*На правах рукописи*

Додонов Артур Евгеньевич

# Интегральные оценки наипростейших дробей и экспоненциальных сумм

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань — 2016

Работа выполнена на кафедре «Функциональный анализ и его приложения» ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук,<br>профессор<br>**Данченко Владимир Ильич** |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»<br>**Лукашов Алексей Леонидович**<br>кандидат физико-математических наук,<br>доцент ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет»<br>**Шакиров Искандер Асгатович** |
| Ведущая организация: | Гродненский государственный университет<br>имени Янки Купалы |

Защита диссертации состоится 20 октября 2016 г. в 17 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан «___» ___________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е. К. Липачёв

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Диссертация посвящена некоторым задачам теории рациональных аппроксимаций, связанным с наипростейшими дробями (н. д.) и экспоненциальными суммами. Она состоит из двух глав. В первой главе изучаются аппроксимативные и экстремальные свойства наипростейших дробей: сходимость рядов н. д. и представление такими рядами аналитических функций, неравенства разных метрик и оценки производных н. д. Во второй главе получаются оценки тригонометрических сумм и квазимногочленов через нормы специальных ассоциированных рациональных функций и даются приложения оценок к оценкам скорости роста решений линейных дифференциальных уравнений.

Приведем краткую историю и современное состояние задач, рассматриваемых в первой главе.

По предложению Е. П. Долженко (2000 г.) н. д. порядка не выше $n \in \mathbb{N}_0$ от комплексного переменного $z$ в теории рациональных аппроксимаций называется логарифмическая производная комплексного многочлена степени не выше $n$, т. е. рациональная функция вида

$$\rho_0(z) \equiv 0, \qquad \rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k = x_k + iy_k \in \overline{\mathbb{C}}, \tag{1}$$

где некоторые точки $z_k$ могут совпадать, допускаются случаи $z_k = \infty$ и при этом соответствующие слагаемые $(z - z_k)^{-1}$ полагаются тождественно равными нулю.

Первые задачи экстремального характера, связанные с наипростейшими дробями, восходят к работам Дж. Буля[1], А. Макинтайра и У. Фукса[2]. Наиболее известной задачей является задача об минимальном покрытии картановского типа полюсов н. д. с одновременной оценкой sup-норм н. д. вне этих покрытий.

[1] Boole G. On the comparison of transcendents, with certain applications to the theory of definite integrals // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. Pp. 745–803.

[2] Macintyre A. J., Fuchs W. H. J. Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial // Journal of London Mathematical Society. 1940. Vol. 15. №2. Pp. 162–168.

Различные модификации покрытий Картана для рациональных функций общего вида получались в работах А. А. Гончара[3], Е. П. Долженко[4]. На таких конструкциях основаны их основополагающие обратные теоремы теории рациональных аппроксимаций.

Вопросы, связанные с аппроксимацией н. дробями, возникли благодаря известной проблеме Е. А. Горина[5] об оценке величин

$$d_n(\mathbb{R}, p) = \inf_{\rho_n}\{\min_k |\operatorname{Im} z_k| \cdot \|\rho_n\|_p^q\}, \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

где точная нижняя грань берется по всем н. д. вида (1), не имеющим полюсов на $\mathbb{R}$. Здесь и всюду далее через $\|f\|_p$ обозначается норма $f$ в $L_p(\mathbb{R})$. Задачу Горина можно интерпретировать как задачу о величине наилучшего приближения нуля (наименьшего уклонения от нуля) в метрике $L_p(\mathbb{R})$ в классе н. д. (1), имеющих общий закрепленный полюс (например, в точке $z = i$).

В случае $p = \infty$ оценка наименьших уклонений $d_n(\mathbb{R}, \infty)$ была получена в 1994 году[6] в виде слабой асимптотики: $d_n(\mathbb{R}, \infty) \asymp \ln\ln n / \ln n$.

