На правах рукописи

Киясов Сергей Николаевич

Классификация задач линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме

Специальность 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань — 2016

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Официальные оппоненты:

Данченко Владимир Ильич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры функционального анализа и его приложений Института прикладной математики и информатики, био- и нанотехнологий ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых»

Семенко Евгений Вениаминович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Института физико-математического и информационно-экономического образования ФГБОУ ВПО «Новосибирский государственный педагогический университет»

Сильвестров Василий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики факультета АиВТ ФГБОУ ВО «Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина»

Ведущая организация: ФАНО ФГБУН Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (ИМВЦ УНЦ РАН).

Защита состоится 20 октября 2016 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО КФУ по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35. Электронная версия автореферата и диссертации размещены на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета http://www.kpfu.ru.

Автореферат разослан

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 212.081.10, кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Благодаря усилиям нескольких поколений математиков, в основном советской (российской) математической школы, теория задачи *линейного сопряжения* для кусочно-аналитического вектора (векторно-матричная краевая задача Римана, граничная задача Гильберта, краевая задача Римана-Гильберта для нескольких неизвестных функций) при различных предположениях относительно гладкости контура уже к концу прошлого века приняла вполне законченный вид. Результаты этой работы для случая кусочно-гладких контуров и кусочно-гёльдеровских матриц-функций изложены в известных монографиях Н.П. Векуа, Н.И. Мусхелишвили, в работах Ф.Д. Гахова, Б.В. Хведелидзе. С конца 1950-х годов развитие теории задачи линейного сопряжения, в связи с исследованием систем сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и систем уравнений Винера-Хопфа, привело к постановке задачи для новых, а также более широких классов матриц-функций. Не ставя своей целью описать всю обширную библиографию вопроса, остановимся лишь на результатах, близких к теме данного исследования.

За прошедший период была изучена задача линейного сопряжения для матриц-функций с элементами из винеровского кольца (И.Ц. Гохберг, Н.Я. Крейн), задача линейного сопряжения для непрерывных (И.Б. Симоненко) и кусочно-непрерывных матриц-функций (И.Ц. Гохберг, М.Г. Крупник, Г.Ф. Манджавидзе). Был получен ряд результатов для измеримых ограниченных матриц-функций (И.И. Данилюк, И.Б. Симоненко, R.G. Douglas). Связь между задачей *дробно-линейного сопряжения* и задачей линейного сопряжения для двумерного вектора была впервые установлена А.Ш. Габиб-Заде. Рассматривалось также расширение класса контуров и получение достаточных условий ограниченности на них сингулярного интеграла (Б.А. Кац, М.Н. Монахов, Р.Б. Салимов, Е.В. Семенко, А.П. Солдатов, Н. Усманов, Б.В. Хведелидзе, М.Б. Холикова, П.Л. Шабалин, М.А. Шешко). В большинстве из этих работ вопрос построения *канонической матрицы* задачи линейного сопряжения был заменен эквивалентной задачей *факторизации* матрицы-функции. При этом выяснилось, что даже в случае непрерывной невырожденной матрицы-функции $G(t)$ факторизация с непрерывными множителями $G^{\pm}(t)$ существует не всегда. Это, с одной стороны, сделало актуальной задачу отыскания новых классов матриц-функций, допускающих факторизацию с непрерывными множителями (М.С. Будяну, И.Ц. Гохберг), а, с другой стороны, привело к формированию понятия факторизации в классах L_p, $0 < p < \infty$. Оказалось, что в случае непрерывных невырожденных матриц-функций эта факторизация не зависит от выбора p, однако уже для кусочно-непрерывных матриц-функций такая зависимость имеет место. Эти и ряд других вопросов, связанных с задачей факторизации в различных классах матриц-функций и контуров, рассмотрены в монографиях Г.С. Литвинчука и И.М. Спитковского и K.F. Giancey и I.Z. Gohberg.

Задача построения *приближенной факторизации* матрицы-функции и вычисления ее частных индексов, а также эффективно проверяемых оценок для них в общем случае не решена. Нет даже устоявшегося определения приближенной факторизации, что, в первую очередь, связано с неустойчивостью частных индексов и факторизационных множителей при малых изменениях матрицы-функции, а также с неоднозначностью определения крайних факторизационных множителей. Это обстоятельство порождает принципиальные трудности в теории факторизации матриц-функций и теории разрешимости соответствующей задачи линейного сопряжения. Речь идет о проблеме вычисления частных индексов, эффективно проверяемых достаточных условий их устойчивости (вычисления дефектных чисел задачи линейного сопряжения) и задаче построения приближенной факторизации матрицы-функции (нахождения приближенного решения задачи линейного сопряжения и системы сингулярных интегральных уравнений). К результатам, полученным в этом направлении, следует отнести работы Б.В. Боярского, И.Э. Вербицкого, И.Ц. Гохберга, В.Д. Диденко, В.А. Золотаревского, В.П. Кадушина, М.Г. Крейна, Н.Я. Крупника, Г.С. Литвинчука, Г.Ф. Манджавидзе, И.М. Спитковского, Н.Я. Тихоненко, И.Т. Хабибуллина, Г.Н. Чеботарева, А.Г. Шагалова, Ю.Л. Шмульяна, M. Rabindranathan и других.

К сожалению, в настоящее время имеется сравнительно немного примеров матриц-функций, факторизация которых либо их приближенная факторизация строится с той же степенью эффективности, как это сделано Ф.Д. Гаховым при решении скалярной задачи линейного сопряжения, и нет никаких оснований полагать, что это может быть сделано в общем случае. Поэтому важной задачей является отыскание классов матриц-функций, для которых поставленные вопросы могут быть решены положительно, и тему диссертации следует считать актуальной.

Степень разработанности темы. Прежде чем приступить к анализу результатов, непосредственно связанных с темой диссертации, приведем предложенную В.М. Адуковым в его докторской диссертации терминологию, связанную с понятием *эффективного* решения задачи и *явного решения* задачи (решения задачи *в замкнутой форме* или *в квадратурах*). Под последним В.М. Адуков понимает сведение задачи факторизации к решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений, матрицы которых выписываются в замкнутой форме (в квадратурах), а само число таких систем должно быть определено заранее. Так, первый результат решения задачи факторизации в замкнутой форме был получен Ф.Д. Гаховым, который заметил, что его формула для решения скалярной задачи непосредственно переносится на матричный случай для *функционально-коммутативных* матриц-функций, таких, что $G(t_1)G(t_2) = G(t_2)G(t_1)$ при любых точках t_1, t_2 контура. Другим случаем, когда задача факторизации была решена явно, является случай матричных многочленов. Сюда же следует отнести и метод К.М. Расулова сведения задачи линейного сопряжения для строго невырожденной матрицы-функции к системе одной скалярной и $n-1$ обобщенных скалярных задач Римана, которые, в случае, когда элементы всех строк матрицы-функции, кроме одной, являются рациональными функциями, решаются в замкнутой форме. Если же найден алгоритм решения задачи за конечное число шагов (заранее неизвестное), то такое решение задачи предлагается считать лишь эффективным.

К эффективным результатам, кроме уже перечисленных, следует отнести решение задачи факторизации мероморфных матриц-функций методом *отщепления нулей*, являющимся по сути аналогом метода Ф.Д. Гахова построения нормальной матрицы. Следует также отметить результат В.Г. Кравченко и А.М. Николайчука, показавших, что если какой-либо минор $n-1$ - го порядка матрицы-функции порядка n профакторизован, то факторизация самой матрицы-функции сводится к решению интегрального уравнения специального вида относительно одной неизвестной функции. Для матриц-функций второго порядка, хотя бы один из элементов которой не вырождается на Г, этими авторами были получены формулы, связывающие ее частные индексы с размерностью ядра фредгольмова и интегрального оператора, который строится по данной матрице-функции эффективно.

Задача линейного сопряжения с разрывными коэффициентами или с кусочно-непрерывной матрицей-функцией определенной подстановкой приводится к задаче с непрерывной матрицей-функцией, и может быть построена каноническая система решений задачи определенного класса. В некоторых случаях задачу с кусочно-непрерывной матрицей удается свести к скалярной задаче на римановой поверхности. Так, Э.И. Зверовичем было показано, что задачу, рассмотренную Г.П. Черепановым, можно свести к скалярной задаче на n – листной римановой поверхности. При этом установлены глубокие связи между задачей Римана для одной пары функций на римановой поверхности и соответствующей задачей для n пар функций на плоскости с матричным коэффициентом подстановочного типа (Э.И. Зверович, Л.И. Померанцева). Здесь следует отметить работы В.Е. Круглова, в которых матрица подстановок порождает абелеву группу. Им же исследована факторизация некоторых классов матриц-функций подстановочного типа, не являющихся функционально-коммутативными. Задача факторизации матриц-функций подстановочного типа, не являющихся функционально-коммутативными, рассматривалась также Л.П. Примачуком. Специальный класс матриц-функций второго порядка, которые умножением слева и справа на рациональные матрицы приводятся к треугольным матрицам-функциям, был рассмотрен И.М. Спитковским и А.М. Ташбаевым. Этот результаты лег в основу исследования T. Ehrhardt, F.O. Speck по классификации матриц-функций второго порядка, допускающих такие преобразования.

Оценивая результаты построения факторизации матрицы-функции в замкнутой форме, к уже отмеченным следует отнести применение разработанного В.М. Адуковым метода индексов и существенных многочленов конечной последовательности комплексных чисел или матриц к последовательности моментов матрицы-функции $G^{-1}(t)$ относительно контура Γ для вычисления индексов и явного построения факторизационных множителей аналитической и кусочно-аналитической матрицы-функции. Случай мероморфных и кусочно-мероморфных матриц-функций приводится к аналитическому и, в этом смысле, решение задачи линейного сопряжения для мероморфных матриц-функций также может быть получено в замкнутой форме. К этим результатам примыкает и результат построения факторизации треугольных и блочно треугольных матриц-функций с факторизуемыми диагональными блоками, а также матриц-функций второго порядка с мероморфной строкой и строго невырожденных матриц-функций, у которых все строки, кроме последней, мероморфны. Отметим также, что В.М. Адуковым решена задача приближенной факторизации аналитической матрицы-функции и установлена связь между задачей матричной аппроксимации Паде и задачей факторизации блочно-треугольной матрицы-функции специального вида. Здесь следует также отметить работы А.И. Аптекарева, В.Г. Лысова, С.П. Суетина, Д.Н. Тулякова, в которых ассимптотика решения матричной краевой задачи Римана-Гильберта применяется при доказательстве сильной ассимптотики аппроксимаций Эрмита-Паде, при изучении ассимптотики ортогональных многочленов и ассимптотических свойств полиномов Паде.

