На правах рукописи

Бреев Александр Игоревич

Метод К-орбит в исследовании квантовых эффектов во внешнем гравитационном поле

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2010

Работа выполнена в ГОУ ВПО "Томский государственный университет" на кафедре теоретической физики физического факультета

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
теоретической физики Томского
государственного университета — Шаповалов Александр Васильевич

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры средств связи и
информационной безопасности
Омского государственного
политехнического университета — Широков Игорь Викторович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры квантовой теории
поля Томского государственного
университета — Самсонов Борис Федорович

доктор физико-математических наук,
проректор по научной работе Томского
государственного Педагогического
университета — Осетрин Константин Евгеньевич

Ведущая организация: Казанский государственный университет

Защита состоится "11" ноября 2010 г. в 14^{30} час. на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 в Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета

Автореферат разослан "8" октября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212. 267. 07
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник — И.В. Ивонин

Общая характеристика работы

В диссертации при помощи метода К-орбит развит гармонический анализ и интегрирование релятивистких волновых уравнений на неунимодулярных группах Ли. Построена методика расчета вакуумных средних тензора энергии-импульса скалярных и спинорных полей на группах Ли и однородных пространствах во внешнем гравитационном поле.

Актуальность темы

Разработка новых методов интегрирования релятивистких волновых уравнений является актуальной задачей теоретической физики. В квантовой теории поля возникают задачи, когда оператор уравнения допускает некоммутативный набор операторов симметрии, и уравнение не интегрируется методом разделения переменных.

В случае, когда уравнение допускает некоммутативный набор операторов симметрии и уравнение не интегрируется методом разделения переменных, построить точное решение оказывается возможным с помощью метода некоммутативного интегрирования, основанного на методе К-орбит. Задачи подобного рода возникают при исследовании квантовых эффектов на пространствах с некоммутативной группой движений в интенсивных гравитационных полях.

Цель работы

Целью данной работы является разработка методов исследования квантовых эффектов во внешних гравитационных полях с некоммутативными симметриями на основе точных решений релятивистких волновых уравнений.

Научная новизна

Основные результаты, изложенные в диссертации, получены в работах автора и ранее известны не были. Впервые метод К-орбит применен для вычисления вакуумных средних тензора энергии-импульса скалярных и спинорных полей на многообразиях с некоммутативной группой симметрий во внешнем гравитационном поле. Для группы Ли вида $\mathbb{R} \times E(2)$, где $E(2)$ – группа Ли движений двумерной плоскости с произвольной левоинвариантной метрикой, проинтегрировано уравнение Клейна-Гордона и получен явный вид плотности энергии скалярного поля.

Основные результаты

В работе впервые получены следующие основные результаты:

1. На основе метода K-орбит разработан гармонический анализ на неунимодулярных группах Ли, позволяющий редуцировать оператор волнового уравнения в двойственное пространство с сохранением его самосопряженности.
2. Разработана методика расчета вакуумных средних тензора энергии–импульса скалярного поля на групповых многообразиях $\mathbb{R} \times G$, где G – локальная группа Ли с левоинвариантной метрикой.
3. Для случая неунимодулярной локальной группы Ли алгебры Ли VI_4 с левоинвариантной метрикой найдено точное решение уравнения Клейна–Гордона, и рассчитаны вакуумные средние тензора энергии-импульса скалярного поля.
4. Модифицирован метод регуляризации вакуумных средних тензора энергии–импульса скалярного поля с некоммутативными симметриями при помощи обобщенной дзета–функции, получено выражение для обобщенной дзета–функции на K-орбите. Для группы Ли вида $\mathbb{R} \times E(2)$, где $E(2)$ – группа Ли движений двумерной плоскости с левоинвариантной метрикой общего вида, получен явный вид плотности энергии скалярного поля.
5. Сформулирован алгоритм построения вакуумных средних ТЭИ спинорного поля на групповых многообразиях $\mathbb{R} \times G$, где G – трехмерная локальная группа Ли с левоинвариантной метрикой. Найдено точное решение уравнения Дирака и рассчитаны вакуумные средние тензора энергии–импульса скалярных и спинорных полей для трехмерной группы вращений $SO(3)$ с метрикой, отличной от бинвариантной.
6. Развит аналог тетрадного формализма для тензорных полей на однородном пространстве с G–инвариантной метрикой, при помощи которого получено явное выражение для тензора Римана в форме, не зависящей от выбора локальных координат.
7. Разработана методика расчета вакуумных средних ТЭИ скалярного поля на однородных пространствах с G–инвариантной метрикой.