Естественным образом возникла задача о распространении аппроксимаций с нулевых функций на $\mathbb{R}$ на более общие непрерывные функции и множества на $\mathbb{C}$, но уже без условия закрепленности полюсов. Независимо задача об аппроксимации возникла в работах Дж. Кореваара[7], Ч. Чуи и К. Шена[8], где был получен аналог теоремы Рунге об аппроксимации в равномерных и весовых интегральных метриках Бергмана наипростейшими дробями с предписанными множествами полюсов.

---

[3]Гончар А. А. О наилучших приближениях рациональными функциями // Доклады АН СССР. 1955. Т. 100, №2. С. 205–208.

[4]Долженко Е. П. Оценки производных рациональных функций // Известия АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27. №1. С. 9–28.

[5]Горин Е. А. Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3, №5. С. 506–508.

[6]Данченко В. И. Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Математический сборник. 1994. Т. 185, №8. С. 63–80.

[7]Korevaar J. Asymptotically neutral distributions of electrons and polynomial approximation // Annals of Mathematics. 1964. Vol. 80. Pp. 403–410.

[8]Chui C. K., Shen X. C. Order of approximation by electrostatic fields due to electrons // Constructive Approximation. 1985. Vol. 1, №1. Pp. 121–135.

Аппроксимация посредством н. д. на плоскости $\mathbb{C}$ имеет важный физический смысл: н. д. задают плоские поля, создаваемые равновеликими источниками $z_k$, поэтому аппроксимацию можно интерпретировать как задачу о размещении источников $z_k$, приближенно создающих такие поля.

Первый результат об аппроксимации наипростейшими дробями со *свободными* полюсами был получен в 1999 году[9]. Был доказан точный аналог полиномиальной теоремы С. Н. Мергеляна:

*Пусть $K$ — компакт на $\mathbb{C}$, имеющий связное дополнение. Тогда любая функция, непрерывная на $K$ и аналитическая во внутренних точках $K$, может быть равномерно с любой точностью приближена на $K$ наипростейшими дробями.*

Естественным образом возникли традиционные для конструктивной теории функций задачи: прямые и обратные теоремы, связывающие скорость аппроксимации наипростейшими дробями и гладкостные свойства приближаемых функций. В этом направлении первые существенные результаты получил О. Н. Косухин[10]. Важнейший его результат состоит в том, что для широкого класса функций $f$ и компактов $K$ наилучшие равномерные приближения $\mathcal{R}_n(f,K)$ и $E_n(f,K)$ наипростейшими дробями и многочленами порядка не выше $n$ слабо эквивалентны:

$$\mathcal{R}_n(f,K) \asymp E_n(f,K). \qquad (2)$$

Благодаря этому результату О. Н. Косухин[11] получил ряд аналогов классических полиномиальных теорем Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, А. Зигмунда, В. К. Дзядыка и Дж. Л. Уолша в терминах скорости убывания $\mathcal{R}_n(f,K)$. Даль-

[9] Данченко В. И., Данченко Д. Я. О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы школы-конференции, посвященной 130-летию Д. Ф. Егорова (Казань, 1999). Казань, 1999. С. 74–77.

Данченко В. И., Данченко Д. Я. О приближении наипростейшими дробями // Математические заметки. 2001. Т. 70. №4. С. 553–559.

[10] Косухин О. Н. Об аппроксимативных свойствах наипростейших дробей // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. Вып. 4. С. 54–58.

[11] Косухин О. Н. О некоторых нетрадиционных методах приближения, связанных с комплексными полиномами: Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2005.

нейшее развитие теория получила в работах Я. В. Новака[12]. В частности, он распространил слабую эквивалентность (2) на пространства $L_p$ и получил ряд локальных теорем бернштейновского типа, связывающих локальную скорость приближения посредством н. д. и гладкость приближаемой функции.