Цели и задачи. Целью данного исследования является разработка методов выделения новых классов $H-$непрерывных матриц-функций второго и третьего порядков (непрерывных по Гёльдеру), заданных на простом гладком замкнутом контуре, для которых удается решить соответствующую задачу линейного сопряжения в классе кусочно-аналитических вектор-функций в замкнутой форме, а также (в случае матриц-функций второго порядка) – метода построения их приближенной факторизации. Основными задачами исследования являются:

1. Обоснование возможности решения задачи линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора в замкнутой форме при наличии одного, соответ-

ственно двух частных кусочно-мероморфных решений задачи.

2. Описание структуры множества кусочно-мероморфных решений задачи линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора.

3. Выделение классов задач линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме, определенных структурой множества кусочно-мероморфных решений задачи.

4. Выделение классов общих характеристических систем сингулярных интегральных уравнений для двумерного и трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме.

5. Выделение классов сингулярных интегральных уравнений с двумя и тремя ядрами, разрешимых в замкнутой форме.

6. Выделение классов задач линейного сопряжения, разрешимых в замкнутой форме, определенных свойствами решений общей двумерной и трехмерной характеристической системы сингулярных интегральных уравнений и сингулярных интегральных уравнений с двумя и тремя ядрами.

7. Получение оценок для частных индексов и построение приближенной факторизации достаточно общего класса матриц-функций второго порядка.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Получены представления для матриц-функций второго и третьего порядков и выделены классы соответствующих матриц-функций, допускающих эффективную факторизацию.

Приведен явный вид вектор-функций канонической системы решений задачи линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора при наличии одного, соответственно двух частных кусочно-мероморфных решений задачи.

Изучена структура множества кусочно-мероморфных решений задачи линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора и выделены соответствующие классы задач линейного сопряжения, разрешимых в замкнутой форме.

Исследована общая характеристическая система сингулярных интегральных уравнений. Отмечено, что эквивалентной этой системе задаче линейного сопряжения соответствует целое семейство общих характеристических систем, зависящее от n H–непрерывных функций, которыми в ряде случаев можно распорядиться так, что удается отыскать некоторое решение системы, что позволило в соответствующих главах работы для случая двумерных и трехмерных общих характеристических систем выделить классы эквивалентных им задач линейного сопряжения, разрешимых в замкнутой форме.

Построена теория сингулярных интегральных уравнений с n ядрами, которая в дальнейшем применяется для выделения при $n = 2$ и $n = 3$ классов таких уравнений и эквивалентных им задач линейного сопряжения, разрешимых в замкнутой форме.

Получены оценки для частных индексов гельдеровских матриц-функций второго порядка, условия равенства нулю частных индексов достаточно общего класса матриц-функций второго порядка и построена их приближенная факторизация.

Теоретическая и практическая значимость. Работа в основном носит теоретический характер. Ее результаты могут служить также новым методом решения задачи линейного сопряжения для треугольных, мероморфных и других матриц-функций второго и третьего порядков, если известно одно соответственно два частных решения задачи.

Методология и методы исследования. В работе применяются как классические методы теории функций комплексного переменного и теории линейных систем сингулярных интегральных уравнений, так и предложенные автором методы классификации задач линейного сопряжения, разрешимых в замкнутой форме, к которым условно можно отнести следующие:

Метод матричных представлений матриц-функций второго и третьего порядков.

Метод интегральных тождеств, основанный на частном случае формулы перестановки порядка интегрирования в повторном особом интеграле.

Метод выделения классов задач линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме, основанный на структуре множества кусочно-мероморфных решений задачи.

Метод выделения классов задач линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме, основанный на свойствах решений общих характеристических систем сингулярных интегральных уравнений.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Явные формулы вектор-функций канонической системы решений задачи линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора при одном соответственно двух известных частных решениях задачи.

2. Теоремы о структуре множества кусочно-мероморфных решений задачи линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора.

3. Теория общей характеристической системы сингулярных интегральных уравнений и метод, позволяющий отыскивать ее частные решения, не переходя к эквивалентной задаче линейного сопряжения.

4. Теорема об эффективной разрешимости сингулярных интегральных уравнений с n ядрами.

5. Классификация задач линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме, основанная на свойствах решений двумерных и трехмерных общих характеристических систем и сингулярных интегральных уравнений с двумя и тремя ядрами.

6. Оценка для частных индексов матриц-функций второго порядка.

7. Формулы приближенной факторизации достаточно общего класса матриц-функций второго порядка

Апробация работы. По результатам диссертации 2 декабря 2015 года был сделан обзорный доклад на семинаре под руководством члена-корреспондента РАН В.В. Напалкова (Уфа, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН), на международных Казанских летних научных школах-конференциях в 2011, 2013, 2015 годах, на международных конференциях «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» (Ростов-на-Дону, 2015, 2016), на международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 2000), на школе-конференции «Теория функций, ее приближения и смежные вопросы», посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова (Казань, 1999), на школе-конференции «Алгебра и Анализ», посвященной 100-летию со дня рождения Б.М. Гагаева (Казань, 1997), а также неоднократно на итоговых научных конференциях Казанского университета.

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 22 публикациях, из которых 11 публикаций – в журналах, определенных Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов докторских диссертаций.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 310 страниц и состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы, заключения и списка литературы из 135 наименований. В работе используется двойная нумерация по разделам каждой главы. Поэтому при ссылках на соответствующие формулы другой главы это специально оговаривается.

Содержание работы

Во введении дается краткий обзор результатов, близких к теме диссертации, обосновывается ее актуальность, научная новизна и теоретическая значимость работы.

Первая глава состоит из 3 разделов. Здесь излагаются общие подходы к выделению классов задач линейного сопряжения, разрешимых в замкнутой форме, которые реализуются в соответствующих главах работы для случая $n = 2$ и $n = 3$.

В первом разделе приводятся основные понятия, связанные с задачей линейного сопряжения для n - мерного вектора, а также вводятся необходимые обозначения и определения.

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур, разбивающий расширенную комплексную плоскость на две области D^+ и D^- $(0 \in D^+)$, $G(t) = ||g_{ij}(t)||$, $i, j = \overline{1, n}$ – H–непрерывная и не особенная на Γ матрица-функция порядка n ($\Delta(t) = \det G(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$), $\mathbf{g}(t) = (g^1(t), g^2(t), \dots, g^n(t))$ – вектор-функция класса $H(\Gamma)$. Задача линейного сопряжения для n – мерного вектора состоит в отыскании кусочно-аналитической вектор-функции

$$\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z), \dots w^n(z)\big)$$

заданного порядка k на бесконечности (положительный порядок означает порядок полюса) с H–непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t) + \mathbf{g}(t).$$

Если вектор-функция $\mathbf{g}(t) \equiv 0$ на Γ, получим однородную задачу линейного сопряжения.

Совокупность n решений однородной задачи линейного сопряжения

$$\mathbf{w}_{\mathbf{1},\varkappa_\mathbf{1}}(z), \mathbf{w}_{\mathbf{2},\varkappa_\mathbf{2}}(z), \dots, \mathbf{w}_{\mathbf{n},\varkappa_\mathbf{n}}(z),$$

кусочно-аналитических в конечной плоскости и имеющих на бесконечности порядки $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \dots, -\varkappa_n$ соответственно, называется *канонической системой решений* этой задачи, если выполняются следующие условия:

1. Определитель матрицы

$$X(z) = ||w^i_{j,\varkappa_j}(z)||,\ i, j = \overline{1, n}$$

не обращается в нуль ни в одной конечной точке плоскости.

2. Определитель $\Delta^0(z) = \det \|z^{\varkappa_j} w^i_{j,\varkappa_j}(z)\|$, $i, j = \overline{1, n}$ принимает на бесконечности конечное значение, отличное от нуля.

Матрица $X(z)$ называется *канонической матрицей* однородной задачи линейного сопряжения. Целые числа $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_n$, которые можно считать упорядоченными по убыванию, определяются однозначно и называются *частными индексами*, а их сумма $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n = \operatorname{ind} \det G(t)$ – *суммарным индексом* матрицы-функции $G(t)$) (индекс Коши $\det G(t)$).

По канонической системе решений общее решение однородной и неоднородной задачи линейного сопряжения заданного порядка на бесконечности записывается явно. Поэтому ниже, как правило, рассматривается лишь однородная задача линейного сопряжения.

В современной литературе задача построения канонической матрицы формулируется в виде следующей эквивалентной факторизационной задачи: требуется получить на Γ представление

$$G(t) = G^{+}(t)\Lambda(t)G^{-}(t),\ \Lambda(t) = \mathrm{diag}\{\mathrm{t}^{\lambda_1}, \mathrm{t}^{\lambda_2}, \ldots, \mathrm{t}^{\lambda_n}\},$$

в котором $G^{\pm}(t)$ – H–непрерывные и обратимые матрицы-функции, аналитически продолжимые вместе с $[G^{\pm}(t)]^{-1}$ в области $D^{\pm}$ соответственно – *левая факторизация Винера-Хопфа* (λ_k, $k = \overline{1,n}$ – левые частные индексы).

Аналогично определяется *правая факторизация Винера-Хопфа* $G(t)$: $G(t) = G_1^{-}(t)\Lambda_1(t)G_1^{+}(t)$, $t \in \Gamma$ *с правыми частными индексами* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. В данной работе используется, в основном, первое представление. Поэтому всюду в дальнейшем под факторизацией матрицы-функции $G(t)$ будем понимать левую факторизацию Винера-Хопфа, а ее левые частные индексы ($\lambda_k = \varkappa_k$, $k = \overline{1,n}$) называть частными индексами $G(t)$.

Нам пришлось расширить класс искомых решений до кусочно-мероморфных решений, допуская наличие в областях $D^{\pm}$ конечного числа полюсов. Через M^{+} и M^{-} обозначены классы H–непрерывных на Γ функций, мероморфно-продолжимых в области D^{+} и D^{-} соответственно. Каждому решению задачи линейного сопряжения $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z), \ldots, w^n(z))$ поставлен в соответствие набор определенных на Γ функций $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t))$, в котором $\lambda_j(t) = w^{j+}(t)/w^{j-}(t)$, $j = \overline{1,n}$ (полагаем, что компонента λ_k этого набора равна тождественному нулю, неограничена или является неопределенной, что соответственно обозначается как 0, ∞, $0/0$, если $w^{k+}(t) \equiv 0$, $w^{k-}(t) \equiv 0$ или $w^{k\pm}(t) \equiv 0$; $k = \overline{1,n}$, $t \in \Gamma$). Набор, соответствующий решению задачи, для которого $w^{k\pm}(t) \not\equiv 0$, $k = \overline{1,n}$, назван *невырожденным.* Для такого набора вводится понятие *подобного* набора с соответственно пропорциональными компонентами.