Теоретическая и практическая ценность работы

Материалы диссертации представляют интерес для специалистов в области квантовой механики, математической физики. Результаты, полученные в работе, могут найти применение при интегрировании волновых релятивистких уравнений, для построения точно решаемых космологических моделей.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Дана формулировка гармонического анализа для неунимодулярных групп Ли, позволяющая проводить редукцию волновых уравнений на группах Ли к уравнениям на K-орбите, с меньшим количеством независимых переменных. Проинтегрировано уравнение Клейна-Гордона на неунимодулярной группе Ли VI_4 с левоинвариантной метрикой общего вида.
2. Разработана методика расчета вакуумных средних тензора энергии–импульса скалярных и спинорных полей на групповых многообразиях $\mathbb{R} \times G$, где G – локальная группа Ли с левоинвариантной метрикой. Рассчитаны вакуумные средние ТЭИ на групповых многообразиях $\mathbb{R} \times SO(3)$ и $\mathbb{R} \times E(2)$ с метриками, отличными от биинвариантной.
3. Получено выражение для тензора Римана на однородном пространстве с G–инвариантной метрикой в виде, независимом от выбора локальных координат. Разработана методика расчета вакуумных средних ТЭИ скалярного поля на однородных пространствах с G–инвариантной метрикой.

Апробация диссертации и публикации

Результаты диссертации докладывались на международных конференциях:

— XIII международной летней школе–семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики. 22 июня - 03 июля 2009 г., Казань;

— 13-й международной конференции "Симметрии и точные решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений MOGRAN-13". 2009 г., Уфа;

а также на научных семинарах кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета.

По теме диссертации опубликовано 4 статьи, а также 2 тезиза докладов на международных конференциях.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка цитируемой литературы, содержащего 150 библиографических ссылок. Общий объем диссертации составляет 132 страницы. Работа содержит 1 рисунок.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен краткий обзор литературы. Дано описание структуры диссертации и сформулированы основные задачи, решаемые в ней.

В **первой главе диссертации** излагается метод орбит коприсоединенного представления (метод К-орбит) и гармонический анализ на группах Ли.

Вводится понятие вырожденной орбиты, и строится классификация орбит группы Ли как объединения поверхностей уровня функций Казимира для орбиты соответствующей степени вырождения.

На основе метода орбит описывается классификация однородных пространств. В отличие от традиционных классификаций, данная классификация не носит геометрического характера, а является чисто алгебраической. Каждое однородное пространство характеризуется двумя числами - индексом и степенью вырождения.

Рассматривается специальное бесконечномерное λ–представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, являющееся ключевым объектом в теории некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений [1], [2]. λ – представление является операторно неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве функций на лагранжевом подмногообразии $Q \ni q$ к К-орбите. Далее исследуется соответствующее представление локальной группы Ли G данной алгебры Ли. В случае, когда линейный функционал λ допускает поляризацию, поднятие λ–представления до представления группы Ли приводит к методу орбит Кириллова. Матричные элементы λ–представления являются основой для построения гармонического анализа на группах Ли. Так как последние определены лишь локально, то требование их однозначной определенности на группе Ли сводится к условию Кириллова целочисленности К-орбиты $\mathcal{O}_\lambda$.

При помощи метода орбит проводится построение гармонического анализа на группах Ли. Вводится набор обобщенных функций на группе Ли как решение соответствующей переопределенной системы уравнений. Показано, что данные функции при выборе правоинвариантной меры на группе выражаются через матричные элементы представления, и вместе с последними образуют полный и ортонормированный набор, осуществляющий обобщенное преобразование Фурье на группе Ли.