Эти и другие результаты О. Н. Косухина и Я. В. Новака показывают, что в ряде задач аппроксимации на ограниченных множествах аппроксимативные свойства н. д. и полиномов почти идентичны, а соответствующие теоремы формулируются почти дословно. Тем не менее, в дальнейшем были обнаружены и принципиальные различия аппроксимаций наипростейшими дробями и многочленами. Собственно, именно эти различия и вызывают интерес к дальнейшему изучению н. д. как аппарата приближений.

Так, для вещественных н. д. альтернанс, вообще говоря, никак не связан с наилучшим приближением, а н. д. наилучшего приближения может быть неединственной[13].

К важным отличиям можно отнести также возможность приближения посредством н. д. на неограниченных множествах; например, любую непрерывную функцию с нулевым пределом на бесконечности можно с любой точностью приблизить в равномерной метрике на $\mathbb{R}$ (П. А. Бородин и О. Н. Косухин[14]).

Этот результат дополнил В. Ю. Протасов[15], рассмотрев аппроксимации в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Сформулируем один его результат, инициировавший ряд задач данной диссертации. Сначала введем обозначение. Сходимость в $L_p(\mathbb{R})$ бесконечной н. д., частичными суммами которой являются н. д. (1), к некоторой

[12] Новак Я. В. О наилучшем локальном приближении наипростейшими дробями // Математические заметки. 2008. Т. 84, №6. С. 882–887.

[13] Данченко В. И., Кондакова Е. Н. Чебышевский альтернанс при аппроксимации констант наипростейшими дробями // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2010. Т. 270. С. 86–96.

Komarov M. A. Examples related to best approximation by simple partial fractions // Journal of Mathematical Sciences. 2012. Vol. 184. №4. Pp. 509–523.

Комаров М. А. О неединственности наипростейшей дроби наилучшего равномерного приближения // Известия вузов. Математика. 2013. Т. 9. С. 28–37.

[14] Бородин П. А., Косухин О. Н. О приближении наипростейшими дробями на действительной оси // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. Вып. 1. С. 3–8.

[15] Протасов В. Ю. Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Известия РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, №2. С. 123–140.

функции $\rho(x) \in L_p(\mathbb{R})$ будем записывать в виде

$$\rho(x) \overset{p}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x - z_k} \qquad \text{или} \qquad \rho_n \xrightarrow{p} \rho, \qquad z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{3}$$

**Теорема.** *Любая функция $f$, аппроксимируемая с любой точностью в $L_p(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями, является аналитической на $\mathbb{R}$, продолжается до мероморфной на $\mathbb{C}$ функции с полюсами $z_k$ и представляется в виде предела $\rho_n \xrightarrow{p} f$. При этом для показателя сходимости последовательности $\{z_k\}$ необходимо условие*

$$\tau(\{z_k\}) := \inf \left\{ \gamma > 0 \, : \, \sum_k |z_k|^{-\gamma} < \infty \right\} \le \frac{1}{q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4}$$

Таким образом, в случае конечных $p$ класс аппроксимируемых функций значительно сужается по сравнению со случаем $p = \infty$ и состоит из тех и только тех функций, которые представляются в виде сходящихся к ним рядов (3).

Возникает интерес к исследованию сходимости рядов н. д. как самостоятельной задаче. В. Ю. Протасовым сформулирована задача: уточнить необходимое для (3) условие (4) и получить более содержательные количественные признаки сходимости рядов в терминах полюсов $z_k$. Первый результат по этой задаче методом двойственности был получен В. И. Данченко[16].

**Теорема.** *Выполнение* (3) *при $z_k \in \mathbb{C}^+$ равносильно условию*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} g(z_k) \right| \leqslant A(p, \{z_k\}) \|g\|_{H_q} \quad \forall n, \tag{5}$$

*где $g$ — произвольная аналитическая функция класса Харди $H_q(\mathbb{C}^+)$.*

С помощью выбора специальных пробных функций $g$ из (5) получается необходимое уточняющее (4) условие сходимости (3):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q+\varepsilon}} \leqslant \frac{A}{\varepsilon^{1/q}}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{6}$$

[16] Данченко В. И. О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Математический сборник. 2010. Т. 201, №7. С. 53–66.

