ij}) = 1, \tag{7}$$

где в левой части стоит сумма всех главных миноров m-го порядка $(2 \leqslant m < n)$ матрицы из вторых производных функции $z(x^1, \ldots, x^n)$? Здесь нельзя, конечно, надеяться доказать, что графиком решения всегда будет эллиптический параболоид. Например, уравнение цилиндра $z = \frac{1}{2}(x^{1^2} + \cdots + x^{m^2})$ является решением уравнения (7). Поэтому на функцию $z(x^1, \ldots, x^n)$ накладываются дополнительные ограничения. Обозначим через $\lambda_(x), \ldots, \lambda_n(x)$ собственные значения матрицы гессиана (z_{ij}) в точке x. Пусть существует такая константа e, что для всех точек x и всех i, j выполняется условие

$$\frac{\tilde{\lambda}_i(x)}{\tilde{\lambda}_j(x)} \leqslant 1 + e \tag{8}$$

Обозначим

$$A_1(n, m, e) = \frac{c^2(n+1)}{4n(n-1)} - c^2((1+e)^m - 1)\Big(9n^7(1+e)^{6m} + \\ +20(n-1)n^5(1+e)^{7m-2} + \frac{201}{4}n^6(n-1)(1+e)^{12(m-1)}\Big) - \\ -\frac{5c^2(n-1)^3(m-2)n^5(1+e)^{8m-3}((1+e)^{3m-1} - 1)}{(m-1)(n-2)}, \tag{9}$$

где $c = \dfrac{C_{n-2}^{m-2}}{(C_{n-1}^{m-1})^2}$.

По такой же схеме, что и теорема 1 доказывается

Теорема 3. *Всякое полное выпуклое решение уравнения* (7), *удовлетворяющее условию* (8) *с таким* e, *что* $A_1(n, m, e) > 0$, $\left(e < \dfrac{1}{272mn^8}\right)$ *является квадратичным полиномом.*

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ

1. Кокарев В.Н. Условно минимальные поверхности// Сиб. мат. ж. - 1985. - Т. 26, № 2. - С. 220.

2. Кокарев В.Н. Нормальный образ полной условно минимальной поверхности// Матем. сб. - 1992. - Т. 183, № 2 - С. 112 - 120.

3. Кокарев В.Н. О полных выпуклых решениях уравнения $\mathrm{spur}_m(z_{ij}) = 1$// Математическая физика, анализ, геометрия. - 1996. - Т. 3, № 1/2. - С. 102 - 117.

4. Кокарев В.Н. Об уравнении несобственной аффинной сферы: обобщение теоремы Ёргенса// Матем. сб. , 2003. - Т. 194, № 11. - С. 65 - 80.
5. Kokarev V.N. On Complete Convex Solutions of Equations Similar to the Improper Affine Sphere Equation// J. of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. - 2007. - V. 3, № 4. - P. 448 - 467.
6. Кокарев В.Н. Точная оценка радиуса нормальной кривизны замкнутой выпуклой поверхности// Вестник Самарского государственного университета. - Самара: 2009. - Т. 68, № 2. - С. 33 - 50.
7. Кокарев В.Н. Смешанные формы объема и комплексное уравнение типа Монжа-Ампера на торе// Вестник Самарского государственного университета. - Самара: 2009. - Т. 74, № 8. - С. 35 - 43.
8. Кокарев В.Н. Смешанные формы объема и комплексное уравнение типа Монжа-Ампера на кэлеровых многообразиях положительной кривизны// Известия РАН. Серия математическая, 2010. - Т. 74, № 3. - С. 65 -78.

Статьи в прочих изданиях

9. Кокарев В.Н. Оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности в E^{n+1} по второй элементарной симметрической функции ее условных радиусов кривизны// Украинский геометрический сборник. - 1980. - Вып. 23. - С. 65 - 74.
10. Кокарев В.Н. Априорная оценка радиуса нормальной кривизны замкнутой выпуклой поверхности с заданной функцией условных радиусов кривизны// Восьмая Всесоюзная научная конференция по современным проблемам дифференциальной геометрии. Тезисы докладов. - Одесса: 1984. - С. 74.
11. Кокарев В.Н. Оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности с заданной функцией условных радиусов кривизны// Украинский геометрический сборник. - 1986. - Вып. 29. - С. 82 - 92.
12. Кокарев В.Н. Об обобщении проблемы Минковского// Всесоюзная научная конференция "Классические и неклассические краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, специальные функции, интегральные уравнения и их приложения. Тезисы докладов. - Куйбышев: 1987. - С. 81 - 82.
13. Кокарев В.Н. Условная площадь и условно минимальные поверхности// Всесоюзная конференция по геометрии "в целом." Тезисы докладов. - Новосибирск: 1987. - С. 61.

14. Кокарев В.Н. Оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности с заданной элементарной симметрической функцией условных радиусов кривизны// Исследования по теории поверхностей в многообразиях знакопостоянной кривизны. - Ленинград: 1987. - С. 28 - 37.
15. Кокарев В.Н. Оценки главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности по функциям ее условных радиусов кривизны// Украинский геометрический сборник. - 1988. - Вып. 31. - С. 62 - 73.
16. Кокарев В.Н. Замкнутые выпуклые поверхности с заданными функциями условных радиусов кривизны// IX Всесоюзная геометрическая конференция. Тезисы докладов. - Кишинев: 1988. - С. 156 - 157.
17. Кокарев В.Н. Обобщение проблемы Калаби// Международный геометрический семинар имени Н. И. Лобачевского "Современная геометрия и теория физических полей". Тезисы докладов. - Казань: 1997. - С. 68.
18. Кокарев В.Н. Обобщение теоремы Калаби-Погорелова// Труды участников Международной школы – семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. - Ростов-на-Дону: 2002. - С. 33 - 34.
19. Кокарев В.Н. Комплексное уравнение Монжа-Ампера в $\mathbb{C}^n$// Геометрия "в целом". Преподавание геометрии в вузе и школе. Материалы Всерос. науч.-метод. конф. - Великий Новгород, 2004. - С. 45 - 46.
20. Кокарев В.Н. Смешанные формы объема и комплексное уравнение Монжа-Ампера на кэлеровых многообразиях положительной кривизны// Международная конференция "Геометрия в Одессе – 2007". Тезисы докладов. - Одесса: 2007. - С. 63 - 64.
21. Кокарев В.Н. Нелинейные эллиптические уравнения на кэлеровых многообразиях положительной кривизны// Труды участников Международной школы – семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. - Ростов-на-Дону: 2008. - С. 227 - 228.
22. Кокарев В.Н. Комплексное уравнение типа Монжа–Ампера на торе// Международная конференция "Геометрия в Одессе – 2009". Тезисы докладов. - Одесса: 2009. - С. 50.

10 г

Подписано в печать 18 мая 2010 г.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная.

Объем 1,25 печ. л. Тираж 100 экз. Заказ №1857

г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Отпечатано УОП СамГУ