Введены также классы $\bar{M}^{+}$ и $\bar{M}^{-}$ определенных на Γ функций, допускающих особенности на контуре и мероморфно-продолжимых в области D^{+} и D^{-} соответственно. Для любого решения задачи линейного сопряжения с невырожденным набором $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t))$ отношения

$$\Phi^{j-1}(z) = \frac{w^j(z)}{w^1(z)},\ j = \overline{2,n},\ z \in D^{\pm}$$

будут компонентами кусочно-мероморфного решения

$$\mathbf{\Phi}(z) = (\Phi^1(z), \Phi^2(z), \ldots, \Phi^{n-1}(z))\ (\Phi^{k\pm}(t) \in \bar{M}^{\pm},\ k = \overline{1,n-1},\ t \in \Gamma)$$

системы задач дробно-линейного сопряжения (при $n = 2$ – задачи дробно-линейного сопряжения)

$$\Phi^{k+}(t) = \frac{g_{k1}(t) + g_{k2}(t)\Phi^{1-}(t) + g_{k3}(t)\Phi^{2-}(t) + \cdots + g_{kn}(t)\Phi^{(n-1)-}(t)}{g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^{1-}(t) + g_{13}(t)\Phi^{2-}(t) + \cdots + g_{1n}(t)\Phi^{(n-1)-}(t)},$$
$$k = \overline{1, n-1}, \ t \in \Gamma.$$

Обратно, по решение $\mathbf{\Phi}(z)$ этой задачи формулы

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^{1-}(t) + g_{13}(t)\Phi^{2-}(t) + \cdots + g_{1n}(t)\Phi^{(n-1)-}(t) =$$
$$= w^{1+}(t)/w^{1-}(t), \ w^{j\pm}(t) = \Phi^{(j-1)\pm}(t)w^{1\pm}(t), \ j = \overline{2, n}$$

определят на Γ компоненты решения соответствующей однородной задачи линейного сопряжения.

Во втором разделе главы рассматривается общая характеристическая система сингулярных интегральных уравнений при условии ее нормальной разрешимости:

$$A(t)\mathbf{w}(t) + B(t)S[K\mathbf{w}](t) = \mathbf{f}(t), \ \det(A(t) \pm B(t)K(t)) \neq 0, \ t \in \Gamma.$$

Здесь $A(t) = ||a_{ij}(t)||$, $B(t) = ||b_{ij}(t)||$, $i, j = \overline{1, n}$, $K(t) = \mathrm{diag}\{k_1(t), k_2(t), \ldots, k_n(t)\}$ – H–непрерывные на Γ матрицы-функции, через $S[\mathbf{w}](t)$ обозначен сингулярный оператор, а правая часть системы взята в виде $\mathbf{f}(t) = 2B(t)\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{M}(t) = (M_1(t), M_2(t), \ldots, M_n(t))$, где $M_1(t), M_2(t), \ldots, M_n(t)$ – полиномы.

Вводя кусочно-аналитическую в конечной части плоскости вектор-функцию $\mathbf{w}(z)$, предельные значения которой на контуре связаны с решением исходной системы формулами

$$\mathbf{w}^+(t) = P\left[K\mathbf{w}\right](t) - \mathbf{M}(t), \ \mathbf{w}^-(t) = Q\left[K\mathbf{w}\right](t) + \mathbf{M}(t),$$

где $P = [I + S]/2$, $Q = [I - S]/2$ (I – единичный оператор), придем, в случае $\det K(t) \neq 0$, к однородной задаче линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$G(t) = -(A(t)K^{-1}(t) + B(t))^{-1}(A(t)K^{-1}(t) - B(t)).$$

Обратно, если $\mathbf{w}(z)$ – кусочно-аналитическое в конечной плоскости решение полученной задачи линейного сопряжения, то функции $w^j(t) = (w^{j+}(t) + w^{j-}(t))/k_j(t)$, $j = \overline{1, n}$ будут компонентами решения $\mathbf{w}(t)$ соответствующей общей характеристической системы, правая часть которой определяется главной частью решения $\mathbf{w}(z)$ на бесконечности. Показано, что нули $\det K(t)$ не влияют на картину разрешимости общей характеристической системы. Поэтому всюду ниже, если это специально не оговаривается, предполагаем выполнение на Γ неравенства $\det K(t) \neq 0$.

Кроме того, рассматриваемой задаче линейного сопряжения эквивалентно в указанном выше смысле семейство общих характеристических систем вида

$$A_\alpha(t)\mathbf{w}(t) + B(t)S[K_\alpha \mathbf{w}](t) = 2B(t)\mathbf{M}(t), \ t \in \Gamma$$

с матрицами-функциями

$$A_\alpha(t) = A(t)E_\alpha,\ K_\alpha(t) = K(t)E_\alpha,$$
$$E_\alpha = \mathrm{diag}\{\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)\},$$

где $\alpha_k(t)$, $k = \overline{1,n}$ – H- непрерывные на контуре функции.

Для любого решения $\mathbf{w}(z)$ полученной задачи линейного сопряжения, сумма предельных значений компонент которого $w^{j+}(t) + w^{j-}(t) \not\equiv 0$, $t \in \Gamma$, $j = \overline{1,n}$, всегда найдется такая общая характеристическая система, компоненты решения $\mathbf{w}(t)$ которой будут совпадать: $w^j(t) \equiv w(t),\ j = \overline{1,n}$, а сама эта система (матрица-функция E_α) определяется из равенств

$$w(t) = \frac{w^{1+}(t) + w^{1-}(t)}{k_1(t)\alpha_1(t)} = \frac{w^{2+}(t) + w^{2-}(t)}{k_2(t)\alpha_2(t)} = \cdots = \frac{w^{n+}(t) + w^{n-}(t)}{k_n(t)\alpha_n(t)}.$$

Тогда решение такой общей характеристической системы сведется к отысканию общего решения на Γ сингулярных интегральных уравнений

$$\textstyle\sum_{j=1}^n \alpha_j(t)a_{ij}(t)w(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)S[k_j\alpha_j w](t) = 2\sum_{j=1}^n b_{ij}(t)M_j(t),\ i = \overline{1,n}.$$

Если это решение найдено, то формулы

$$w^{j+}(t) = P[k_j\alpha_j w](t) - M_j(t),\ w^{j-}(t) = Q[k_j\alpha_j w](t) + M_j(t),\ j = \overline{1,n},$$

определят предельные значения на Γ компонент соответствующего решения задачи линейного сопряжения.

Пусть $\det B(t) \neq 0$. Рассмотрим определенные на Γ функции

$$\begin{aligned}
\omega_1 = \alpha_1 \left(|A_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n| + k_1|B|\right) + \\
+\alpha_2|A_2, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n| + \cdots \\
\cdots + \alpha_n|A_n, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n|, \\
\omega_2 = \alpha_1|B_1, A_1, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n| + \\
+\alpha_2 \left(|B_1, A_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n| + k_2|B|\right) + \cdots \\
\cdots + \alpha_n|B_1, A_n, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n|, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_n = \alpha_1|B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, A_1| + \\
+\alpha_2|B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, A_2| + \cdots \\
\cdots + \alpha_n \left(|B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, A_n| + k_n|B|\right);
\end{aligned}$$

$$\delta_1 = \alpha_1 \left(|A_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n| - k_1|B|\right) +$$

$$+\alpha_2|A_2, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n| + \cdots$$
$$\cdots + \alpha_n|A_n, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n|$$
$$\delta_2 = \alpha_1|B_1, A_1, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n| +$$
$$+\alpha_2\left(|B_1, A_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n| - k_2|B|\right) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha_n|B_1, A_n, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_n = \alpha_1|B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, A_1| +$$
$$+\alpha_2|B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, A_2| + \cdots$$
$$\cdots + \alpha_n\left(|B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, A_n| - k_n|B|\right).$$

Здесь под выражением вида

$$|A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}, B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_m}|,\ k + m = n$$

понимается определитель порядка n, первыми k столбцами которого служат столбцы матрицы A с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ соответственно, а остальными последовательными столбцами являются столбцы матрицы B с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_m$ ($|A_1, \ldots, A_n| = |A| = \det A,\ |B_1, \ldots, B_n| = |B| = \det B$).

При указанных выше требованиях, введенные функции обладают тем свойством, что отношения

$$\frac{\delta_{j+1}(t)}{\delta_1(t)} = \Phi^{j+}(t),\ \frac{\omega_{j+1}(t)}{\omega_1(t)} = \Phi^{j-}(t),\ j = \overline{1, n-1}$$

являются функциями класса $\bar{M}^+$ и $\bar{M}^-$ соответственно. Исключая функции $\alpha_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, получим, что эти отношения будут предельными значениями на Γ кусочно-мероморфного решения

$$\mathbf{\Phi}(z) = (\Phi^1(z), \Phi^2(z), \ldots, \Phi^{n-1}(z))$$

соответствующей системы задач дробно-линейного сопряжения.

Пусть $|B(t)| \equiv 0$, $t \in \Gamma$. В этом случае пришлось потребовать выполнения дополнительного, не вытекающего из условий, наложенных на исходную систему, предположения, что матрица-функция $B(t)$ не является нулевой матрицей ни на какой дуге контура Γ (система сингулярных интегральных уравнений не вырождается в алгебраическую систему на соответствующей дуге). Это предположение позволяет привести такую систему к общей характеристической системе с $|B(t)| \neq 0$, $t \in \Gamma$ и исследуется аналогично.

При априорных предположениях, что функции $\delta_j(t)$, $j = \overline{1,n}$ или функции $\omega_j(t)$, $j = \overline{1,n}$ – функции класса M^+ соответственно M^-, а также некоторые другие предположения, в соответствующих главах работы получены условия на коэффициенты общей характеристической системы, позволяющие записать при $n = 2$

одно, а при $n = 3$ два частных решения соответствующей задачи линейного сопряжения, что, согласно результатам второй и третьей главы, позволяет построить ее каноническую систему решений.