Во **второй главе диссертации** при помощи метода орбит развивается процедура интегрирования уравнения Клейна-Гордона и метод расчета вакуумных средних тензора энергии-импульса (ТЭИ) на групповом многообразии вида $M = \mathbb{R} \times G$; G – локальная группа Ли, метрический тензор на M выбран в виде $\Theta_{A'B'} = (1 \oplus -\gamma_{AB})$, где γ_{AB} – тетрадные компоненты левоинвариантной метрики на G. Основой метода является переход в дуальное пространство при помощи обобщенного Фурье преобразования:

$$\varphi(x) = \int_{Q\times Q\times J} \psi(q, q', \lambda) D^{\lambda}_{q\overline{q}'}(x) d\mu(q) d\mu(q') d\mu(\lambda), \tag{1}$$

$$\psi(q, q', \lambda) = \Delta^{-1}(q) \int_G \overline{D^{\lambda}_{q\overline{q}'}(x)} \varphi(x) d\mu_L(x), \tag{2}$$

где $\varphi \in L_2(G, d\mu_L(x))$, $\psi \in L_2(Q, d\mu(q))$, $\Delta(x)$ – модуль группы Ли G; $D^{\lambda}_{q\overline{q}'}(x)$ – матричные элементы λ–представления (неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G в пространстве $L_2(Q, d\mu(q))$); $d\mu_L(x)$ – левая мера Хаара на группе Ли G; $q, q' \in Q$ – лагранжево подмногообразие к невырожденной К-орбите; $d\mu(\lambda)$ – спектральная мера операторов Казимира алгебры Ли группы Ли G.

Данный метод позволяет проводить редукцию уравнения к более простому уравнению на К-орбите, с меньшим количеством переменных. Причем, решение строится глобально на всем пространстве и не возникает проблемы сшивки решений, так как вместо рассмотрения исходного пространства, задача переносится на К-орбиту, обладающую значительно более простой геометрией и топологией.

В начале главы вводится определение левоинвариантной метрики и подробно описывается применение тетрадного формализма к расчету геометрических характеристик групп Ли в случае, если связность на группе согласована с метрикой и кручение равно нулю. Приведены явные выражения для тетрадных компонент тензора Риччи R_{AB} и скалярной кривизны R.

Далее разработан алгоритм интегрирования квантовых уравнений на неунимодулярных группах Ли, основанный на редукции исходного уравнения на группе Ли вида

$$H(\xi(x))\varphi(x) = -\Lambda^2\varphi(x), \tag{3}$$

к уравнению на лагранжевом подмногообразии к невырожденной К-орбите:

$$H(l(q',\lambda))\psi_\Lambda(q',\lambda) = -\Lambda^2\psi_\Lambda(q',\lambda). \tag{4}$$

Набор функций

$$\varphi_\sigma(x) = \Delta^{-2}(q)\int \psi_\Lambda(q',\lambda)D^\lambda_{q\overline{q}'}(x)d\mu(q'), \quad \sigma = (q,\lambda,\Lambda) \tag{5}$$

нумеруемый коллективным индексом σ, образует базис решений уравнения (3).

Рассматривается задача интегрирования уравнения Клейна-Гордана с конформной связью $\zeta = (\dim M-2)/[4(\dim M-1)]$ на группе Ли $M = \mathbb{R}\times G$ с левоинвариантной лоренцевой метрикой:

$$(\partial_t^2 - \Delta_G + \zeta R + m^2)\varphi(x,t) = 0, \tag{6}$$

где Δ_G – оператор Лапласа - Бельтрами на группе Ли G. Везде где это не оговорено особо, в работе используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Показано, что его интегрирование сводится к интегрированию квантового уравнения на группе Ли G с гамильтонианом, представляющим собой полином от правоинвариантных векторных полей.

Полученные решения уравнения Клейна-Гордона используются в расчете вакуумных средних тензора энергии-импульса скалярного поля на неунимодулярной группе Ли. Вакуумные средние не зависят от выбора локальных координат на группе и имеют вид

$$\langle \hat{T}_{A'B'} \rangle = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\omega_\Lambda}\overline{\psi_\Lambda(q',\lambda)}\biggl(\frac{1}{2}\{l_{A'}(q',\lambda), l_{B'}(q',\lambda)\} + \zeta R_{A'B'} - \tag{7}$$

$$-\left(2\zeta - \frac{1}{2}\right)\Theta_{A'B'}\gamma^{AB}Sp(ad_B)l_A(q',\lambda)\biggr)\psi_\Lambda(q',\lambda)d\mu_0(q')d\mu(\lambda)d\mu(\Lambda),$$

где $\{\hat{a},\hat{b}\} \equiv \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}$; $\omega_\Lambda = \Lambda^2 + \zeta R + m^2$; $l_0 = i\omega_\Lambda$; $d\mu_0(q)$ – мера, в которой операторы λ–представления косоэрмитовы.

