На правах рукописи

Яковенко Антон Александрович

НАЧАЛЬНЫЙ ЭТАП ДВИЖЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ОТРЫВА ЧАСТИЦ ЖИДКОСТИ ОТ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2015

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и математической физики Южного федерального университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент **Норкин Михаил Викторович**

Официальные оппоненты: **Якимов Николай Дмитриевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный энергетический университет

Демехин Евгений Афанасьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Краснодарский филиал ФГБОУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Ведущая организация: Пермский государственный национальный исследовательский университет

Защита состоится «___» __________ 2015 г. в ___ часов ___ минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, Казань, ул.Кремлевская,18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» и на сайте ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» www.kpfu.ru.

Автореферат разослан «___» __________ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент А. А. Саченков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Изучение процессов взаимодействия твердого тела с жидкостью, имеющей свободную границу, является предметом интенсивных исследований последнего столетия. Интерес к этой области механики жидкости вызван важностью ее технических приложений в морской гидродинамике и авиации. Это обусловлено необходимостью решения ряда практических задач, таких как моделирование движений кораблей с большими ускорениями, моделирование поведения больших морских сооружений при образовании волн, моделирование посадки гидросамолетов на воду, либо посадки самолетов на плавающий аэродром, расчет прочности корпусов судов и различных морских сооружений и т. п. Среди важных направлений исследования отметим задачи о начальном этапе движения твердых тел, плавающих на поверхности жидкости или полностью погруженных в нее; задачи о падении тел на поверхность жидкости, задачи об ударе, а также задачи об установившемся движении и вибрации твердых тел в жидкости. Кроме актуальных технических приложений данные задачи представляют большой теоретический интерес для математической физики и компьютерного моделирования, так как они сводятся к исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных со смешанными граничными условиями.

Подробное изложение опубликованных работ по ряду многочисленных направлений теории взаимодействия твердых тел с жидкостью содержится в монографиях и обзорных статьях Григолюка Э. И. и Горшкова А. Г., Сагомоняна А. Я., Коробкина А. А., Маклакова Д. В., Филиппова С. И., Горлова С. И., Терентьева А. Г. и Афанасьева К. Е., Короткина А. И., Стуровой И. В., Кубенко В. Д., Норкина М. В., Yeung R., Greenhow M., Moyo S., Wu G.X., Faltinsen O.M.

За последние годы большую актуальность приобрели задачи, в которых необходимо учитывать явление отрыва частиц жидкости от поверхности плавающего тела. Анализ опубликованных результатов показывает, что в настоящее время достаточно хорошо изучены задачи об ударе с отрывом в постановке Л. И. Седова, где рассматривается момент, непосредственно следующий после удара. Проведенные в этой области исследования позволяют сделать вывод о том, что отрыв жидкости от тела при ударе происходит в подавляющем большинстве случаев. В гораздо меньшей степени исследованы нестационарные задачи о начальном этапе движения твердых тел в жидкости с учетом отрыва. Здесь следует отметить работы, в которых рассматривались динамические смешанные задачи об отрывном ударе и разгоне плавающих тел в жидкости (Норкин М. В., Коробкин А. А., 2011–2012), а также статьи, посвященные прониканию тела в воду на малых временах с учетом отрыва (Коробкин А. А., Хабахпашева Т. В., Ткачева Л. А., 2011–2013). В перечисленных задачах влияние отрыва оказывается существенным для реакции жидкости на тело, а также для картины течения жидкости вблизи зон отрыва.

Цель работы. Целью диссертации является исследование динамических смешанных задач о начальном этапе движения твердых тел в идеальной несжимаемой жидкости с учетом отрыва частиц жидкости от их поверхностей.

Методы исследования. Для решения поставленных задач применяются прямые асимптотические методы, эффективные на малых временах; методы теории пограничного слоя; численные методы решения смешанных краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных с односторонними ограничениями на поверхности тела; метод конечных элементов.

Научная новизна. Научная новизна положений выносимых на защиту заключается в следующем:

1. Разработана математическая модель отрывного разгона эллиптического цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами.

2. Исследовано влияние вращения цилиндра, а также чисел Фруда и кавитации на форму каверны и конфигурацию внешней свободной границы жидкости на малых временах.