где $A$ зависит только от $p$ и нормы $\|\rho\|_p$.

Дальнейшие исследования рядов н. д. были предприняты И. Р. Каюмовым и А. В. Каюмовой. Например, И. Р. Каюмов[17] доказал следующее утверждение.

**Теорема.** *Если выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1}|y_k|^{1-p} < \infty, \qquad y_k = \operatorname{Im} z_k, \tag{7}$$

*то* $\rho_n \xrightarrow{p} \rho$. *Обратно, если* $\rho_n \xrightarrow{p} \rho$, *последовательность* $|y_k|$ *упорядочена по возрастанию и все* $z_k$ *лежат в некотором угле* $\{z : |z| \leqslant \alpha|\operatorname{Im} z|\}$, $\alpha > 0$, *то выполнено условие* (7).

Все приведенные результаты о сходимости (3) опираются главным образом на оценки $L_p$-норм наипростейших дробей. Такие неравенства можно условно разделить на два типа.

Оценки первого типа явно зависят от расположения полюсов $z_k$.

Оценки второго типа — оценки $L_p$-норм н. д. через их $L_r$-нормы. Такие оценки называют неравенствами разных метрик или неравенствами Джексона — Никольского; они хорошо известны для алгебраических и тригонометрических многочленов. Для н. д. неравенства разных метрик являются сравнительно новой тематикой. Насколько нам известно, первое такое неравенство было получено в 1994 году В. И. Данченко. Оно имеет вид

$$\|\rho_n\|_\infty \leqslant \beta_p \cdot \|\rho_n\|_p^q, \qquad \beta_p := 2p\sin^{-q}(\pi/p), \qquad p > 1. \tag{8}$$

В настоящее время известно несколько неравенств, обобщающих (8), некоторые принадлежат диссертанту.

Перейдем к тематике второй главы. Во второй главе получаются равномерные оценки на $\mathbb{R}$ квазимногочленов и их частного случая — тригонометри-

[17] Каюмов И. Р. Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Математический сборник. 2011. Т. 202, №10. С. 87–98.

Каюмов И. Р. Необходимое условие сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Математические заметки. 2012. Т. 92, №1. С. 149–152.

ческих комплексных полиномов, имеющих соответственно вид

$$\Omega(n;x) = \sum_{k=1}^{n} T_k(x) e^{iz_k x}, \qquad \Omega_0(n;x) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{iz_k x}, \tag{9}$$

где $z_k \in \mathbb{C}^+$, $T_k(x)$ — алгебраические многочлены, $A_k$ — комплексные числа, через специальные *ассоциированные* с (9) рациональные функции $R$. Первая такая оценка в частном случае была получена В. И. Данченко[18]:

$$|\Omega_0(n;x)| \le \frac{n}{x} \left\| \operatorname{Re} R \right\|_\infty, \qquad \text{где} \qquad R(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - z_k}. \tag{10}$$

Возникла задача распространения неравенства (10) на случай (9) квазимногочленов с привлечением ассоциированных рациональных функций более обшего вида $R(z) = R_1(z) + R_2(z)$, где

$$R_1(z) = \frac{P_1(z)}{\chi(z)}, \qquad R_2(z) = \frac{P_2(z)}{\overline{\chi(\overline{z})}}, \qquad \chi(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{s_k}, \quad s_k \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

а $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — определенные многочлены степени, не большей $s_1 + \ldots + s_n$.

Оценки рассматриваемого типа тесно связаны с оценками производных рациональных функций посредством специальных переменных мажорант и хорошо известны в теории рациональных аппроксимаций. Это неравенства С. Н. Бернштейна, В. С. Виденского[19], В. Н. Русака[20], Г. Сегё, Н. И. Ахиезера, Б. Я. Левина, А. А. Пекарского.

