

0718869-1

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЛИПАЧЁВ Евгений Константинович



**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН
В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

КАЗАНЬ — 2000

Работа выполнена на кафедре теории функций и приближений
Казанского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических
наук, профессор Б.Г. Габдулхаев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических
наук, профессор Ф.Г. Мухлисов,
НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
КФУ



0000947888

кандидат физико-математических
наук, доцент Л.А. Онегов

Ведущая организация: Одесский государственный
университет им. И.И. Мечникова

Защита состоится 29 ноября 2000 года в 16⁰⁰ часов
на заседании диссертационного совета К 053.29.27 в Казанском
государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул.
Университетская, 17, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 24 октября 2000 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор

Н.Б. Плещинский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ



Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию краевых задач, возникающих при моделировании процесса распространения электромагнитных волн в областях, имеющих бесконечную границу. Эти задачи, в отличие от аналогичных задач для ограниченных областей, изучены в меньшей степени; исключением являются области с периодической границей, задачи дифракции на которых хорошо изучены. Некоторые итоги достигнутых результатов подведены в монографиях Е. В. Захарова и Ю. В. Пименова (1982 г.), В. В. Панасюка, М. П. Саврука и З. Т. Назарчука (1984 г.), Т. Н. Галишниковой и А. С. Ильинского (1987 г.), В. И. Дмитриева и Е. В. Захарова (1987 г.), Д. Колтона и Р. Кресса (1987 г.), З. Т. Назарчука (1989 г.), И. К. Лифанова (1995 г.), А. С. Ильинского и Ю. Г. Смирнова (1996 г.).

В данной работе рассмотрены области, граница которых совпадает с $R = (-\infty, \infty)$, за исключением участка конечной длины. Этот случай требует новых подходов исследования, отличных от тех, что использовались при рассмотрении краевых задач дифракции в ограниченных областях и областях с периодической границей.

Важным этапом исследования краевых задач является доказательство существования и единственности решений в подходящих функциональных пространствах. Вопросы разрешимости краевых задач дифракции исследовались в работах С. И. Абгалдаева и В. П. Моденова, В. М. Бабича, Е. В. Захарова, В. П. Иванова, В. Д. Купрадзе, Ф. Г. Мухлисова, Е. В. Чернокожина и Ю. В. Шестопалова, Y. Hayashi, A. G. Ramm и др.

Другим, не менее важным этапом, является построение методов приближённого решения краевых задач. Это связано с тем обстоятельством, что в явном виде решается лишь небольшое число краевых задач дифракции, причём на довольно простых структурах. В связи с этим отметим

метод интегральных уравнений, как наиболее универсальный инструмент как исследования краевых задач, так и построения алгоритмов численного решения. Метод интегральных уравнений широко применялся в работах В. Д. Купрадзе, В. И. Дмитриева, Е. В. Захарова, А. С. Ильинского, И. К. Лифанова, З. Т. Назарчука, В. А. Цецохо, Ю. В. Шестопалова и др.

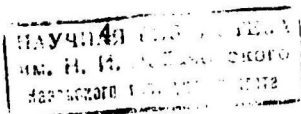
Следующим этапом исследования является теоретическое обоснование методов приближённого решения краевых задач. В связи с этим отметим методику обоснования приближённых методов, разработанную в работах Б. Г. Габдулхаева. При дискретизации интегральных уравнений возникает задача построения и обоснования квадратурных формул. Существенные результаты в этом направлении получены С. М. Белоцерковским, Б. Г. Габдулхаевым, И. К. Лифановым, З. Т. Назарчуком, В. В. Панасюком, М. П. Савруком, Н. Я. Тихоненко и др.

Цель работы — исследование разрешимости краевых задач дифракции волн на областях, граница которых совпадает с $\mathbb{R}$, за исключением участка конечной длины; сведение краевых задач к интегральным уравнениям, разработка алгоритмов приближённого решения и их теоретическое обоснование.

Методы исследования. При выводе результатов диссертации используются известные результаты из теории интегральных уравнений, методы теории потенциалов, результаты из общей теории приближённых методов функционального анализа.