3. Установлены точные условия возникновения отрыва частиц жидкости от поверхности тела при его поступательно-вращательном разгоне.

4. Предложена модификация прямого асимптотического метода, позволяющая на малых временах учитывать образование неоднозначностей на внешней свободной поверхности жидкости при поступательно-вращательном разгоне плавающего эллиптического цилиндра.

5. Изучено влияние скачка ускорения эллиптического цилиндра в возмущенной жидкости на расположение зоны отрыва и ее связность.

6. Проведено исследование задачи о начальном этапе движения эллиптического цилиндра в неоднородной несжимаемой жидкости со свободными границами.

7. Изучено совместное вертикальное движение плавающего эллиптического цилиндра и горизонтальной стенки на малых временах.

Практическая ценность. Разработанные методы исследования задач об отрывном разгоне твердых тел в жидкости позволяют получить большой объем информации, необходимый для понимания явлений, возникающих в результате отрыва жидкости от поверхности тела. Учет явления отрыва важен для правильного определения реакции жидкости на тело, а также для картины течения жидкости вблизи зон отрыва. Предложенная модель разгона с отрывом может быть использована для решения ряда практических задач корабельной гидродинамики.

Достоверность результатов. Достоверность полученных выводов обусловлена последовательным применением математически обоснованных методов; решением задач разными методами и сравнением, где это возможно, с результатами других авторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону 2012, 2014); «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IV» (Ростов-на-Дону, 2014); «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Дивноморск, 2014); на семинаре «Математические вопросы гидродинамики» (Ростов-на-Дону, ЮФУ кафедра Вычисл. матем. и матем. физики, 2014).

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (Задание №1.1398.2014/к).

Публикации. По результатам диссертации автором опубликовано 10 работ, из них 5 статей в реферируемых журналах, входящих в перечень ВАК. В совместных работах Норкину М. В. принадлежит постановка задач, рекомендации по выбору метода решения и общее руководство. Яковенко А. А. принадлежит численно-аналитическая реализация методик и исследование поставленных задач.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка литературы. Полный объем 130 страниц. Список литературы содержит 86 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность тематики, сделан обзор литературы по данной теме, описана структура и сформулированы цели диссертации, приведены сведения об апробации работы.

В первой главе рассматривается задача о начальном этапе движения эллиптического цилиндра, полностью погруженного в идеальную несжимаемую однородную жидкость, наполняющую ограниченный бассейн прямоугольной формы. Предполагается, что цилиндр движется из состояния покоя в горизонтальном направлении с постоянным поступательным ускорением, совершая при этом вращательные движения вокруг своей оси с постоянным угловым ускорением. При больших ускорениях цилиндра возникают области низкого давления вблизи тела и образуются каверны. В общем случае зона отрыва представляет собой несвязное множество. Формы каверн и конфигурация внешней свободной поверхности жидкости заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид (см. рис. 1):

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - t\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{Fr^2}(y - H) = 0, \quad R \in S_2(t) \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - t\right) + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t) \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = tn_x + t\omega_r(yn_x - xn_y), \quad R \in S_{11}(t) \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - t\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{Fr^2}(y - H) - 0.5\chi = 0, \quad R \in S_{12}(t) \tag{5}$$

$$\frac{(\Phi_x - t)x + \Phi_y y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left[R_0'(\theta) + \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right]\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad R \in S_{12}(t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = R^{-2}\left[\Phi_y x - (\Phi_x - t)y\right] + \omega_r t; \quad R_0(\theta) = (\cos^2\theta + \varepsilon^{-2}\sin^2\theta)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = H_B; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad x = H_R - 0.5t^2,\ H_L - 0.5t^2 \tag{7}$$

$$\Phi(x, y, 0) = 0; \quad \eta(\theta, 0) = 0; \quad \xi(x, 0) = 0 \tag{8}$$

$$h(t) = 0.5t^2; \quad \alpha(t) = 0.5\omega_r t^2$$

Здесь $\Phi = \Phi(x, y, t)$ — потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный в подвижной системе координат; $\Omega(t)$ — область, занятая жидкостью; $S_{11}(t)$ — часть поверхности цилиндра на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ — оторвавшаяся от поверхности цилиндра внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ — свободная поверхность жидкости, которая первоначально была горизонтальной; R — радиус-вектор с координатами (x, y); $h(t)$ и $\alpha(t)$ — перемещение и угол поворота цилиндра; a, b — полуоси эллипса; $\varepsilon = b/a$ — соотношение полуосей; $\rho = const$ — плотность жидкости; H_B — дно бассейна; H_L и H_R — левая и правая вертикальные стенки относительно неподвижной системы координат.