Рассмотрен частный случай биинвариантной метрики на группе Ли, когда оператор Лапласа-Бельтрами сводится к оператору Казимира и в λ–представлении является константой.

Общая теория применена к неунимодулярной локальной группе Ли VI_4, алгебра Ли которой определяется коммутационными соотношениями:

$$[e_2, e_3] = e_1 + \epsilon e_2, \quad [e_3, e_1] = -\epsilon e_1 + e_2, \quad \epsilon > 0. \tag{8}$$

Заметим, что данная алгебра Ли допускает неоднозначную функцию Казимира $K(f) = (f_1^2 + f_2^2)\exp(-2\epsilon\arctan(f_2/f_1))$, $f \in \mathfrak{g}^*$. В следствие неоднозначности, лагранжево подмногообразие к невырожденной К-орбите есть $Q = (-\pi/2, \pi/2)$. Левоинвариантную метрику в тетрадах, при помощи действия группы автоморфизмов алгебры, можно привести к виду $\gamma^{11} = \alpha, \gamma^{22} = \beta, \gamma^{13} = \delta$ (α, β, δ–константы, остальные компоненты нулевые). В данном случае, группа Ли G характеризуется тривиальной топологией, но ненулевой кривизной. Уравнение Клейна-Фока редуцируется к дифференциальному уравнению первого порядка и легко решается. Плотность энергии скалярного поля есть:

$$\langle \hat{T}_{00} \rangle = \frac{1}{8\pi^3\delta}\int_0^\infty dj \int_0^\infty \Lambda d\Lambda\left(\omega + \frac{i\epsilon\delta j}{3\omega}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{e^{-\epsilon q}}{\cos(q)}dq, \tag{9}$$

где $\omega = \sqrt{\Lambda^2 - 12\delta^2/\beta - m^2}$.

Вычислены вакуумные средние ТЭИ на группе Ли $\mathbb{R} \times SO(3)$, с левоинвариантной метрикой вида $\gamma_{AB} = \mathrm{diag}(1, 1, a+1)$ (a–некоторый параметр):

$$\langle \hat{T}_{A'B'} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \sum_{n=-j}^{j} t_{A'} \delta_{A'B'}, \tag{10}$$

$$t_0 = \omega_{nj},\ t_1 = t_2 = \frac{j(j+1) - n^2 - R_{11}/3}{2\omega_{nj}},\ t_3 = \frac{n^2 - R_{33}/6}{\omega_{nj}}, \tag{11}$$

где $\omega_{nj} = \sqrt{an^2 + j(j+1) + \zeta R + m^2}$; В случае $a = 0,\ m = 0$ имеем

$$\langle \hat{T}_{A'B'} \rangle_{ren}^{(m=0)} = \frac{7}{1440} \mathrm{diag}\,(3, 1, 1, 1)\,. \tag{12}$$

При помощи метода обобщенной дзета-функции, основанного на прямом вычислении функциональных производных от однопетлевого эффективного действия по метрике (см. работу [3]), получены общие выражения для перенормированного тензора энергии–импульса скалярного поля на групповом многообразии $\mathbb{R} \times G$, где G – локальная группа Ли с левоинвариантной метрикой. Данный метод перенормировки не использует напрямую сами выражения для вакуумных средних ТЭИ, а сводит задачу к поиску аналитического продолжения для обобщенной дзета-функции.

Основную трудность представляет собой вычисление функциональных производных эффективного действия W_{ren} по метрике, так как для этого необходимо знать W_{ren} для всех геометрий $\Theta_{ij}(g),\ g \in M$. Суть метода состоит в том, чтобы сначала вычислить функциональные производные по метрике от эффективного действия, а уже потом искать аналитическое продолжение при $s = 0$:

$$\langle \hat{T}_{ij} \rangle_{ren} = -\frac{1}{\sqrt{|\Theta(x)|}} \frac{\delta W(s)}{\delta \Theta_{ij}}|_{s=0}. \tag{13}$$

$$W(s) = -\frac{i}{2} \left(\zeta'(s) + \zeta(s) ln(-2\pi i \mu^2) \right), \quad W_{ren} = W(s)|_{s=0}. \tag{14}$$

$$\zeta(s) = \int \lambda_\sigma^{-s} d\mu(\sigma), \tag{15}$$

где λ_σ^{-s} – собственные функции оператора $\Box + m^2 + \zeta R$. Локальная ζ-функция на группе Ли определяется выражением

$$\zeta(g, s) = \int \lambda_{\Lambda\lambda\omega}^{-s} |\psi_\Lambda(q', \lambda)|^2 d\mu_0(q') d\mu(\lambda) d\mu(\Lambda) d\mu(\omega), \tag{16}$$

где $\lambda_{\Lambda\lambda\omega}^{-s} = \Lambda^2 - \omega^2 + m^2 + \zeta R$, $\int \cdot d\mu(\omega) = 1/(2\pi)\int_0^\infty \cdot d\omega$.