**Цель работы.** Целью данной работы являются:

1. Интегральные оценки для наипростейших дробей в виде неравенств типа Джексона — Никольского, а также неравенств, явно зависящих от расположения полюсов.

2. Исследование сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$, доказательство в терминах их полюсов критерия и неулучшаемого по порядку необходимого условия сходимости.

---

[18]Данченко В. И. Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы // Математический сборник. 2006. Т. 197. №4. С. 33–52.

[19]Виденский В. С. Некоторые оценки производных от рациональных дробей // Известия АН СССР. Серия математическая. 1962. Т. 26. №3. С. 415–426.

[20]Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Издательство БГУ, 1979.

3. Получение новой экстремальной оценки типа Бернштейна — Виденского — Русака для производных рациональных функций.

4. Оценки экспоненциально-алгебраических квазимногочленов и, в частности, тригонометрических сумм с использованием метода сравнения с ассоциированными рациональными функциями; приложение этих неравенств к оценке скорости убывания решений линейных дифференциальных уравнений.

**Методы исследования.** Классические методы комплексного и функционального анализа, теории рациональных аппроксимаций, а также современные методы, разработанные в теории наипростейших дробей.

**Научная новизна.** Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Получены новые неравенства разных метрик типа Джексона — Никольского для наипростейших дробей на ограниченных и неограниченных промежутках действительной оси.

2. Получено близкое к окончательному необходимое условие сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$, улучшающее предшествующие результаты других авторов по данной тематике.

3. Получен критерий сходимости бесконечной наипростейшей дроби в $L_p(\mathbb{R})$ в случае $1 < p < 2$ при условии, что все ее полюсы лежат в неразвернутом угле, раположенном в верхней открытой комплексной полуплоскости с вершиной на действительной оси.

4. Получена новая имеющая экстремальный характер оценка типа Бернштейна — Виденского — Русака для производных рациональных функций.

5. Получены оценки экспоненциальных и, в частности, тригонометрических сумм через нормы ассоциированных рациональных функций и приведены примеры, показывающие, что эти оценки существенно учитывают «интерференцию» гармоник.

**Практическая и теоретическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Все основные результаты имеют строгие математические доказательства. Результаты работы могут найти приложения в теории поля, теории рациональных приближений, численных методах и будут полезны при чтении специальных курсов для студентов математических, естественнонаучных и инженерных специальностей университетов.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях: Воронежская зимняя школа «Современные методы теории функций и смежные вопросы» (Воронеж, 2011, 2013); Петрозаводская международная конференция «Комплексный анализ и приложения» (Петрозаводск, 2012, 2014); XII Казанская летняя школа по теории функций, ее приложениям и смежным вопросам (Казань, 2015); научный семинар под руководством д.ф.-м.н., проф. М. С. Беспалова, А. А. Давыдова и В. И. Данченко (Владимир, 2011–2016); научный семинар под руководством д.ф.-м.н., проф. Е. П. Долженко (Москва, 2012).

**Публикации автора.** По теме диссертации опубликовано *10* научных работ, *три* из которых — в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертации.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация включает в себя *введение*, *две главы*, разделенные на параграфы, *заключение* и *список литературы*. Общий объем диссертации — 88 страниц; список литературы содержит 53 библиографические ссылки.

## Основное содержание работы

Во *введении* обосновывается актуальность рассматриваемых вопросов, приводится их история.

*Глава 1* посвящена исследованию сходимости рядов н. д. в $L_p(\mathbb{R})$ и к получению $L_p$-оценок их частичных сумм.

Доказана следующая оценка первого типа снизу для норм н. д., она же является необходимым условием сходимости ряда (3).