В последнем разделе главы рассмотрен на Γ класс сингулярных интегральных уравнений вида

$$K\varphi(t) \equiv a_0(t)\varphi(t) + a_1(t)S[k_1\varphi](t) + \cdots + a_n(t)S[k_n\varphi](t) = f(t),$$

в котором $a_0(t), a_i(t), k_i(t),\ i = \overline{1,n}$ – H–непрерывные функции точек контура, а через $S[\omega](t)$ обозначен сингулярный оператор. Если при $i \neq j,\ i,j = \overline{1,n},\ a_i(t) \not\equiv a_j(t),\ k_i(t) \not\equiv k_j(t),\ t \in \Gamma$, то это уравнение названо сингулярным интегральным уравнением с n ядрами. Заметим, что именно из таких уравнений состоит система сингулярных интегральных уравнений раздела 2. Рассмотрен также лишь случай нормальной разрешимости уравнения, полагая, что выражение

$$\Delta_n(t) = \Delta_{2n}(t)/\Delta_{1n}(t),\ \Delta_{1n}(t) = a_0(t) + \Delta_0(t),$$
$$\Delta_{2n}(t) = a_0(t) - \Delta_0(t),\ \Delta_0(t) = a_1(t)k_1(t) + \cdots + a_n(t)k_n(t)$$

не обращается в нуль и бесконечность на контуре, а правую часть уравнения берем в виде $f(t) = 2M_1(t)a_1(t) + \cdots + 2M_n(t)a_n(t)$, где $M_k(t),\ k = \overline{1,n}$ – полиномы.

Пусть $\varphi(t)$ – решение этого уравнения (в случае его разрешимости). Тогда функции $w^{j+}(t) = P[k_j\varphi](t) - M_j(t), \quad w^{j-}(t) = Q[k_j\varphi](t) + M_j(t),\ j = \overline{1,n}$ будут предельными значениями на Γ решения однородной задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$G(t) = G_0(t) - E, \quad G_0(t) = ||g^0_{ij}(t)||,$$
$$(g^0_{ij}(t) = 2k_i(t)a_j(t)/\Delta_{1n}(t),\ \det G_0(t) = 0),\ i,j = \overline{1,n}$$
$$\det G(t) = (-1)^n\Delta_n(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$$

и главной частью $(M_1(z), M_2(z), \ldots, M_n(z))$ на бесконечности. Обратно, если $\mathbf{w}(z)$ – решение задачи линейного сопряжения, то H–непрерывная на Γ функция

$$\varphi(t) = \frac{w^{1+}(t) + w^{1-}(t)}{k_1(t)} = \cdots = \frac{w^{n+}(t) + w^{n-}(t)}{k_n(t)}$$

будет решением уравнения, правая часть которого определяется главной частью решения $\mathbf{w}(z)$ на бесконечности. Исчезающему на бесконечности решению задачи линейного сопряжения соответствует решение однородного уравнения.

Показано, что для союзных однородных уравнений $K\varphi(t) = 0$ и

$$K'\psi(t) \equiv a_0(t)\psi(t) - k_1(t)S[a_1\psi](t) - \cdots - k_n(t)S[a_n\phi](t) = 0$$

соответствующие задачи линейного сопряжения оказываются союзными.

Рассмотрено также следующее уравнение с n ядрами:

$$K_\alpha \varphi \equiv a_0\varphi + a_1\alpha_1^{-1}S[k_1\alpha_1\varphi] + \cdots + a_n\alpha_n^{-1}S[k_n\alpha_n\varphi] = f_\alpha,$$

где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ – H – непрерывные функции точек контура, не имеющие нулей на Γ, а правая часть имеет вид

$$f_\alpha(t) = 2M_1(t)a_1(t)\alpha_1^{-1}(t) + \cdots + 2M_n(t)a_n(t)\alpha_n^{-1}(t).$$

Это уравнение эквивалентно в указанном выше смысле однородной задаче линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$G_\alpha(t) = \mathrm{diag}\{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\}G(t)\mathrm{diag}\{\alpha_1^{-1}(t), \ldots, \alpha_n^{-1}(t)\},$$

где матрица-функция $G(t)$ определена выше.

Указаны случаи, когда $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ удается подобрать так, чтобы соответствующая матрица-функция $G_\alpha(t)$ факторизовалась эффективно, что позволило в некоторых случаях эффективно построить факторизацию матрицы-функции $G(t)$.

Результаты этого пункта сформулированы в виде теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть коэффициенты уравнения $K\varphi(t) = 0$ H–непрерывны, коэффициент $a_0(t)$ не обращается в нуль на Γ, а остальные коэффициенты уравнения удовлетворяют одному из условий:*

1) *для некоторого фиксированного значения индекса j, $j = \overline{1,n}$ отношения $a_i(t)/a_j(t)$, $i = \overline{1,n}$ или отношения $k_i(t)/k_j(t)$, $i = \overline{1,n}$ – рациональные функции без нулей и полюсов на контуре;*

2) *для некоторых фиксированных значений индексов $1 \le k \le m$, $m+1 \le j \le n$ таких, что отношения $a_i(t)/a_k(t)$, $i = \overline{1,m}$, а также отношения $k_i(t)/k_j(t)$, $i = \overline{m+1,n}$ – рациональные функции без нулей и полюсов на контуре; выражения $a_{m+1}(t)k_{m+1}(t) + \cdots + a_n(t)k_n(t) \pm a_0(t)$ не обращаются в нуль и числитель функции*

$$\frac{a_k^{-1}k_j^{-1}a_0 + a_k^{-1}(a_{m+1}k_{m+1} + \cdots + a_nk_n)}{a_k^{-1}k_j^{-1}a_0 - a_k^{-1}(a_{m+1}k_{m+1} + \cdots + a_nk_n)}$$

– функция класса M^+, а ее знаменатель – рациональная функция, либо знаменатель этой функции – функция класса M^-, а ее числитель – рациональная функция.

Тогда решение уравнения может быть найдено эффективно.

В первом разделе второй главы получены представления для H–непрерывных и не особенных на Γ матриц-функций второго порядка, из которых делаются некоторые предварительные заключения о возможности их эффективной факторизации. Так, если элемент $g_{11}(t)$ не имеет нулей на контуре, получено представление

$$G(t) = G_{11}^+(t)G_0(t)G_{11}^-(t),$$

в котором

$$G_{11}^{+} = \begin{pmatrix} g_{11}^{+} & 0 \\ g_{11}^{+}P[\frac{g_{21}}{g_{11}}] + \frac{\Delta^{+}}{g_{11}^{+}}\{P[Q[\frac{g_{21}}{g_{11}}]\frac{(g_{11}^{+})^2}{\Delta^{+}}]\} & \frac{\Delta^{+}}{g_{11}^{+}} \end{pmatrix},$$

$$G_{11}^{-} = \begin{pmatrix} g_{11}^{-} & g_{11}^{-}Q[\frac{g_{12}}{g_{11}}] + \frac{1}{g_{11}^{-}\Delta^{-}}\{Q[P[\frac{g_{12}}{g_{11}}](g_{11}^{-})^2\Delta^{-}]\} \\ 0 & \frac{1}{g_{11}^{-}\Delta^{-}} \end{pmatrix},$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & P[P[\frac{g_{12}}{g_{11}}](g_{11}^{-})^2\Delta^{-}] \\ Q[Q[\frac{g_{21}}{g_{11}}]\frac{(g_{11}^{+})^2}{\Delta^{+}}] & 1 + \{P[P[\frac{g_{12}}{g_{11}}](g_{11}^{-})^2\Delta^{-}]\}\{Q[Q[\frac{g_{21}}{g_{11}}]\frac{(g_{11}^{+})^2}{\Delta^{+}}]\} \end{pmatrix}.$$

Из этого представления, в частности, следует, что если отношение g_{21}/g_{11} есть предельное значение на Γ функции, аналитической в D^{+}, либо отношение g_{12}/g_{11} есть предельное значение на Γ функции, аналитической в D^{-} и исчезающей на бесконечности, либо главная часть этой функции на бесконечности есть полином, степень k которого удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{k} + 2\varkappa_{11} - \varkappa < 0,$$

то матрица-функция $G_0(t)$ становится треугольной и матрица-функция $G(t)$ факторизуется эффективно.

Замечание 2.1. Полученные условия фактически означают, что можно указать матрицы-функции $H^{+}(t)$ соответственно $H^{-}(t)$ с элементами, аналитически продолжимыми в соответствующие области такие, что матрица-функция $H^{+}(t)G(t)$ или $G(t)H^{-}(t)$ становится треугольной.

Во втором разделе второй главы изучается структура множества кусочно-мероморфных решений однородной задачи линейного сопряжения для двумерного вектора

Пусть $\mathbf{w}(z)$ – решение задачи линейного сопряжения с невырожденной парой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ (определение 2.1). Отмечено, что существование решения этой задачи с вырожденной компонентой пары, за исключением решения $\mathbf{w}(z) \equiv 0$, возможно лишь, когда матрица-функция $G(t)$ будет диагональной, треугольной либо приводится к таковой, как отмечено в сделанном выше замечании. Во всех этих случаях решение задачи линейного сопряжения может быть записано в замкнутой форме. Поэтому на случаях существования решения задачи с вырожденной парой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ мы не останавливаемся. Доказано

Предложение 2.1. *Кусочно-мероморфные решения задачи линейного сопряжения* $\mathbf{w}_1(z)$ *и* $\mathbf{w}_2(z)$, *матрица-функция которой не является диагональной, будут решениями с одной и той же невырожденной парой* $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ *тогда и только тогда, если* $\mathbf{w}_2(z) \equiv r(z)\mathbf{w}_1(z)$, *где* $r(z)$ *–рациональная функция без полюсов на* Γ.

Отметим, что для матриц-функций третьего порядка подобное утверждение становится более содержательным.

Так как формула

$$\mathbf{w}(z) = r_1(z)\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z) + r_2(z)\mathbf{w}_{2,\varkappa_2}(z),$$

в которой $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$ и $\mathbf{w}_{2,\varkappa_2}(z)$ – каноническая система решений, определяет кусочно-мероморфное решение задачи для любых рациональных функций $r_1(z)$ и $r_2(z)$, не имеющих полюсов на контуре, то множество всех кусочно-мероморфных решений этой задачи может быть представлено в виде бесконечной суммы непересекающихся подпространств V_k, $k = 1, 2, \ldots$, образованных решениями задачи с одной и той же парой $(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t))$ (V_0 содержит лишь нулевое решение с парой (0/0,0/0), которое будем считать принадлежащим всем V_k).