Научная новизна. а) С помощью метода обобщённых потенциалов получены интегральные уравнения, эквивалентные исходным краевым задачам дифракции.

б) Доказаны теоремы существования и единственности классических



решений рассматриваемых краевых задач.

в) Предложены и теоретически обоснованы методы приближённого решения краевых задач дифракции.

В диссертации под теоретическим обоснованием приближённых методов, следуя Л.В. Канторовичу, понимается следующий круг вопросов:

а) доказательство теорем существования и единственности решения аппроксимирующих уравнений; б) доказательство сходимости приближённых решений к точному решению и определение скорости сходимости; в) установление эффективных оценок погрешности приближённого решения, учитывающих структурные свойства исходных данных; г) исследование устойчивости и обусловленности приближённых методов.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть применены при решении конкретных задач, связанных с распространением электромагнитных волн, а также при решении прикладных задач, сводящихся к интегральным уравнениям второго рода.

Разработанные алгоритмы приближённого решения могут использоваться при расчете дифракционных решёток и волноводных структур.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на Международной научной конференции “Лобачевский и современная геометрия” (Казань, 1992), Республиканской научно-методической конференции, посвящённой 200 – летию со дня рождения Н. И. Лобачевского (Одесса, 1992), Международной научной конференции “Алгебра и анализ”, посвящённой 100-летию со дня рождения Н. Г. Чеботарёва (Казань, 1994), Школе-конференции “Теория функций и её приложения” (Казань, 1995), VII Международном симпозиуме “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики” (Феодосия, 1997), Школе – кон-

ференции “Алгебра и анализ”, посвящённой 100-летию со дня рождения Б. М. Гагаева (Казань, 1997), Международной конференции “Теория приближений и гармонический анализ” (Тула, 1998), International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory — ММЕТ*98 (Kharkov, Ukraine, 1998), Школе – конференции, посвящённой 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова (Казань, 1999), Международной конференции “Актуальные проблемы математики и механики” (Казань, 2000), ежегодных научных конференциях Казанского университета за 1988 — 2000 гг., представлялись на Progress in Electromagnetics Research Symposium (Nantes, France, 1998), Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Santiago de Compostela, Spain, 2000), а также обсуждались на семинарах “Теория аппроксимации и её приложения” при Казанском университете (руководитель профессор Б. Г. Габдулхаев), “Математические модели интегральной оптики” при кафедре прикладной математики КГУ (руководитель профессор Н. Б. Плещинский).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах, список которых приведён в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация общим объёмом 138 страниц (A4, $\text{\LaTeX}$) состоит из Введения, четырёх глав и списка цитируемой литературы из 132 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обоснована актуальность темы, приводится обзор литературы по теме диссертации и даётся компактное изложение полученных автором результатов.

Первая глава (§§ 1 — 7) посвящена изучению задачи дифракции элек-

тромагнитных волн в неограниченной области S с границей γ , совпадающей с $\mathbb{R}$, за исключением ограниченного участка γ^* . Предполагается, что кривая γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$, $0 < \nu \leq 1$.

В § 1 рассмотренная задача дифракции сформулирована в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с условиями Дирихле или Неймана на границе и условием излучения на бесконечности:

$$\Delta u(x, z) + k^2 u(x, z) = 0, \quad (x, z) \in S, \quad (1)$$

$$u(x, z) = -u_0(x, z), \quad P = (x, z) \in \gamma \quad \text{— в } TE\text{-случае}, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} \right|_{\gamma} = - \left. \frac{\partial u_0(P)}{\partial \vec{n}_P} \right|_{\gamma}, \quad P \in \gamma \quad \text{— в } TH\text{-случае}, \quad (2')$$

$$u^* = e^{ikr} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial u^*}{\partial r} - ik u^* = e^{ikr} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$\operatorname{Im} k \geq 0, \quad u^*(x, z) = u(x, z) - \tilde{u}(x, z), \quad \tilde{u}(x, z) = \zeta e^{ik(\alpha x + \beta z)}, \quad (4)$$

где через $u_0(x, z) = e^{ik(\alpha x - \beta z)}$ обозначена падающая волна, а $\zeta = -1$ — в случае TE -поляризации и $\zeta = 1$ — в случае TH -поляризации.