**Теорема 1 [1, 10].** *Пусть* $1 < p < \infty$, $\varepsilon > 0$, $\alpha = (1+\varepsilon)/q$, $\tilde{\alpha} = 1/p - \delta$ *и* $\delta \in (0, 1/p)$. *Из сходимости* (3) *следует*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q} \ln^{\alpha}(|z_k|+1)} \le \frac{A(p, \|\rho\|_p)}{\varepsilon^{1/q}}. \tag{12}$$

*Это условие при* $2 \leqslant p < 3$ *нельзя усилить заменой* $\alpha$ *на* $\tilde{\alpha}$. *Именно, существует такая бесконечная наипростейшая дробь, для которой ряд* (12) *с заменой* $\alpha$ *на* $\tilde{\alpha}$ *расходится. Отметим, что* $\alpha - \tilde{\alpha} \to \varepsilon/2 - \delta$ *при* $p \searrow 2$.

Теорема 1, очевидно, улучшает в части необходимости теорему В. Ю. Протасова (4) и оценку В. И. Данченко (6).

В первой главе получены также критерии сходимости (3) в терминах полюсов, но при дополнительном ограничении на их расположение. Приведем один такой результат. Пусть $V_\alpha = \{z : |z| \leqslant \alpha |\operatorname{Im} z|\}$, $\alpha > 0$.

**Теорема 2 [1].** *Пусть* $\{z_k\} \subset V_\alpha \cap \mathbb{C}^+$. *Тогда при* $1 < p < 2$ *сходимость* (3) *эквивалентна выполнению следующего условия:*

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{y_k + y_j} \right)^{p-1} \leqslant A(p, \|\rho\|_p) < \infty \quad \forall n. \tag{13}$$

Отметим, что критерий теоремы 2 имеет несколько другой вид, чем критерий И. Р. Каюмова (7), однако при условии упорядоченности $y_k$ по возрастанию из (13) можно получить критерий и в форме (7).

Перейдем к оценкам второго типа, т. е. неравенствам разных метрик. Следующее неравенство обобщает (8).

**Теорема 3 [2].** *При* $1 < r < p \leq \infty$ *имеем неравенство*

$$\|\rho_n\|_p^q \leq A(p,r)\, \|\rho_n\|_r^s, \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad r^{-1} + s^{-1} = 1. \tag{14}$$

*При* $z_k \in \mathbb{C}^+$ *неравенство* (14) *можно уточнить и дополнить, а именно получить явное значение* $A(p,r) = \beta_r^{(p-r)/(p-1)}$ *и двустороннее неравенство*

$$(2n)^{-1}\, \|\rho_n\|_2^2 < \pi\, \|\rho_n\|_\infty < 2\, \|\rho_n\|_2^2,$$

*где множители* $2^{-1}$ *и* 2 *нельзя заменить единицами.*

В следующей теореме снимаются ограничения на соотношение между $p$ и $r$, а нормы вычисляются на произвольных ограниченных и неограниченных измеримых подмножествах вещественной прямой.

**Теорема 4 [2].** *Пусть* $z_k \in \mathbb{C}^+$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 < r < \infty$, $E$ *— произвольный ограниченный или неограниченный промежуток на* $\mathbb{R}$. *Тогда*

$$\|\rho_n\|^q_{L_p(E)} \leq A(p) \cdot n^{q/p} \, \|\rho_n\|_{L_\infty(E)}, \qquad \|\rho_n\|^q_p \leq A(p,r) \, n^{q/p} \, \|\rho_n\|^s_r. \tag{15}$$

*В первом неравенстве в* (15) *порядок множителя* $n^{q/p}$ *является точным.*

Приведем еще одну оценку нормы, в определенном смысле противоположную первому неравенству в (15) для конечных промежутков.

**Теорема 5 [2].** *Пусть н. д.* $\rho_n$ *вещественнозначна на* $\mathbb{R}$ *и ее модуль на отрезке* $[-1,1]$ *не превосходит* 1. *Тогда при любом* $r > 0$ *имеем*

$$\|\rho_n\|_{L_\infty[-1,1]} \leqslant A(r) n^{2/r} \, \|\rho_n\|_{L_r[-1,1]}. \tag{16}$$

*Оценка точна по порядку* $n$ *в том смысле, что при* $r > 2$ *существует н. д., удовлетворяющая условиям теоремы, для которой справедливо противоположное* (16) *неравенство с другой величиной* $A(r) > 0$.