Пусть $\mathbf{w}(z)$ – решение задачи линейного сопряжения с невырожденной парой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$, компоненты которой не обращаются в нуль и бесконечность на Γ. Обозначим через $T_n(z)$ и $T_p(z)$ полиномы, определенные с точностью до мультипликативных постоянных, нулями которых служат соответственно все конечные нули и полюсы отношений

$$\Phi^+(z) = \frac{w^{2+}(z)}{w^{1+}(z)},\ \Phi^-(z) = \frac{w^{2-}(z)}{w^{1-}(z)},$$

определяющих кусочно-мероморфное решения $\Phi(z)$ задачи дробно-линейного сопряжения, связывающей его предельные значения на Γ условием

$$g_{11}(t)\Phi^+(t) - g_{22}(t)\Phi^-(t) + g_{12}(t)\Phi^+(t)\Phi^-(t) = g_{21}(t).$$

Тогда в качестве представителя соответствующего подпространства берем решение

$$\mathbf{w}(z) = \left(\lambda_1(z)T_p(z), \lambda_2(z)T_n(z)\right),$$

где $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$ – кусочно-аналитические в конечной части плоскости функции без нулей на контуре с H-непрерывными предельными значениями $\lambda_1^{\pm}(t)$, $\lambda_2^{\pm}(t)$ соответственно, имеющие на бесконечности порядки $-\varkappa_{\lambda_1}$ и $-\varkappa_{\lambda_2}$ $(\lambda_k^+(t)/\lambda_k^-(t) = \lambda_k(t),\ k = 1, 2)$. Здесь через $\varkappa_{\lambda_1}$ и $\varkappa_{\lambda_2}$ обозначены индексы Коши компонент пары $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$.

Определение 2.2. Будем называть кусочно-мероморфное решение $\Phi(z)$ задачи дробно-линейного сопряжения решением с парой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$, если на Γ

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) = \lambda_1(t),\ g_{22}(t) + \frac{g_{21}(t)}{\Phi^-(t)} = \lambda_2(t).$$

Определение 2.3. Две невырожденные пары определенных на Γ функций $(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t))$ и $(\tilde\lambda_1(t),\ \tilde\lambda_2(t))$ назовем подобными, если всюду на контуре их компоненты пропорциональны.

Определение 2.4. Задачи дробно-линейного сопряжения $g_{11}(t)\Phi^+(t) - g_{22}(t)\Phi^-(t) + g_{12}(t)\Phi^+(t)\Phi^-(t) = g_{21}(t)$. и $f_{11}(t)\Psi^+(t) - f_{22}(t)\Psi^-(t) + f_{12}(t)\Psi^+(t)\Psi^-(t) = f_{21}(t)$ назовем подобными, если $f_{ij}(t) = h^{j-i}(t)g_{ij}(t),\ i,j = 1,2,$ где $h(t)$ – некоторая определенная на Γ функция ($f_{12}(t)f_{21}(t) = g_{12}(t)g_{21}(t) \in H(\Gamma)$).

Так как компоненты решения этих задач могут быть функциями классов $\bar{M}^+$ и $\bar{M}^-$, то $f_{12}(t)$ и $f_{21}(t)$ могут иметь на Γ особенности.

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi(z)$ – кусочно-мероморфное решение задачи дробно-линейного сопряжения с невырожденной парой $(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t))$. Тогда $\Phi(z)$ будет решением подобной задачи с коэффициентами*

$$f_{12} = \frac{\tilde{\lambda}_1 - g_{11}}{\lambda_1 - g_{11}} g_{12} = -\frac{g_{21}}{\Phi^+\Phi^-},\ f_{21} = \frac{\tilde{\lambda}_2 - g_{22}}{\lambda_2 - g_{22}} g_{21} = -g_{12}\Phi^+\Phi^-,$$

определяющим подобную пару $(\tilde{\lambda}_1(t),\ \tilde{\lambda}_2(t))$, связанную с парой $(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t))$ соотношениями

$$\lambda_1 + \tilde{\lambda}_1 - \frac{g_{22}\lambda_1\tilde{\lambda}_1}{\Delta} = g_{11},\ \lambda_2 + \tilde{\lambda}_2 - \frac{g_{11}\lambda_2\tilde{\lambda}_2}{\Delta} = g_{22}.$$

В третьем разделе второй главы предложен метод построение канонической системы решений задачи линейного сопряжения для двумерного вектора по известному решению задачи. В случае, когда компоненты пары такого решения не имеют нулей и особенностей на контуре, а в качестве решения взят представитель соответствующего подпространства кусочно-мероморфных решений, компоненты вектор-функций канонической системы решений задачи линейного сопряжения определяются (теорема 2.2) при $i = 1,2$ по формулам

$$w^{1+}_{i,\varkappa_i}(t) = w^{1+}(t)\left(-P\left[q\frac{g_{12}\Delta^-}{w^{1+}w^{1-}}\right](t) + \frac{P_m(t)}{T_p(t)}\right),$$

$$w^{1-}_{i,\varkappa_i}(t) = w^{1-}(t)\left(Q\left[q\frac{g_{12}\Delta^-}{w^{1+}w^{1-}}\right](t) + \frac{P_m(t)}{T_p(t)}\right);$$

$$w^{2+}_{i,\varkappa_i}(t) = w^{2+}(t)\left(P\left[q\frac{g_{21}\Delta^-}{w^{2+}w^{2-}}\right](t) + \frac{P_l(t)}{T_n(t)}\right),$$

$$w^{2-}_{i,\varkappa_i}(t) = w^{2-}(t)\left(-Q\left[q\frac{g_{21}\Delta^-}{w^{2+}w^{2-}}\right](t) + \frac{P_l(t)}{T_n(t)}\right),$$

в которых неопределенный полином $q(z)$ находится из условий:

$$\left(\frac{g_{12}(t)}{w^{1+}(t)w^{1-}(t)} + \frac{g_{21}(t)}{w^{2+}(t)w^{2-}(t)}\right)\Delta^-(t)q(t) = \omega(t),$$

$$\left(\frac{g_{11}(t)}{w^{1+}(t)w^{2-}(t)} + \frac{g_{22}(t)}{w^{2+}(t)w^{1-}(t)}\right)\omega(t) +$$
$$+\left(\frac{g_{12}(t)}{w^{1+}(t)w^{1-}(t)} + \frac{g_{21}(t)}{w^{2+}(t)w^{2-}(t)}\right)S\left[\omega\right](t) =$$

$$= 2\left(\frac{g_{12}(t)}{w^{1+}(t)w^{1-}(t)} + \frac{g_{21}(t)}{w^{2+}(t)w^{2-}(t)}\right)\left(\frac{P_m(t)}{T_p(t)} - \frac{P_l(t)}{T_n(t)}\right),$$

$$\omega(t) = \omega^+(t) - \omega^-(t),\ t \in \Gamma,\ \omega^-(\infty) = 0,$$

$$\omega^+ = \tfrac{\Delta^+}{\lambda_1^+\lambda_2^+}\left\{P\left[\left(\tfrac{\lambda_1^+\lambda_2^+}{\Delta^+} - \tfrac{\lambda_1^-\lambda_2^-}{\Delta^-}\right)\left(\tfrac{P_m}{T_p} - \tfrac{P_l}{T_n}\right)\right] + P_{\kappa-1}\right\},$$

$$\omega^- = \tfrac{\Delta^-}{\lambda_1^-\lambda_2^-}\left\{-Q\left[\left(\tfrac{\lambda_1^+\lambda_2^+}{\Delta^+} - \tfrac{\lambda_1^-\lambda_2^-}{\Delta^-}\right)\left(\tfrac{P_m}{T_p} - \tfrac{P_l}{T_n}\right)\right] + P_{\kappa-1}\right\},$$

при $\kappa = \varkappa - \varkappa_{\lambda_1} - \varkappa_{\lambda_2} > 0$ содержащих $\varkappa$ неопределенных коэффициентов, а, при $\kappa \leq 0$, $\varkappa_{\lambda_1} + \varkappa_{\lambda_2}$ коэффициентов должны быть связаны $-\kappa$ условиями

$$\int_\Gamma \left(\frac{\lambda_1^+(\tau)\lambda_2^+(\tau)}{\Delta^+(\tau)} - \frac{\lambda_1^-(\tau)\lambda_2^-(\tau)}{\Delta^-(\tau)}\right)\left(\frac{P_m(\tau)}{T_p(\tau)} - \frac{P_l(\tau)}{T_n(\tau)}\right)\tau^{j-1}\mathrm{d}\tau = 0,\ j = \overline{1, -\kappa}.$$

В этих формулах степени полиномов P_m и P_l определяются порядками на бесконечности $k_1 = p - \varkappa_{\lambda_1}$ и $k_2 = n - \varkappa_{\lambda_2}$ компонент определенного выше представителя $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z))$ соответствующего подпространства кусочно-мероморфных решений задачи, а $\varkappa$ – суммарный индекс матрицы-функции $G(t)$.

Первая вектор-функция $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$ канонической системы решений ищется из указанных представлений как имеющая самый низкий из возможных порядок $-\varkappa_1$ на бесконечности. Поэтому, если это необходимо, следует потребовать нужного поведения компонент указанного представления на бесконечности. Вторая вектор-функция $\mathbf{w}_{2,\varkappa_2}(z)$ канонической системы решений может быть найдена из тех же представлений как отличная от $p(z)\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$, где $p(z)$ – полином и имеющая на бесконечности порядок $-\varkappa_2 = \varkappa_1 - \varkappa$.

В четвертом разделе второй главы, используя структуру множества кусочно-мероморфных решений задачи линейного сопряжения для двумерного вектора, выделяются классы задач дробно-линейного сопряжения, для которых удается указать частное кусочно-мероморфное решение, что, согласно результатам второго и третьего разделов, позволяет найти каноническую систему решений задачи линейного сопряжения.

Пусть заданные на Γ функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ определяют пару какого-либо кусочно-мероморфного решения $\Phi(z)$ задачи дробно-линейного сопряжения. Тогда предельные значения этого решения могут быть записаны по любой из формул

$$\Phi^-(t) = \frac{\lambda_1(t) - g_{11}(t)}{g_{12}(t)} = \frac{g_{21}(t)}{\lambda_2(t) - g_{22}(t)},\ t \in \Gamma,$$
$$\Phi^+(t) = \frac{g_{22}(t)\lambda_1(t) - \Delta(t)}{g_{12}(t)\lambda_1(t)} = \frac{g_{21}(t)\lambda_2(t)}{g_{11}(t)\lambda_2(t) - \Delta(t)}, t \in \Gamma.$$

Аналогичные формулы для компонент подобной пары получаются из этих представлений и теоремы 2.1. Делая априорные предположения о существовании кусочно-мероморфного решения задачи дробно-линейного сопряжения, для которого одна из компонент пары или подобной пары является рациональной функцией $r(t)$ либо функцией класса $\bar{M}^+$ или $\bar{M}^-$, а также некоторые другие предположения, из этих представлений и представлений для решения подобной задачи, указаны соответствующие ограничения (теорема 2.3) на элементы матрицы-функции, обеспечивающие существование такого решения. Эти условия (всего 24) состоят, например, при $\lambda_1(t) \in \bar{M}^+$, в требовании к отношению

$$\left(g_{22}(t)g_{12}^+(t)P[g_{11}/g_{12}^+](t) - \Delta(t)\right)/g_{12}^-(t)$$

быть функцией класса $\bar{M}^+$, или при $\tilde{\lambda}_2(t) \in \bar{M}^-$, в требовании к отношению

$$\left(\Delta(t) - g_{11}(t)g_{12}^-(t)Q\left[g_{22}/g_{12}^-\right](t)\right)/g_{12}^+(t)$$

быть функцией класса $\bar{M}^-$.