В § 2 доказана теорема о единственности классических решений краевых задач, то есть принадлежащих классу $C^2(S) \cap C(S \cup \gamma)$ (в случае условия (2') предполагается существование правильной нормальной производной на границе).

В § 3 введены обобщённые потенциалы:

$$(V\varphi)(P) \equiv \int_{\gamma^*} g_2(P, P') \varphi(\tau) ds_{P'}, \quad (5)$$

$$(W\psi)(P) \equiv \int_{\gamma^*} \frac{\partial g_1(P, P')}{\partial \vec{n}_{P'}} \psi(\tau) ds_{P'}, \quad (6)$$

где $P = (x, z)$, $P' = (\tau, \xi)$, $\varphi, \psi \in \dot{C}[-a, a]$,

$$g_m(P, P') = \frac{\pi i}{2} \left\{ H_0^{(1)}(kr) + (-1)^m H_0^{(1)}(kr^*) \right\}, \quad m = 1, 2, \quad (7)$$

$r = \sqrt{(x - \tau)^2 + (z - \xi)^2}$, $r^* = \sqrt{(x - \tau)^2 + (z + \xi)^2}$, а через $H_0^{(1)}(z)$ обозначена функция Ганкеля первого рода нулевого порядка.

С помощью обобщённых потенциалов в § 4 краевые задачи сведены к интегральным уравнениям второго рода.

В § 5 доказана теорема существования в классе $C^2(S) \cap C(S \cup \gamma)$ решений краевой задачи (1), (2), (3). Показано, что решение краевой задачи в области S допускает интегральное представление в виде обобщённого потенциала двойного слоя относительно участка границы γ^* с плотностью, являющейся решением интегрального уравнения второго рода. Доказана эквивалентность краевой задачи и интегрального уравнения.

Аналогичная техника применена в § 6 для доказательства существования классического решения краевой задачи Неймана (1), (2'), (3) и доказательства эквивалентности этой краевой задачи интегральному уравнению второго рода. Доказано, что в этом случае решение краевой задачи допускает интегральное представление в виде обобщённого потенциала простого слоя относительно участка границы γ^* с плотностью, являющейся решением интегрального уравнения второго рода.

В § 7 построен алгоритм приближённого решения задачи дифракции (1) — (3). Компоненты электромагнитного поля ищутся в виде обобщённых потенциалов двойного или простого слоёв (в зависимости от поляризации волны), плотности которых находятся как решения интегральных уравнений второго рода. Для решения интегральных уравнений применены методы сплайн — коллокации нулевого и первого порядков. Дано теоретическое обоснование приближённых методов на основе варианта общей теории приближённых методов, построенного Б. Г. Габдулхаевым.

Во второй главе (§§ 1 — 4) рассмотрена задача рассеяния плоской электромагнитной волны неограниченной областью с кусочно-гладкой

границей $\gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, $\text{supp } f \subset [-a, a]$ для некоторого $a \in \mathbb{R}^+$.

Математическая модель задачи сформулирована в § 1 в виде краевой задачи (1) — (3), дополненной условием конечности энергии в точках нарушения гладкости (условие на ребре).

В § 2 приведено доказательство теоремы единственности решения краевой задачи в классе квадратично-суммируемых по Лебегу функций.

В § 3 доказано существование решения краевых задач в классе квадратично-суммируемых функций. Решение строится как предел функций, являющихся решениями аналогичных краевых задач в областях, границы которых получены “сглаживанием” границы рассматриваемой области.

Для приближённого решения дифракционной задачи предложен метод, основанный на методах сплайн – подобластей нулевого и первого порядков решения интегрального уравнения второго рода, эквивалентного краевой задаче. Установлено теоретическое обоснование приближённых методов. Для уточнения приближённого решения использовался метод осреднения функциональных поправок.