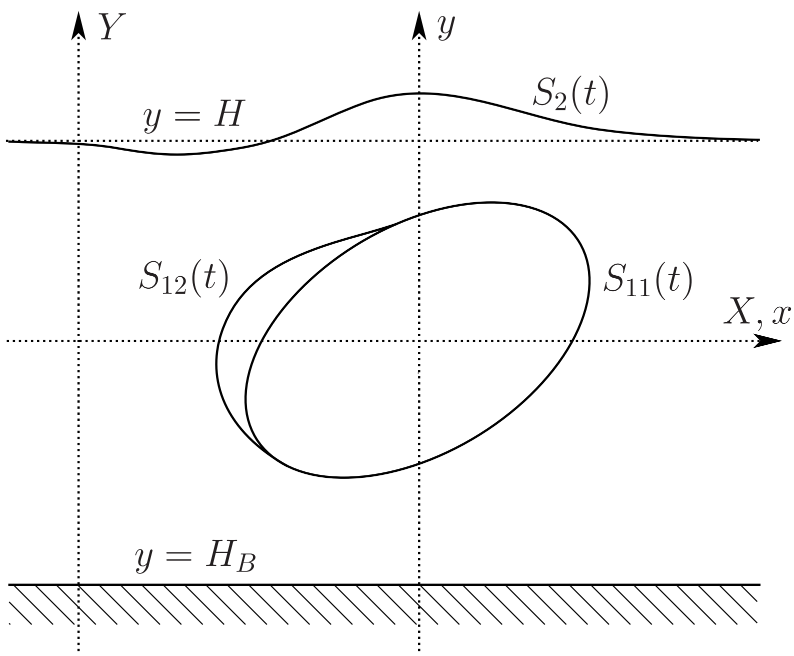

Рис. 1. Схема движения эллиптического цилиндра
в идеальной жидкости с учетом вращения

Функции $\eta = \eta(\theta, t)$ и $\xi = \xi(x, t)$ определяют возмущение внутренней и внешней свободных границ жидкости. Их уравнения относительно подвижной системы координат имеют вид:

$$R = R_0(\theta) + \eta(\theta, t); \quad y = H + \xi(x, t)$$

На этих границах задаются динамические и кинематические условия. Кинематическое условие на $S_{12}(t)$ записывается в полярных координатах $(R,\,\theta)$, где $x_1 = R\cos\theta,\ y_1 = R\sin\theta$ — координаты, связанные с осями эллипса ($x = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha,\ y = -x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha$). Граница тела описывается уравнением $R = R_0(\theta)$.

Задача (1)—(8) содержит безразмерные параметры:

$$Fr = \sqrt{\frac{w_0}{g}}, \quad \chi = 2\frac{p_a - p_c}{\rho w_0 a}, \quad \omega_r = \frac{w_r a}{w_0}$$

где Fr — число Фруда; χ — число кавитации; ω_r — безразмерное угловое ускорение цилиндра; p_a — атмосферное давление; p_c — давление в каверне; g — ускорение свободного падения; w_0 и w_r — поступательное и угловое ускорения цилиндра.

В точках пересечения внутренней свободной границы с поверхностью цилиндра (точках отрыва) ставится условие Кутта—Жуковского, согласно которому скорость жидкости в этих точках должна быть конечной.

После решения задачи (1)—(8) давление в жидкости определяется на основании интеграла Коши—Лагранжа:

$$p = p_0 - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} - t\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{Fr^2}(y - H)\right]$$

где p_0 — безразмерное атмосферное давление.