В пятом разделе второй главы исследуется возможность решения в замкнутой форме общей двумерной характеристической системы. Введенные в первой главе функции $\omega_j(t)$ и $\delta_j(t)$, $j = 1, 2$ принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha_1(|A_1, B_2| + k_1 |B|) + \alpha_2 |A_2, B_2|, \\ \omega_2 &= \alpha_1 |B_1, A_1| + \alpha_2(|B_1, A_2| + k_2 |B|), \\ \delta_1 &= \alpha_1(|A_1, B_2| - k_1 |B|) + \alpha_2 |A_2, B_2|, \\ \delta_2 &= \alpha_1 |B_1, A_1| + \alpha_2(|B_1, A_2| - k_2 |B|) \end{aligned}$$

и допускают на Γ представления

$$\omega_1 = \omega^+\omega_1^-,\ \omega_2 = r_1\omega^+\omega_2^-,\ \delta_1 = r_2\delta_1^+\delta^-,\ \delta_2 = \delta_2^+\delta^-,$$

где $r_1(t)$, $r_2(t)$ – рациональные функции без полюсов на Γ, а соответствующие множители являются функциями классов M^+ или M^-. При априорных предположениях, что функции $\delta_j(t)$, $j = 1, 2$ или функции $\omega_j(t)$, $j = 1, 2$ – функции класса M^+ соответственно M^- либо соответствующие множители в указанном представлении связаны равенствами $\delta_1^+(t) = s_1(t)\omega^+(t)$, $\omega_2^-(t) = s_2(t)\delta^-(t)$ или равенствами $\delta_2^+(t) = s_1(t)\omega^+(t)$, $\omega_1^-(t) = s_2(t)\delta^-(t)$, в которых $s_1(t)$, $s_2(t)$ – рациональные функции без полюсов на Γ, наложены условия на коэффициенты системы, позволяющие найти частное решение соответствующей задачи линейного сопряжения.

В шестом разделе этой главы методы выделения классов сингулярных интегральных уравнений с n ядрами, разрешимых в замкнутой форме, рассмотренные в первой главе, применяются к сингулярным интегральным уравнениям с двумя ядрами. Кроме того, эти уравнения при помощи введения новых неизвестных функций приводятся к соответствующей общей характеристической системе, что позволяет для выделения таких классов применить также результаты предыдущего раздела.

В последнем разделе второй главы задача линейного сопряжения приводится к эквивалентной характеристической системе ($K(t) \equiv E$ – единичная матрица) и рассмотрены случаи ее разрешимости в замкнутой форме, вытекающие из результатов разделов 5 и 6.

Структура третьей главы, содержащей 6 разделов, во многом схожа со структурой второй главы и посвящена методам выделения классов задач линейного сопряжения для трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме.

В первом разделе получено представления для H–непрерывных и не особенных на Γ матриц-функций третьего порядка (аналог соответствующего представления для матриц-функций второго порядка), из которых делаются выводы о возможности их эффективной факторизации. Кроме того, некоторые случаи эффективной факторизации матриц-функций второго порядка здесь применяются для построения факторизации блочно-треугольных матриц-функций третьего порядка (теорема 3.1).

Во втором разделе третьей главы описывается структура множества кусочно-мероморфных решений однородной задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора. Вводится понятие решения с тройкой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ (определение 3.1). Доказана

Теорема 3.2. *Для того, чтобы кусочно-мероморфные решения* $\mathbf{w}_1(z), \mathbf{w}_2(z)$ *задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора с матрицей-функцией* $G(t)$, $\det G(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$, *элементы которой* $g_{ij}(t)$ *и их алгебраические дополнения* $G_{ij}(t),\ i, j = 1, 2, 3$ – H*-непрерывны, были решениями с одинаковой невырожденной тройкой, должно выполняться одно из следующих условий*:

1) *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{w}_2(z) = r(z)\mathbf{w}_1(z),\ r(z)$ – *рациональная функция без полюсов на* Γ;

2) *необходимо, чтобы* $g_{13}(t) \equiv g_{23}(t) \equiv 0$, *отношения*

$$g_{31}(t)/g_{32}(t),\ G_{13}(t)/G_{23}(t)$$

были функциями классов M^- *и* M^+ *соответственно, а при выполнении неравенств*

$$g_{33}(t) \neq 0,\ g_{32}(t) \neq 0\ (g_{31}(t) \neq 0),\ G_{13}(t) \neq 0\ (G_{23}(t) \neq 0)\ t \in \Gamma$$

эти условия будут также достаточными и при $g_{32}(t)\neq 0$ *решения имеют вид*

$$\mathbf{w}_1^+=\left(-\frac{G_{23}G_{13}^+}{G_{13}g_{32}^+},\frac{G_{13}^+}{g_{32}^+},sg_{33}^+\right),\mathbf{w}_1^-=\left(\frac{g_{32}^-}{G_{13}^-},-\frac{g_{31}g_{32}^-}{g_{32}G_{13}^-},\frac{s}{g_{33}^-}\right),\ G_{13}(t)\neq 0;$$
$$\mathbf{w}_1^+=\left(-\frac{G_{23}^+}{g_{32}^+},\frac{G_{13}G_{23}^+}{G_{23}g_{32}^+},sg_{33}^+\right),\mathbf{w}_1^-=\left(\frac{g_{32}^-}{G_{23}^-},-\frac{g_{31}g_{32}^-}{g_{32}G_{23}^-},\frac{s}{g_{33}^-}\right),\ G_{23}(t)\neq 0;$$

$$\mathbf{w}_2(z)=\left(r_1(z)w_1^1(z),r_1(z)w_1^2(z),r_3(z)w_1^3(z)\right),$$

а при $g_{31}(t)\neq 0$ – *вид*

$$\mathbf{w}_1^+=\left(\frac{G_{23}G_{13}^+}{G_{13}g_{31}^+},-\frac{G_{13}^+}{g_{31}^+},sg_{33}^+\right),\mathbf{w}_1^-=\left(-\frac{g_{32}g_{31}^-}{g_{31}G_{13}^-},\frac{g_{31}^-}{G_{13}^-},\frac{s}{g_{33}^-}\right),\ G_{13}(t)\neq 0;$$
$$\mathbf{w}_1^+=\left(\frac{G_{23}^+}{g_{31}^+},-\frac{G_{13}G_{23}^+}{G_{23}g_{31}^+},sg_{33}^+\right),\mathbf{w}_1^-=\left(-\frac{g_{32}g_{31}^-}{g_{31}G_{23}^-},\frac{g_{31}^-}{G_{23}^-},\frac{s}{g_{33}^-}\right),\ G_{23}(t)\neq 0;$$

$$\mathbf{w}_2(z)=\left(r_1(z)w_1^1(z),r_1(z)w_1^2(z),r_3(z)w_1^3(z)\right)$$

(s – рациональная функция без полюсов на Γ);

3) *необходимо, чтобы* $g_{12}(t)\equiv g_{32}(t)\equiv 0$, *отношения*

$$g_{21}(t)/g_{23}(t),\ G_{12}(t)/G_{32}(t)$$

были функциями классов M^- *и* M^+ *соответственно, а при выполнении неравенств*

$$g_{22}(t)\neq 0,\ g_{21}(t)\neq 0\,(g_{23}(t)\neq 0),\ G_{12}(t)\neq 0\ (G_{32}(t)\neq 0)\ t\in\Gamma$$

эти условия будут также достаточными и при $g_{21}(t)\neq 0$ *решения имеют вид*

$$\mathbf{w}_1^+=\left(\frac{G_{32}^+}{g_{21}^+},sg_{22}^+,-\frac{G_{12}G_{32}^+}{G_{32}g_{21}^+}\right),\mathbf{w}_1^-=\left(-\frac{g_{23}g_{21}^-}{g_{21}G_{32}^-},\frac{s}{g_{22}^-},\frac{g_{21}^-}{G_{32}^-}\right),\ G_{32}(t)\neq 0;$$
$$\mathbf{w}_1^+=\left(\frac{G_{32}G_{12}^+}{G_{12}g_{21}^+},sg_{22}^+,-\frac{G_{12}^+}{g_{21}^+}\right),\mathbf{w}_1^-=\left(-\frac{g_{23}g_{21}^-}{g_{21}G_{12}^-},\frac{s}{g_{22}^-},\frac{g_{21}^-}{G_{12}^-}\right),\ G_{12}(t)\neq 0;$$

$$\mathbf{w}_2(z)=\left(r_1(z)w_1^1(z),r_2(z)w_1^2(z),r_1(z)w_1^3(z)\right),$$

а при $g_{23}(t)\neq 0$ – *вид*

$$\mathbf{w}_1^+=\left(-\frac{G_{32}^+}{g_{23}^+},sg_{22}^+,\frac{G_{12}G_{32}^+}{G_{32}g_{23}^+}\right),\mathbf{w}_1^-=\left(\frac{g_{23}^-}{G_{32}^-},\frac{s}{g_{22}^-},-\frac{g_{21}g_{23}^-}{g_{23}G_{32}^-}\right),\ G_{32}(t)\neq 0;$$
$$\mathbf{w}_1^+=\left(-\frac{G_{32}G_{12}^+}{G_{12}g_{23}^+},sg_{22}^+,\frac{G_{12}^+}{g_{23}^+}\right),\mathbf{w}_1^-=\left(\frac{g_{23}^-}{G_{12}^-},\frac{s}{g_{22}^-},-\frac{g_{21}g_{23}^-}{g_{23}G_{12}^-}\right),\ G_{12}(t)\neq 0;$$

$$\mathbf{w}_2(z)=\left(r_1(z)w_1^1(z),r_2(z)w_1^2(z),r_1(z)w_1^3(z)\right)$$

(s – рациональная функция без полюсов на Γ);

4) *необходимо, чтобы* $g_{21}(t) \equiv g_{31}(t) \equiv 0$, *отношения*

$$g_{12}(t)/g_{13}(t),\ G_{21}(t)/G_{31}(t)$$

были функциями классов M^- *и* M^+ *соответственно, а при выполнении неравенств*

$$g_{11}(t) \neq 0,\ g_{12}(t) \neq 0\,(g_{13}(t) \neq 0),\ G_{21}(t) \neq 0\ (G_{31}(t) \neq 0)\ t \in \Gamma$$