Отметим, что хотя по форме неравенство (16) сходно с неравенством Джексона для многочленов, здесь a priori накладывается условие на величину модуля $\rho_n$. Это условие по существу и связано оно с несовпадением «размерностей» левой и правой частей: левая часть стремится к $\infty$ быстрее, чем правая, если один из полюсов н. д. $\rho_n$ устремить к отрезку.

*Вторая глава* посвящена равномерным оценкам на $\mathbb{R}$ квазимногочленов и тригонометрических комплексных полиномов. Приведем одну наиболее простую по форме оценку тригонометрического многочлена посредством действительной части ассоциированной функции.

**Теорема 6 [1].** *При* $x > 0$ *имеем*

$$|\Omega_0(n;x)| \leq n \inf_{s\in\mathbb{N}} \left( \frac{s!}{x^s} \, \|\mathrm{Re}\, R_1\|_\infty \right), \qquad R_1(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(z-z_k)^s}. \tag{17}$$

Этот результат обобщает аналогичную оценку (10) и далее распространяется на квазимногочлены (9). Оценки для квазимногочленов формально сохраняют тот же вид, но имеют ряд технических усложнений, поэтому здесь не приводятся.

Во второй главе нами рассматривается также вопрос о точности полученных оценок тригнометрических сумм. Например, показано что оценка (17) в значительной мере учитывает не только амплитуды, но и «интерференцию» гармонических слагаемых суммы $\Omega_0$. В частности, доказано следующее

**Предложение [1].** *Существуют отрезок* $[x_0, x_1]$, $0 < x_0 < x_1 < \infty$, *и такая тригонометрическая сумма* $\tilde{\Omega}_0(n; x)$, *что сумма ее амплитуд имеет порядок* $n$, *а мажоранта в* (17) — *только* $\ln^2 n$ *равномерно при всех* $x \in [x_0, x_1]$.

Как правило, оценки ассоциированных функций, на которые опираются неравенства типа (17), непосредственно через частоты $z_k$ и амплитуды $A_k$ весьма трудоемки. Во второй главе предлагается построение ассоциированных функций через «начальные условия» $\Omega_0^{(j)}(0) = \omega_j$, $j = \overline{0, n-1}$. Сформулируем соответствующий результат.

**Теорема 7 [1].** *При* $x > 0$ *имеет место оценка*

$$|\Omega_0(x)| \leq \frac{n}{x} \| \operatorname{Im} R_0(iy) \|_\infty, \qquad R_0(\zeta) = \frac{1}{P(\zeta)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} p_{n-j} \omega_{k-1-j} \zeta^{n-k}, \tag{18}$$

*где* $P(\zeta) = \zeta^n + p_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + p_0$ — *многочлен с корнями* $iz_k$, $k = \overline{1, n}$.

Если, например, все $\omega_j = 0$, кроме $\omega_{n-1}$, то $R_0(\zeta) = \omega_{n-1}/P(\zeta)$.

В качестве приложения теоремы 7 получена оценка решения линейного однородного дифференциального уравнения $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0 y_0 = 0$ с устойчивым характеристическим многочленом вида $P$ с простыми корнями и начальными условиями $y^{(j)}(0) = \omega_j$, $j = \overline{0, n-1}$. Именно, доказана оценка (18) с заменой $\Omega_0$ на $y$. Отметим, что корни характеристического многочлена не входят явно в правую часть оценки (18). Поэтому, используя непрерывность зависимости решения задачи Коши от коэффициентов характеристического многочлена, можно устранить условие простоты этих корней.

Для развития техники оценок квазимногочленов нами получено новое неравенство типа Бернштейна — Виденского — Русака. Оно опирается на известный результат В. Н. Русака и обобщает его с класса вещественнозначных на $\mathbb{R}$ рациональных функций на рациональные функции общего вида. Сформулируем соответствующий результат.