В третьей главе (§§ 1 — 5) изучается задача дифракции электромагнитной волны на на границе раздела двух диэлектрических сред. Предполагается, что граница раздела сред совпадает с $\mathbb{R}$, за исключением участка конечной длины.

В § 1 задача дифракции сформулирована в виде задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца с условием излучения на бесконечности.

В § 2 доказана единственность классического решения краевой задачи.

В § 3 с помощью метода обобщённых потенциалов задача сопряжения сведена к системе интегральных уравнений второго рода. Показана фредгольмовость полученной системы интегральных уравнений.

В § 4 доказано существование классического решения задачи сопряжения. Доказана эквивалентность задачи сопряжения и полученной системы интегральных уравнений. Показано, что решение краевой задачи представимо в виде комбинации обобщённых потенциалов.

В § 5 приведён алгоритм приближённого решения задачи сопряжения. Система интегральных уравнений, эквивалентная задаче сопряжения, решается методом сплайн-коллокации, а полученные решения уточняются с помощью метода осреднения функциональных поправок. Проведено теоретическое обоснование полученной вычислительной схемы.

Во четвертой главе (§§ 1 — 5) рассмотрена задача дифракции плоской электромагнитной волны на отражательной полуплоскости с диэлектрическим включением конечного размера.

В § 1 задача дифракции сформулирована в виде системы из двух уравнений Гельмгольца с условиями сопряжения на диэлектрическом участке границы, условиями Дирихле или Неймана (в зависимости от поляризации волны) на оставшейся части границы, условием на ребре в конечных точках металлического участка границы и условием излучения на бесконечности.

В § 2 доказана теорема единственности классического решения рассматриваемой краевой задачи.

В § 3 краевая задача сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

В § 4 доказаны теорема существования классического решения краевой задачи и теорема эквивалентности краевой задачи и системы интегральных уравнений.

Параграф 5 содержит описание алгоритма приближённого решения краевой задачи. Алгоритм основан на приближении сплайнами решения системы интегральных уравнений, эквивалентной краевой задаче. Коэф-

коэффициенты сплайнов определяются с помощью метода сплайн-подобластей. Дано теоретическое обоснование предложенной вычислительной схемы.

Основные научные результаты работы, выносимые на защиту, заключаются в следующем.

1. Доказаны теоремы существования и единственности классических решений краевых задач, к которым сведена задача рассеяния электромагнитной волны бесконечной отражательной решёткой с конечной “неровной” частью.

2. С помощью метода обобщённых потенциалов краевые задачи дифракции сведены к интегральным уравнениям второго рода. Доказана эквивалентность краевых задач и интегральных уравнений.

3. В классе квадратично-суммируемых по Лебегу функций доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи дифракции электромагнитной волны на бесконечной отражательной решётке с конечной нарезанной частью, имеющей рёбра.

4. Доказана теорема существования и единственности классического решения задачи дифракции электромагнитной волны на диэлектрической структуре с конечной нарезанной частью.

5. Построены алгоритмы приближённого решения дифракционных задач, основанные на численном решении модельных интегральных уравнений методами сплайн-коллокации и сплайн-подобластей. Полученные методы теоретически обоснованы.

6. Получена система интегральных уравнений и доказана эквивалентность этой системы задаче сопряжения, служащей моделью для задачи дифракции на диэлектрической структуре.

7. С помощью метода сплайн-коллокации построен алгоритм приближённого решения задачи сопряжения.

8. Построена система интегральных уравнений для решения задачи рассеяния электромагнитной волны бесконечной отражательной решеткой с конечным диэлектрическим включением. Доказана разрешимость соответствующей краевой задачи. Получена система интегральных уравнений, эквивалентная исходной краевой задаче. Предложен и обоснован метод приближённого решения краевой задачи рассеяния волн на отражательных структурах с диэлектрическим включением.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Б. Г. Габдулхаеву за постоянную помощь при выполнении работы.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Липачев Е. К. *Численный алгоритм решения задачи дифракции* // Республ. научно – метод. конф. Тез. докл. — Одесса, 1992. — С. 80.
2. Lipachev E. K. *Approximate solution on the diffraction problem by the integral equation method* // Алгебра и анализ. Материалы Междун. научной конф., посвященной 100-летию со дня рождения Н.Г. Чеботарёва. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994, ч. II. — С. 176 – 177.
3. Липачев Е. К. *Проекционно – итеративные методы решения задачи дифракции на многослойных областях* // Тез. докл. школы - конф. “Теория функций и ее приложения”(15 — 22 июня 1995 г., г. Казань). — Казань. — 1995. — С. 38 – 39.
4. Липачев Е. К. *О разрешимости задачи рассеяния на бесконечной решётке с конечной нарезкой* // Алгебра и анализ. Материалы конф., посвящённой 100-летию со дня рождения Б. М. Гагаева. — Казань: Изд-во Казан. матем. общества. — 1997. — С. 135 – 136.