эти условия будут также достаточными и при $g_{13}(t) \neq 0$ *решения имеют вид*

$$\mathbf{w}_1^+ = \left(sg_{11}^+, -\frac{G_{31}^+}{g_{13}^+}, \frac{G_{21}G_{31}^+}{G_{31}g_{13}^+}\right), \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{s}{g_{11}^-}, \frac{g_{13}^-}{G_{31}^-}, -\frac{g_{12}g_{13}^-}{g_{13}G_{31}^-}\right),\ G_{31}(t) \neq 0;$$
$$\mathbf{w}_1^+ = \left(sg_{11}^+, -\frac{G_{31}G_{21}^+}{G_{21}g_{13}^+}, \frac{G_{21}^+}{g_{13}^+}\right), \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{s}{g_{11}^-}, \frac{g_{13}^-}{G_{21}^-}, -\frac{g_{12}g_{13}^-}{g_{13}G_{21}^-}\right),\ G_{21}(t) \neq 0;$$

$$\mathbf{w}_2(z) = \left(r_1(z)w_1^1(z), r_2(z)w_1^2(z), r_2(z)w_1^3(z)\right),$$

а при $g_{12}(t) \neq 0$, имеют вид

$$\mathbf{w}_1^+ = \left(sg_{11}^+, \frac{G_{31}^+}{g_{12}^+}, -\frac{G_{21}G_{31}^+}{G_{31}g_{12}^+}\right), \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{s}{g_{11}^-}, -\frac{g_{13}g_{12}^-}{g_{12}G_{31}^-}, \frac{g_{12}^-}{G_{31}^-}\right),\ G_{31}(t) \neq 0;$$
$$\mathbf{w}_1^+ = \left(sg_{11}^+, \frac{G_{31}G_{21}^+}{G_{21}g_{12}^+}, -\frac{G_{21}^+}{g_{12}^+}\right), \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{s}{g_{11}^-}, -\frac{g_{13}g_{12}^-}{g_{12}G_{21}^-}, \frac{g_{12}^-}{G_{21}^-}\right),\ G_{21}(t) \neq 0;$$

$$\mathbf{w}_2(z) = \left(r_1(z)w_1^1(z), r_2(z)w_1^2(z), r_2(z)w_1^3(z)\right)$$

(s – рациональная функция без полюсов на Γ);

5) *необходимо, чтобы выполнялось тождество*

$$g_{12}(t)g_{23}(t)g_{31}(t) \equiv g_{13}(t)g_{21}(t)g_{32}(t),\ t \in \Gamma,$$

в котором входящие в него элементы отличны от тождественного нуля, а отношения

$$g_{12}(t)/g_{13}(t),\ g_{21}(t)/g_{23}(t),\ g_{31}(t)/g_{32}(t;$$
$$g_{23}(t)G_{13}(t)/g_{32}(t)G_{32}(t),\ G_{12}(t)/G_{32}(t)$$

были функциями классов M^- *и* M^+ *соответственно. При выполнении неравенств*

$$g_{23}(t) \neq 0,\ G_{32}(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$$

эти условия будут также достаточными и решения имеют вид

$$\mathbf{w}_1^+ = \left(-\frac{G_{32}^+}{g_{23}^+}, \frac{g_{23}G_{13}G_{32}^+(R-1)}{g_{32}G_{32}g_{23}^+(R-r)}, -\frac{G_{12}G_{32}^+(r-1)}{G_{32}g_{23}^+(R-r)}\right),$$

$$\mathbf{w}_1^- = \left(\frac{g_{23}^-}{G_{32}^-}, -\frac{g_{31}g_{23}^-(R-1)}{g_{32}G_{32}^-(R-r)}, \frac{g_{21}g_{23}^-(r-1)}{g_{23}G_{32}^-(R-r)}\right);$$

$$\mathbf{w}_2(z) = (r_1(z)w_1^1(z), r_2(z)w_1^2(z), r_3(z)w_1^3(z))$$

($r = r_2/r_1$, $R = r_3/r_1$, r_1, r_2, r_3 – *рациональные функции такие, что компоненты указанных решений не имеют полюсов на* Γ).

Здесь представления $g_{ij}(t) = g_{ij}^+(t)g_{ij}^-(t)$, $G_{ij}(t) = G_{ij}^+(t)G_{ij}^-(t)$, $i,j = 1,2,3$ – факторизации соответствующих функций.

Приводятся также условия существования двух решений задачи линейного сопряжения с одинаковой вырожденной тройкой и записаны явный вид таких решений задачи.

Пусть $\mathbf{w}(z)$ – решение задачи линейного сопряжения с невырожденной тройкой. Рассмотрим определенные в соответствующих областях отношения

$$\Phi(z) = \frac{w^2(z)}{w^1(z)},\ \Psi(z) = \frac{w^3(z)}{w^1(z)}.$$

Тогда пары функций $(\Phi^\pm(t), \Psi^\pm(t))$ будут предельными значениями на Γ кусочно-мероморфного решения $(\Phi(z), \Psi(z))$ системы двух задач дробно-линейного сопряжения

$$\Phi^+ = \frac{g_{21} + g_{22}\Phi^- + g_{23}\Psi^-}{g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^-},\ \Psi^+ = \frac{g_{31} + g_{32}\Phi^- + g_{33}\Psi^-}{g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^-}.$$

Обратно, если пара кусочно-мероморфных функций $(\Phi(z), \Psi(z))$ является решением системы задач дробно-линейного сопряжения, то вектор-функция $\mathbf{w}(z)$, у которой на Γ предельные значения компонент определяются условиями

$$g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^- = \frac{w^{1+}}{w^{1-}},\ w^{2\pm} = \Phi^\pm w^{1\pm},\ w^{3\pm} = \Psi^\pm w^{1\pm},$$

будет решением соответствующей задачи линейного сопряжения.

Определение 3.2 Будем называть кусочно-мероморфное решение $\Phi(z), \Psi(z)$ системы задач дробно-линейного сопряжения решением с тройкой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$, если на Γ

$$\begin{gathered}
g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) + g_{13}\Psi^-(t) = \lambda_1(t),\\
g_{22}(t) + g_{21}(t)\frac{1}{\Phi^-(t)} + g_{23}(t)\frac{\Psi^-(t)}{\Phi^-(t)} = \lambda_2(t),\\
g_{33}(t) + g_{31}(t)\frac{1}{\Psi^-(t)} + g_{32}(t)\frac{\Phi^-(t)}{\Psi^-(t)} = \lambda_3(t).
\end{gathered}$$

Аналогично определению 2.3, вводится понятие подобной тройки $(\tilde{\lambda}_1(t), \tilde{\lambda}_2(t), \tilde{\lambda}_3(t))$ и указаны формулы, связывающие на контуре компоненты решения системы задач дробно-линейного сопряжения с компонентами тройки $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$:

$$\Phi^- = \frac{g_{23}\lambda_1 + G_{32}}{g_{13}\lambda_2 + G_{31}} = \frac{\lambda_1\lambda_3 - g_{33}\lambda_1 - g_{11}\lambda_3 + G_{22}}{g_{12}\lambda_3 + G_{21}} =$$

$$= \frac{g_{21}\lambda_3 + G_{12}}{\lambda_2\lambda_3 - g_{33}\lambda_2 - g_{22}\lambda_3 + G_{11}}, \;\; \Phi^+ = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Phi^-;$$

$$\Psi^- = \frac{\lambda_1\lambda_2 - g_{22}\lambda_1 - g_{11}\lambda_2 + G_{33}}{g_{13}\lambda_2 + G_{31}} = \frac{g_{32}\lambda_1 + G_{23}}{g_{12}\lambda_3 + G_{21}} =$$

$$= \frac{g_{31}\lambda_2 + G_{13}}{\lambda_2\lambda_3 - g_{33}\lambda_2 - g_{22}\lambda_3 + G_{11}}, \;\; \Psi^+ = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\Psi^-,$$

а также с компонентами подобной тройки.

В третьем разделе этой главы приводится метод построение канонической системы решений задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора по двум решениям соответствующей системы задач дробно-линейного сопряжения. Доказано следующее утверждение:

Предложение 3.1. *Пусть* $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$, $j = 1, 2$ *– два решения системы задач дробно-линейного сопряжения с различными тройками* $(\lambda_{1k}(t), \lambda_{2k}(t), \lambda_{3k}(t))$, $k = 1, 2$, *для которых выражения* $\Phi_2^{\pm}(t) - \Phi_1^{\pm}(t)$, $\lambda_{11}(t) = g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi_1^-(t) + g_{13}\Psi_1^-(t)$, $\lambda_{12}(t) = g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi_2^-(t) + g_{13}\Psi_2^-(t)$ *не обращаются в нуль и бесконечность на контуре. Тогда каноническая система решений задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора может быть построена эффективно.*

В четвертом разделе главы указан метод построения такой системы по двум решениям задачи линейного сопряжения.

Так, если для решений

$$\mathbf{w}_i(z) = \left(w_i^1(z), w_i^2(z), w_i^3(z)\right), \;\; i = 1, 2,$$

не имеющих конечных полюсов, разности

$$w_{ij}(z) = w_1^i(z)w_2^j(z) - w_1^j(z)w_2^i(z), \;\; i, j = 1, 2, 3, \; i \neq j$$

удовлетворяют, например, условиям

$$w_{12}^+(z) \neq 0, \;\; z \in D^+ \cup \Gamma, \;\; w_{12}^-(z) \neq 0, \;\; z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\},$$

то компоненты вектор-функций канонической системы решений имеют вид

$$\begin{gathered}
w_{i,\varkappa_i}^{1+} = w_1^{1+}(P\left[\frac{(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\right] + c) + \\
+ w_2^{1+}(-P\left[\frac{(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\right] + d), \\
w_{i,\varkappa_i}^{2+} = w_1^{2+}(P\left[\frac{(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{2+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\right] + c) + \\
+ w_2^{2+}(-P\left[\frac{(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\right] + d), \\
w_{i,\varkappa_i}^{3+} = (p\Delta^+ - w_{i,\varkappa_i}^{1+} w_{23}^+ - w_{i,\varkappa_i}^{2+} w_{31}^+)/w_{12}^+;
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
w_{i,\varkappa_i}^{1-} = w_1^{1-}(-Q\left[\frac{(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\right] + c) + \\
+ w_2^{1-}(Q\left[\frac{(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\right] + d), \\
w_{i,\varkappa_i}^{2-} = w_1^{2-}(-Q\left[\frac{(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\right] + c) + \\
+ w_2^{2-}(Q\left[\frac{(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\right] + d), \\
w_{i,\varkappa_i}^{3-} = (p\Delta^- - w_{i,\varkappa_i}^{1-} w_{23}^- - w_{i,\varkappa_i}^{2-} w_{31}^-)/w_{12}^-,\ i = 1, 2, 3.
\end{gathered}$$

В этих формулах p, c и d – неопределенные полиномы, для степеней которых указаны оценки сверху, а их коэффициенты подбираются так, чтобы на бесконечности вектор-функции канонической системы решений имели самые низкие из возможных порядки и не были связаны между собой никакой линейной комбинацией с полиномиальными коэффициентами.