Проинтегрировано уравнение Клейна-Гордона на группе Ли $\mathbb{R} \times E(2)$ с левоинвариантной метрикой общего вида. При помощи автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{e}(2)$ произвольную левоинвариантную метрику можно привести к виду $\gamma_{AB} = \mathrm{diag}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$. Проведено вычисление вакуумных средних ТЭИ скалярного поля. При помощи метода обобщенной ζ–функции вычислена перенормированная плотность энергии скалярного поля:

$$\langle T_{00}\rangle_{ren} = \frac{\sqrt{ABC}}{32\pi^2(A+B)}[2\int_{\sqrt{(m^2+\zeta R)/c}}^{\infty} \frac{[Ct^2 - m^2 - \zeta R]^{3/2}}{e^{2\pi t} - 1}dt + \frac{1}{2}(m^2 + \zeta R)^{3/2} - \frac{A - B}{3A + B}(C + m^2 + \zeta R)^{3/2}]. \tag{17}$$

В частном случае плоской метрики: $\gamma_{AB} = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$, приходим к хорошо известному результату для эффекта Казимира в плоском пространстве с топологией $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$:

$$\langle T_{A'B'}\rangle_{ren} = \frac{1}{1440\pi^2}\mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, -3)\,. \tag{18}$$

В **третьей главе диссертации** проводится обобщение развитой техники учета квантовых эффектов на случай спинорных полей на группах Ли. Уравнение Дирака

$$\left(i\gamma^i(x)\vec{\nabla}_i - m\right)\Psi(x) = 0, \quad \Gamma_k(x) = -1/4\gamma_{i;k}(x)\gamma^i(x), \tag{19}$$

где $\vec{\nabla}_i \equiv \nabla_i + \Gamma_i(x)$; ∇_i – ковариантная производная; сводится к уравнению на К-орбите:

$$\left[\gamma^0\Lambda - m + H(l(q', \lambda))\right]\psi_{\Lambda s}(q', \lambda) = 0, H(l(q', \lambda)) = i\gamma^A\left[l(q', \lambda) + \Gamma_A\right], \tag{20}$$

где s–спиновый индекс; Γ_A – тетрадные компоненты спиновой связности $\Gamma_i(x)$. Вычислены вакуумные средние ТЭИ спинорного поля на четырехмерном групповом многообразии $\mathbb{R} \times G$. Например, выражение для плотности энергии имеет вид

$$\langle \hat{T}_{00}\rangle = -\frac{1}{2}\int \Lambda\psi_{\Lambda s}^{(-)\dagger}\psi_{\Lambda s}^{(-)}d\mu_0(q)d\mu(\lambda)d\mu(\Lambda)d\mu(s), \tag{21}$$

где $\psi_{\Lambda s}^{(-)}$ – отрицательно-частотное решение уравнения (20).

На группе вращений $G = SO(3)$ с метрикой $\gamma_{AB} = \mathrm{diag}(1, 1, a+1)$ проинтегрировано уравнение Дирака и получены выражения для вакуумных средних ТЭИ спинорного поля. Данные выражения имеют довольно громоздкий вид, и мы приведем выражение только для плотности энергии:

$$\langle \hat{T}_{00} \rangle = -\sum_{s=-1}^{1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=-j}^{n=j} (2j+1) \Big(an^2 + (j+1/2)^2 + m^2 + \tag{22}$$
$$+ s\sqrt{a+1}(2k-1)\sqrt{an^2 + (j+1/2)^2} + (a+1)(k-1/2)^2 \Big)^{1/2}.$$

Перенормированные вакуумные средние ТЭИ спинорного поля в случае $a = 0, m = 0$ есть:

$$\langle T_{AB} \rangle_{ren}^{(m=0)} = -\frac{1}{360}\,\mathrm{diag}(21, 2, 2, 17). \tag{23}$$