**Теорема 8 [9].** *При любых вещественных $x$, $\alpha$ для рациональных функций вида* (11) *имеет место точное* (*экстремальное*) *неравенство*

$$\left|R_1'(x)e^{-i\alpha} + R_2'(x)e^{i\alpha}\right| \le \mu(x)\|R\|_\infty, \qquad \mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2s_k \operatorname{Im} z_k}{|x - z_k|^2}. \tag{19}$$

Под экстремальностью мы понимаем, что существуют рациональная функция $R = R_1 + R_2$, для которой (19) обращается в равенство.

## Заключение

В диссертации изучаются некоторые аппроксимативные и экстремальные свойства наипростейших дробей и экспоненциальных сумм.

В первой главе диссертации получены критерий и близкое к окончательному необходимое условие сходимости в $L_p(\mathbb{R})$ рядов наипростейших дробей. Параллельно разработана техника получения оценок $L_p$-норм наипростейших дробей на ограниченных и неограниченных промежутках вещественной оси. Основы теории рядов наипростейших дробей возникли не более десяти лет назад и она активно развивается многими современными авторами. Вследствие этого большинство методов, используемых в диссертации, являются новыми.

Во второй главе получено новое экстремальное неравенство типа Бернштейна — Виденского — Русака для производных рациональных функций комплексного переменного и применено к оценкам экспоненциальных сумм. Такого рода экстремальные оценки имеют большую историю, они весьма востребованы в теории приближений и актуальны по сей день: ими занимаются многие отечественные и зарубежные авторы.

## Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

*Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследований*

[1] Danchenko V. I. *Estimates for Exponential Sums. Applications* / Danchenko V. I., Dodonov A. E. // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — Vol. 188, №3. — Pp. 197–206.

[2] Данченко В. И. *Оценки $L_p$-норм наипростейших дробей* / Данченко В. И., Додонов А. Е. // Известия вузов. Математика. — 2014. — Т. 6. — С. 9–19.

[3] Dodonov A. E. *On Convergence of Series of Simple Partial Fractions in $L_p(\mathbb{R})$* / Dodonov A. E. // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 210., №5. — Pp. 648–653.

*Публикации в других изданиях*

[4] Данченко В. И. *Оценка скорости убывания решения линейного однородного дифференциального уравнения* / Данченко В. И., Додонов А. Е. // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. — Воронеж: Издательство Воронежского государственного университета, 2011. — С. 114–115.

[5] Данченко В. И. *Об оценках экспоненциальных сумм* / Данченко В. И., Додонов А. Е. // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2012): Тезисы докладов. — М.: МИАН, 2012. — С. 61–62.

[6] Додонов А. Е. *Оценка решения однородного дифференциального уравнения Эйлера* / Додонов А. Е. // Комплексный анализ и его приложения: тезисы VI Петрозаводской международной конференции. — Петрозаводск: Петрозаводский государственный университет, 2012. — С. 16–19.

[7] Данченко В. И. *Оценки $L_p$-норм наипростейших дробей* / Данченко В. И., Додонов А. Е. // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы (Воронеж, 2013). Воронеж: Издательство Воронежского государственного университета, 2013. С. 76.

[8] Данченко В. И. *Оценки экспоненциальных сумм* / Данченко В. И., Додонов А. Е. // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы (Воро-

неж, 2013). Воронеж: Издательство Воронежского государственного университета, 2013. С. 77.

[9] Dodonov A. E. *On Estimates of Quasipolynomials* / Dodonov A. E. // Комплексный анализ и его приложения: тезисы VII Петрозаводской международной конференции. — Петрозаводск: Петрозаводский государственный университет, 2014. — С. 37–40.

[10] Додонов А. Е. *О сходимости рядов наипростейших дробей в* $L_p(\mathbb{R})$ / Додонов А. Е. // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы XII международной Казанской летней научной школы-конференции. — Казань: Казанское математическое общество, 2015. — С. 178–180.