5. Липачев Е. К. *Решение дифракционных задач в области с кусочно-гладкой границей* //Алгебра и анализ. Материалы конф., посвящённой 100-летию со дня рождения Б. М. Гагаева. — Казань: Изд-во Казан. матем. общества. — 1997. — С. 137.
6. Lipachev E. K. *Approximate methods for solving the problem of scattering by the gratings with a groove structure of a finite size* //Методы дискретных особенностей в задачах аэродинамики, электродинамики и теории дифракции. Труды VII Междун. симпозиума МДОЗМФ-97. Херсон: ХТГУ, 1997. — С. 203 — 205.
7. Липачев Е. К. *Сплайновые приближения решения интегрального уравнения теории дифракции* //Теория приближений и гармонический анализ. Тез. докл. Междун. конф. Тула, 1998. — С. 157.
8. Lipachev E. K. *Diffraction of electromagnetic waves by gratings with piecewise smooth boundaries* // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Proc. VIIth International Conf. MMET*98. Kharkov, Ukraine, June 2-5, 1998. — V. 1. — P. 174 – 176.
9. Lipachev E. K. *Scattering by an Infinite Grating with a Groove Structure of a Finite Size* // Proc. of PIERS'98 Progress in Electromagnetics Research Symposium, July 13 – 17, 1998, Congress Center, Nantes, France. — P. 326.
10. Липачев Е. К. *Граничные интегральные уравнения в задаче рассеяния волн на неограниченных областях* // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Всероссийской школы-конф., посвящённой 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. — Казань: Изд-во Казан. матем. общества, 1999. — С. 135 – 136.
11. Липачев Е. К. *Разрешимость краевой задачи дифракции волн на областях с кусочно – гладкой границей* // Теория функций, ее при-

- ложения и смежные вопросы. Материалы Всероссийской школы – конф., посвящённой 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. — Казань: Изд-во Казан. матем. общества, 1999. — С. 136 – 138.
12. Липачев Е. К. *Краевая задача дифракции волн на решётке с диэлектрическим включением* // Труды Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 3. Казан. матем. общество. — Казань: УНИПРЕСС, 1999. — С. 331 – 334.
13. Липачев Е. К. *О задачах дифракции волн на структурах со сложной геометрией* // Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики. Материалы междунар. научной конф., посвящённой 90-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева. — Москва: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ. — 1999. — С. 28.
14. Lipachev E. K. *In Boundary Integral Equation Method in Scattering Problem for Unbounded Domains* // SIAM Proc. in Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 102. — P. 509 – 512.
15. Липачев Е. К. *Приближенные методы решения интегрального уравнения задачи дифракции волн* // Диференціальні та інтегральні рівняння. Тези доповідей Міжнар. конф., Одеса, 2000. — Одесса: "АстоПринт", 2000. — С. 169 – 170.
16. Липачев Е. К. *О сходимости метода сплайн – подобластей для интегрального уравнения теории дифракции* // Труды Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 5. Казан. матем. общество. — Казань: УНИПРЕСС, 2000. — С. 128 – 129.



Сдано в набор 25.10.00 г. Подписано в печать 25.10.00 г.
Форм.бум. 60 х 84 1/16. Печ.л. 1. Тираж 100. Заказ 233.

Лаборатория оперативной полиграфии КГУ
420045 Казань, Кр. Позиция, 2а

200