В **четвертой главе диссертации** исследуется задача интегрирования уравнения Клейна-Гордона и построения тензора энергии–импульса скалярного поля на многообразии $P' = \mathbb{R}^1 \times P$, где $P \simeq G/H$ – правое однородное пространство с группой Ли преобразований G и замкнутой подгруппой стационарности $H \subseteq G$ точки $y_0 \in P$. $\pi : G \to P$ – каноническая проекция. В первом параграфе вводится понятие инвариантной метрики, инвариантной относительно действия группы Ли G на однородном пространстве (класс G–инвариантных метрик). Метрический тензор в локальных координатах на P выражается через компоненты квадратичной формы G_{ab}, зададающей метрику, и правоинвариантные поля η на группе Ли G:

$$\gamma^{ij}(y) = G^{ab}\eta_a^i(y,h)\eta_b^j(y,h), \quad G^{ab} = G_{ab}^{-1}. \tag{24}$$

Вводится конструкция, аналогичная тетрадам в теории гравитации или подвижному реперу в дифференциальной геометрии, позволяющая работать с геометрическими величинами на однородном пространстве, не вводя на последнем локальных координат. Опишем данную конструкцию на примере смешанного тензорного поля $T_i^j(y)$ на однородном пространстве. А именно, определим квазитетрадные компоненты данного тензорного поля соотношением

$$T_b^a(y,h) = T_i^j(y)\eta_b^i(y,h)\sigma_j^a(y,h), \tag{25}$$

$$T_i^j(y) = T_b^a(y,h)\eta_a^j(y,h)\sigma_i^b(y,h), \quad h \in H, \quad a, b = 1, \ldots, \dim P. \tag{26}$$

В частном случае, если размерность однородного пространства совпадает с размерностью группы Ли преобразований, данная конструкция сводится к тетрадному формализму на группах Ли.

Получено выражение для квазитетрадных компонент тензоров Римана и Риччи на однородном пространстве через компоненты 2-формы G_{ab} и структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$:

$$R^a_{bcd} = \Gamma^a_{\bar{d}d}\Gamma^{\bar{d}}_{bc} - \Gamma^a_{\bar{d}c}\Gamma^{\bar{d}}_{bd} + C^{\bar{c}}_{cd}\Gamma^a_{b\bar{c}}, \quad R_{bd} = \Gamma^e_{da}\Gamma^a_{be} - \Gamma^a_{ea}\Gamma^e_{bd}, \tag{27}$$

$$\Gamma^a_{bc} = -\frac{1}{2}C^a_{bc} - \frac{1}{2}G^{ad}\left[G_{ec}C^e_{bd} + G_{eb}C^e_{cd}\right]. \tag{28}$$

Далее, в работе описывается гармонический анализ на однородных пространствах. Вводится понятие λ–представления, соответствующего однородному пространству. В отличие от гармонического анализа на группах Ли (в случае правого однородного пространства) левоинвариантные векторные поля ξ переходят в генераторы действия группы преобразований, а алгебра правоинвариантных векторных полей пропадает. Вместо нее используется функциональная алгебра ($\mathcal{F}$–алгебра) инвариантных операторов (операторов, коммутирующих с генераторами группы преобразований). Симплектические листы пуассоновой алгебры инвариантных функций играют роль невырожденных К-орбит в случае групп Ли. Ограничение скобки Пуассона на симплектический лист невырожденно, и определяет на нем симплектическую структуру. При помощи процедуры квантования симплектических листов вводятся дифференциальные операторы, действующие на функции от переменных $v \in V$ ((v, w) – канонические координаты Дарбу на симплектическом листе) и реализующие $\mathcal{F}$–алгебру инвариантных функций (λ–представление $\mathcal{F}$–алгебры). Далее определяется семейство обобщенных функций, которые могут быть разложены по "матричным" элементам λ–представления соответствующего однородному пространству. Данное семейство и определяет обобщенное преобразование Фурье.

Целое неотрицательное число

$$d(P) = \frac{1}{2}\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^\lambda - \dim\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^\lambda, \quad \mathfrak{h}^\lambda = \mathfrak{g}^\lambda \cap \mathfrak{h} \tag{29}$$

называется *дефектом* однородного пространства. В данной формуле $\mathfrak{h}$–алгебра Ли группы Ли H, λ – элемент общего положения ортогонального дополнения $\mathfrak{h}^\perp$, $\mathfrak{g}^\lambda$ – аннулятор ковектора λ. Для однородных пространств нулевого дефекта гармонический анализ значительно упрощается. В этом случае все симплектические листы нульмерны и переменных v нет.

