Математические заметки

Том 99 выпуск 4 апрель 2016

УДК 517.98

Неравенство для следа на унитальной C^*-алгебре

А. М. Бикчентаев

Установлено новое неравенство для следа на унитальной C^*-алгебре. Показано, что полученное неравенство характеризует следы в классе всех положительных функционалов на унитальной C^*-алгебре. Доказан новый критерий коммутативности унитальных C^*-алгебр.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10779

Введение. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *проектором*, если $X = X^2 = X^*$. *Коммутантом* множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется множество

$$\mathcal{X}' = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XY = YX, X \in \mathcal{X}\}.$$

$*$-Подалгебра $\mathcal{M}$ алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *алгеброй фон Неймана*, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$. *$C^*$-Алгеброй* называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (Гельфанд–Наймарк; см. [1; теорема 3.4.1]). Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$, $\mathcal{A}^+$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ будем обозначать ее подмножества эрмитовых элементов, положительных элементов и проекторов соответственно. Для унитальной $\mathcal{A}$ пусть I – единица $\mathcal{A}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$. Положительный линейный функционал φ на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ называется *состоянием*, если $\|\varphi\| = 1$; *следовым*, если $\varphi(X^*X) = \varphi(XX^*)$ для всех $X \in \mathcal{A}$.

Положительный линейный функционал φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *нормальным*, если

$$X_i \nearrow X, \quad X_i, X \in \mathcal{M}^+, \quad \Longrightarrow \quad \varphi(X) = \sup \varphi(X_i).$$

Для $P, Q \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ пишем $P \sim Q$ (эквивалентность *Мюррея–фон Неймана*), если $P = U^*U$ и $Q = UU^*$ с некоторым $U \in \mathcal{M}$.

Универсальным представлением C^*-алгебры $\mathcal{A}$ называется пара

$$\{\pi, \mathfrak{H}\} = \sum_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})}^{\oplus} \{\pi_\varphi, \mathfrak{H}_\varphi\},$$

где $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ – множество всех состояний на $\mathcal{A}$, $(\pi_\varphi, \mathfrak{H}_\varphi)$ – представление Гельфанда–Наймарка–Сигала C^*-алгебры $\mathcal{A}$, ассоциированное с φ. В этом случае алгебра фон