В пятом разделе главы рассмотрены случаи, когда решение задачи линейного сопряжения может быть записано в замкнутой форме, вытекающие из результатов разделов 2-4. Частные решения задачи получаются, например, из условий 2) – 5) теоремы 3.2, если к этим условиям добавить условия отсутствия нулей на контуре у соответствующих элементов и алгебраических дополнений матрицы-функции $G(t)$, а также рассмотреть решения с вырожденной тройкой, получаемые из условий 2) – 4) теоремы 3.2 при $s(z) \equiv 0$. Так, если выполняются тождества $g_{13}(t) \equiv g_{23}(t) \equiv 0,\ t \in \Gamma$, а отношения $g_{31}(t)/g_{32}(t),\ G_{13}(t)/G_{23}(t)$ аналитически продолжимы в области D^- и D^+ соответственно, то при выполнении неравенств $g_{32}(t) \neq 0,\ g_{33}(t) \neq 0,\ G_{13}(t) \neq 0\ (G_{23}(t) \neq 0)$ решения $\mathbf{w}_1(z),\ \mathbf{w}_2(z)$, задачи линейного сопряжения определяются первой (второй) формулой случая 2) при $s(z) \equiv 1$ и $s(z) \equiv 0$ соответственно. Если отношения $g_{31}(t)/g_{32}(t),\ g_{21}(t)/g_{23}(t)$ аналитически продолжимы в области D^-, а отношения $G_{13}(t)/G_{23}(t),\ G_{12}(t)/G_{32}(t)$ аналитически продолжимы в области D^+, то за решения $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ следует взять решения, определенные при $s(z) \equiv 0$ одной из формул случая 2) и случая 3). Например, при

$g_{31}(t) \neq 0,\ G_{13}(t) \neq 0$ и $g_{21}(t) \neq 0,\ G_{12}(t) \neq 0$ решения определяются третьей формулой случая 2) и второй формулой случая 3). В этих предположениях требования к разностям $w_{13}^{+}(t) = g_{33}^{+}(t)G_{23}^{+}(t)/g_{32}^{+}(t)$, $w_{13}^{-}(t) = -g_{32}^{-}(t)/g_{33}^{-}(t)G_{23}^{-}(t)$ соответственно к разностям $w_{23}^{+}(t) = G_{12}^{+}(t)G_{13}^{+}(t)/g_{21}^{+}(t)g_{31}^{+}(t)$, $w_{23}^{-}(t) = g_{21}^{-}(t)g_{31}^{-}(t)/G_{12}^{-}(t)G_{13}^{-}(t)$ (аналогичные рассмотренным требованиям $w_{12}^{+}(z) \neq 0,\ z \in D^{+} \cup \Gamma,\ w_{12}^{-}(z) \neq 0,\ z \in \Gamma \cup D^{-} \setminus \{\infty\}$) будут выполнены и компоненты вектор-функций канонической системы решений в каждом конкретном случае запишутся по соответствующим формулам.

Рассмотрены также случаи, вытекающие из "априорных" предположений, что одна из компонент тройки или подобной тройки есть рациональная функция или функция класса M^{+} или M^{+} Полученные условия сформулированы в теоремы 3.4. Так, например, при $\lambda_1(t) \in M^{+}$ соответствующие условия имеют вид:
отношения

$$g_{22}(t)/g_{32}(t),\ \Delta(t)/G_{11}(t),\ G_{21}(t)/G_{11}(t),\ g_{12}(t)/g_{32}(t)$$

– функции класса M^{+} или, при $\tilde{\lambda}_1(t) \in M^{-}$,
отношение $G_{33}(t)/G_{13}(t)$ – функция класса M^{+}, а отношения

$$\Delta(t)/g_{22}(t),\ g_{21}(t)/g_{22}(t),\ g_{23}(t)/g_{22}(t)$$

– функции класса M^{-}.

В шестом разделе методы выделения классов общих характеристических систем и сингулярных интегральных уравнений с n ядрами, разрешимых в замкнутой форме, применяются для случая $n = 3$. Здесь, также как в седьмом разделе второй главы, задача линейного сопряжения приводится к эквивалентной характеристической системе ($K(t) \equiv E$ – единичная матрица) и рассмотрены случаи ее разрешимости в замкнутой форме, вытекающие из полученных результатов для трехмерных общих характеристических систем и сингулярных интегральных уравнений с тремя ядрами.

В четвертой главе, пользуясь представлением для матрицы-функции второго порядка, получены оценки ее частных индексов:

$$\max_{i,j=1,2} \min\{(\varkappa_{ij}, \varkappa - \varkappa_{ij}) + (-1)^{k-1} l_{ij}\} \leq \varkappa_k \leq \min_{i,j=1,2} \max\{(\varkappa_{ij}, \varkappa - \varkappa_{ij}) + (-1)^{k-1} l_{ij}\},$$

где $k = 1, 2,\ \ \varkappa_{ij},\ i, j = 1, 2$ – индексы Коши элементов матрицы-функции, а $l_{ij},\ i, j = 1, 2$ – оценки числа линейно независимых решений соответствующих интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром.

Приведены также достаточные условия равенства нулю частных индексов матрицы-функции $G_0(t)$ из указанного представления и построена ее приближенная факторизация.

В заключении перечислены наиболее значимые результаты работы.

Публикации по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Киясов, С.Н. Дробно-линейная краевая задача Римана и ее приложение к факторизации некоторых классов гельдеровских матриц-функций второго порядка / С.Н. Киясов // Изв. вузов. Матем..– 1995.– №9(400).– С. 23-29.

2. Киясов, С.Н. Исследование разрешимости и оценки числа решений одного класса сингулярных интегральных уравнений / С.Н. Киясов // Сиб. матем. журн..– 2000.– Т. 41.– №6.– С. 1357-1362.

3. Киясов, С.Н. Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме / С.Н. Киясов // Изв. вузов. Матем..– 2002.– №5.– С. 31-35.

4. Киясов, С.Н. Эффективные оценки числа решений одного класса сингулярных интегральных уравнений / С.Н. Киясов // Дифференц. уравнения.– 2002.– Т. 38.– №9.– С. 1190-1198.

5. Киясов, С.Н. Эффективная факторизация в некоторых классах матриц-функций третьего порядка / С.Н. Киясов // Учен. зап. Казан. ун-та, сер. физ.-матем. науки.– 2008.– Т. 150.– №1.– С. 65-70.

6. Киясов, С.Н. Некоторые случаи разрешимости в замкнутой форме сингулярных интегральных уравнений и двумерных характеристических систем / С.Н. Киясов // Изв. вузов. Матем..– 2011.– №4.– С. 54-71.

7. Киясов, С.Н. Некоторые случаи эффективной факторизации матриц-функций второго порядка / С.Н. Киясов // Изв. вузов. Матем..– 2012.– №6.– С. 36-43.

8. Киясов, С.Н. Некоторые классы задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимые в замкнутой форме / С.Н. Киясов // Изв. вузов. Матем..– 2013.– №1.– С. 3-20.

9. Киясов, С.Н. Оценки частных индексов гельдеровских матриц-функций второго порядка / С.Н. Киясов // Учен. зап. Казан. ун-та, сер. физ.-матем. науки.– 2014.– Т. 156.– кн. 1,– С. 44-50.

10. Киясов, С.Н. Метод выделения классов задач линейного сопряжения для трехмерного вектора / С.Н. Киясов // Изв. вузов. Матем..– 2015.– №8.– С. 33-50.

11. Киясов, С.Н. Некоторые классы задач линейного сопряжения для трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме / С.Н. Киясов // Сиб. матем. журн..– 2015.– Т. 56.– № 2.– С. 389-408.

Публикации в других изданиях

12. Киясов, С.Н. О частных случаях одной нелинейной краевой задачи Римана

/ С.Н. Киясов // Краевые задачи и их приложения / Межвуз. сб.– Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1985.– С. 60-67.

13. Киясов, С.Н. Исследование одной нелинейной краевой задачи Римана в случае аналитической продолжимости коэффициентов / С.Н. Киясов // Краевые задачи и их приложения / Межвуз. сб.– Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1986.– С. 54-59

14. Киясов, С.Н. Факторизация некоторых матриц-функций второго порядка / С.Н. Киясов // Актуальные вопр. теории краевых задач и их приложения / Межвуз. сб.– Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1986.– С. 62-66

15. Киясов, С.Н. К вопросу о разрешимости дробно-линейной краевой задачи Римана / С.Н. Киясов // Труды семинара по краевым задачам. Изд-во Казанского. ун-та.– 1987.– Вып. 23.– С. 116-129.

16. Киясов, С.Н. Точные оценки для частных индексов гельдеровских матриц-функций второго порядка / С.Н. Киясов // Алгебра и Анализ (Тезисы докладов школы-конф., посв. 100-летию со дня рожд. Б.М. Гагаева).– Казань: Казан. матем. общество, 1997.– С. 115-116.

17. Киясов, С.Н. Исследование разрешимости одного класса сингулярных интегральных уравнений / С.Н. Киясов // Теория функций, ее приближения и смежные вопросы (Материалы школы-конф., посв. 130-летию со дня рожд. Д.Ф. Егорова).– Казань: Казан. матем. общество, 1999.– С. 119-120.

18. Киясов, С.Н. Оценки частных индексов матриц-функций / С.Н. Киясов // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского.– Казань: УНИПРЕСС, 2000.– Т. 5.– С. 106-108.

19. Киясов, С.Н. Достаточные условия равенства нулю частных индексов одного класса матриц-функций второго порядка и построение их приближенной факторизации / С.Н. Киясов // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского.– Казань: УНИПРЕСС, 2011.– Т. 43.– С. 193-195.

20. Киясов, С.Н. Классификация задач линейного сопряжения для трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме / С.Н. Киясов // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского.– Казань: УНИПРЕСС, 2013.– Т. 46.– С. 242-246.

21. Киясов, С.Н. Метод решения задачи линейного сопряжения для двумерного вектора при известном частном решении / С.Н. Киясов // Материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции.- Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2015.– Т.51.– С. 233-235.

22. Киясов, С.Н. Метод выделения классов задач линейного сопряжения для трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме / С.Н. Киясов // Материалы конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» – V.– Ростов - на - Дону, 2015.– С. 79-80.