Уравнение Клейна-Гордона на однородном пространстве P редуцируется к уравнению на лагранжевом подмногообразии V к симплектическому листу алгебры F–инвариантных функций с $d(P)$–переменными $v \in V$:

$$-H(\overline{\hat{a}^{\dagger}(v,\lambda)})\psi_\Lambda(v,\lambda) = \Lambda^2\psi_\Lambda(v,\lambda), \tag{30}$$

где $\hat{a}_\mu(v,\lambda)$ – операторы λ–представления F–алгебры.

Квазитетрадные компоненты вакуумных средних ТЭИ скалярного поля на однородном пространстве не зависят от локальных координат, и определяются выражением:

$$\langle\hat{T}_{A'B'}\rangle = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{\omega_\Lambda}\overline{\psi_\Lambda(\tilde{v},\lambda)}\psi_\Lambda(v,\lambda)\overline{c_\lambda(q',\tilde{v})}\Big(\frac{1}{2}\{l_{A'}(q',\lambda),l_{B'}(q',\lambda)\} + \zeta R_{A'B'} - \tag{31}$$
$$-\left(2\zeta-\frac{1}{2}\right)\Theta_{A'B'}G^{ab}Sp(ad_b)l_a(q',\lambda)\Big)c_\lambda(q',v)d\mu(v)d\mu(\tilde{v})d\mu_0(q')d\mu(\lambda)d\mu(\Lambda).$$

Функции $c_\lambda(q',v)$ определяются из системы уравнений:

$$l_\alpha(q',\lambda)c_\lambda(q',v) = 0, \quad [L_\mu(-il(q',\lambda)) - \hat{a}_\mu(v,\lambda)]c_\lambda(q',v) = 0, \tag{32}$$

где $\alpha = 1,\dots,\dim H$, $L_\mu(-i\eta)$ – образующие F-алгебры, $l(q',\lambda)$ – операторы λ-представления (в общем случае сингулярных К-орбит) группы Ли G соответствующего однородному пространству P.

Далее в работе рассмотрено однородное пространство на основе одной четырехмерной экспоненциальной группы Ли преобразований с коммутационными соотношениями

$$[e_2,e_3] = e_1, \quad [e_2,e_4] = e_2, \quad [e_3,e_4] = -e_3 \tag{33}$$

и подалгеброй изотропии $\mathfrak{h} = \{e_4\}$. Показано, что эффект поляризации вакуума в этом случае отсутствует, хотя соответствующее однородное пространство имеет кривизну и нетривиальную топологию.

В **приложении А** приведены выражения для вакуумных средних ТЭИ скалярного поля на локальной группе VI_4 с левоинвариантной метрикой.

В **заключении** перечислены основные результаты, полученные в диссертации, и выносимые на защиту.

Основные работы, опубликованные по теме диссертации:

1. Бреев А.И., Широков И.В., Разумов Д. Поляризация вакуума скалярного поля на многообразии, конформно эквивалентном $\mathbb{R} \times G$ //Изв. Вузов. Физика. - 2007. - N.10. - С. 50-56.

2. Бреев А.И., Широков И.В Поляризация вакуума спинорного поля на группах Ли //Изв. Вузов. Физика. - 2009. - N.8. - С. 51-57.

3. Бреев А.И. Поляризация вакуума на неунимодулярных группах Ли //Изв. Вузов. Физика. - 2010. - N4. - С. 34-40.

4. Бреев А.И., Широков И.В, Магазев А.А. Поляризация вакуума скалярного поля на группах Ли и однородных пространствах //ТМФ. - 2010. - Т.165. - N.1. - С. 267-286.

Список литературы

[1] Шаповалов А.В., Широков И.В. //ТМФ. - 1995. - Т.104. - N.2. - С. 195-213.

[2] Шаповалов А.В.,Широков И.В. //ТМФ. - 1996. - Т.106. - N.1. - С.3-14.

[3] Moretti V., Phys. Rev. D. **56** 7791, (1997).

Отпечатано на оборудовании
ООО «Издательство «ТМЛ-Пресс»
634050, г. Томск, ул. Советская, 33, оф. 1
Подписано к печати «8» 10 2010 г.
Тираж 100 экз. Заказ № 54