// Handbook of Recursive Mathematics. – 1998. – V. 2. – P. 823–976.

3. Moses M. *Recursive properties of isomophism types* // Monash Univ., Clayton, Victoria, Australia, 1983.

4. Зубков М. В. *О начальных сегментах вычислимых линейных порядков с дополнительными вычислимыми предикатами* // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48. – № 5. – С. 564–579.

5. Coles R. J., Downey R. G., Khoussainov B. *On initial segments of computable linear orders* // Order. – 1997. – V. 14. – No 2. – P. 107–124.

С. В. Болдырь, Н. И. Насырова

Северный (Арктический) федеральный университет,

Казанский национальный исследовательский технический университет (КАИ),

ngoza@yandex.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С ОДНИМ РЕБРОМ НА ПЛОСКОСТИ

Простые модели динамических систем часто используют для описания развития биологических популяций. В связи с этим, представляет интерес исследование динамики дискретных вещественных отображений, зависящих от нескольких параметров. В работе исследуется отображение

$$F : \begin{cases} x \mapsto f(x+y), \\ y \mapsto px, \end{cases} \quad \text{где} \quad f(t) = \begin{cases} 1 + at, & t \leqslant 0, \\ 1 - bt, & t > 0, \end{cases}$$

а переменные x, y и параметры a, b и p принимают вещественные значения. Это отображение называют популяционным распределением, зависящим от возрастной структуры группы.

С помощью аналитических методов проведено исследование динамики отображения F, найдены неподвижные и двупериодические точки отображения, области их существования и области, где найденные точки имеют различные типы, т. е. являются притягивающими, отталкивающими или седловыми.

Теорема 1. *Пусть* $p \neq -1$. *Если* $a > \frac{1}{1+p}$, *то в области* $x + y \leqslant 0$ *отображение* F *имеет неподвижную точку*

$$(x_-, y_-) = \left(\frac{1}{1-a-ap}, \frac{p}{1-a-ap}\right).$$

Если $b > -\frac{1}{1+p}$, *то в области* $x + y > 0$ *отображение* F *имеет неподвижную точку*

$$(x_+, y_+) = \left(\frac{1}{1+b+bp}, \frac{p}{1+b+bp}\right).$$

Типы неподвижных точек определяются следующими условиями на параметры a, b и p.

Неподвижная точка (x_+, y_+) является отталкивающей при $p \in (-\infty, -1)$ и $b \in \left(-\frac{1}{1+p}, +\infty\right)$; $p \in (1/2, 1)$ и $b \in \left(\frac{1}{p}, -\frac{1}{p-1}\right)$; $p > 1$ и $b \in \left(\frac{1}{p}, +\infty\right)$; $p \in (-1, -1/2)$ и $b \in \left(\frac{1}{p}, -\frac{1}{1+p}\right)$.

Неподвижная точка (x_+, y_+) является седловой при $p \in$ $\in (-1, 1)$ и $b \in \left(-\frac{1}{p-1}, +\infty\right)$. Неподвижная точка (x_+, y_+) является притягивающей при $p \in (-1, -1/2)$ и $b \in \left(\frac{1}{p}, -\frac{1}{p-1}\right)$; $p \in (-1/2, 1/2)$ и $b \in \left(-\frac{1}{p+1}, -\frac{1}{p-1}\right)$; $p \in (1/2, +\infty)$ и $b \in$ $\in \left(-\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right)$.

Неподвижная точка (x_-, y_-) является отталкивающей при $p \in (-\infty, -1)$ и $a \in \left(-\frac{1}{p}, +\infty\right)$; $p \in (1, +\infty)$ и $a \in \left(\frac{1}{p-1}, +\infty\right)$. Неподвижная точка (x_-, y_-) является седловой при $p \in (-\infty, -1)$ и $a \in \left(\frac{1}{p-1}, \frac{1}{p+1}\right)$; $p \in (-1, 1)$ и $a \in \left(\frac{1}{p+1}, +\infty\right)$; $p \in (1, +\infty)$ и $a \in \left(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p-1}\right)$. Неподвижная точка (x_-, y_-) является притягивающей при $p \in (-\infty, -1)$ и $a \in \left(\frac{1}{p-1}, -\frac{1}{p}\right)$.

Найдены условия существования двупериодической орбиты.

Теорема 2. *При выполнении условий*

$$\frac{1 + a + p - ap^2}{1 + bp + ab - ap - abp^2} > 0, \quad \frac{1 - b + p + bp^2}{1 - ap + ab + pb - abp^2} \leqslant 0,$$

отображение F имеет двупериодические точки

$$\left(\frac{1 + bp + a}{1 + bp + ab - ap - abp^2}, \frac{p(1 - b - ap)}{1 + bp + ab - ap - abp^2}\right),$$

$$\left(\frac{1 - b - ap}{1 - ap + ab + pb - abp^2}, \frac{p(1 + a + bp)}{1 - ap + ab + pb - abp^2}\right).$$

С помощью пакета "Mathematica" нами построены области существования двупериодической орбиты. Определяя типы двупериодических точек, мы получили квадратное уравнение

$$\lambda^2 + \lambda(2abp - ab^2 - b^2p) - ab^2p^3 = 0,$$

имеющее два вещественных корня λ_1 и λ_2. Сравнивая $|\lambda_1|$ и $|\lambda_2|$ с 1, можем сделать выводы о типе двупериодической орбиты. Нами построены области значений параметров, где двупериодическая орбита имеет различные типы. Исследовано поведение отображения F на границах этих областей.

Мы благодарим проф. Г. Сёдербакку за постановку задачи и научные консультации.