Для решения поставленной задачи применяется численно-аналитический метод, в основе которого лежат асимптотики на малых временах. Задача о разгоне с отрывом исследуется в главном приближении по времени на основании решения смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела:

$$\Delta\Phi_0 = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad \Phi_0 = 0, \quad y = H \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = n_x + \omega_r(yn_x - xn_y), \quad 0.5\chi - Fr^{-2}(y - H) - \Phi_0 \geqslant 0, \quad R \in S_{11}(0) \tag{10}$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \geqslant n_x + \omega_r(yn_x - xn_y), \quad 0.5\chi - Fr^{-2}(y - H) - \Phi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0) \tag{11}$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} = 0, \quad y = H_B, \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} = 0, \quad x = H_R,\ H_L \tag{12}$$

Здесь $S_{11}(0)$ и $S_{12}(0)$ — первоначальные зоны контакта и отрыва, которые получаются в результате предельного перехода при $t \to 0$ границ $S_{11}(t)$ и $S_{12}(t)$. В зоне отрыва выполняется кинематическое условие в виде неравенства, означающее, что жидкие частицы не могут входить внутрь твердого тела, хотя им разрешается отрываться от его границы. Динамическое граничное условие в виде неравенства в области контакта говорит о том, что давление на смоченной поверхности цилиндра не может опуститься ниже давления в каверне. Отметим, что в силу регулярности решения задачи (9)—(12) вблизи точек отрыва условие Кутта–Жуковского будет выполнено автоматически.

Задача (9)—(12) решается итерационным методом, в котором приближенно определяются неизвестные заранее зоны контакта и отрыва $S_{11}(0)$ и $S_{12}(0)$. Данная нелинейная задача сводится к последовательному решению линейных краевых задач с фиксированным разбиением границы тела на области задания краевых условий типа Дирихле—Неймана. Последние задачи решаются численно методом конечных элементов с применением пакета FreeFem++.

После решения задачи (9)—(12) потенциал скоростей, а также возмущения внешней и внутренней свободных границ жидкости на малых временах определяются по формулам $(t \to 0)$:

$$\Phi(x,y,t) = t\Phi_0(x,y) + o(t), \quad \xi(x,t) = t^2\xi_0(x) + o(t^2), \quad \eta(\theta,t) = t^2\eta_0(\theta) + o(t^2)$$

где функции $\xi_0(x)$ и $\eta_0(\theta)$ находятся из равенств:

$$2\xi_0(x) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \quad y = H; \qquad R_0^{-1}(\theta)\left((\Phi_{0x} - 1)x + \Phi_{0y}y\right) =$$
$$= R_0'(\theta)\left[R_0^{-2}(\theta)\left(\Phi_{0y}x - (\Phi_{0x} - 1)y\right) + \omega_r\right] + 2\eta_0(\theta), \quad R \in S_{12}(0)$$

Анализ решения задачи (9)—(12) вблизи точек отрыва показывает, что функция $\eta_0(\theta)$ является непрерывной в этих точках, а ее первая производная имеет в них особенность типа квадратного корня. Чтобы получить решение кинематического уравнения внутренней свободной границы класса C^1, нужно построить погранслойные решения в точках отрыва и согласовать их с внешним разложением. Определение формы внутренней свободной границы жидкости с учетом погранслойных решений в точках отрыва проводится для частного случая — поступательного движения кругового цилиндра. Внутреннее представление свободной границы в окрестности первой точки отрыва, имеющей угловую координату θ_{s1}, разыскивается в виде:

$$\eta(\theta,t)=\frac{1}{2}\beta_1 t^3 H(\tau)+o(t^3),\quad \tau=\frac{\theta-\theta_{S_1}}{t^2}$$

где β_1 — коэффициент в разложении функции $\eta_0(\theta)$ в окрестности рассматриваемой точки:

$$\eta_0(\theta)=\frac{1}{2}\beta_1\sqrt{\theta-\theta_{s_1}},$$

а функция $H(\tau)$ определяется на основании решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка на промежутке $0<\tau<\infty$ с нулевым начальным условием и условием сращивания с внешним решением на бесконечности.

Функция $H(\tau)$ имеет следующее явное выражение:

$$H(\tau)=\frac{4}{3\beta}\tau^{3/2},\quad 0\leqslant\tau\leqslant\frac{1}{2}\beta$$
$$H(\tau)=\frac{4}{3\beta}\left[\tau^{3/2}-(\tau-\frac{1}{2}\beta)^{3/2}\right],\quad \frac{1}{2}\beta\leqslant\tau<\infty$$

где $\beta=\sin\theta_{S_1}-Fr^{-2}\cos\theta_{S_1}$ (предполагается, что $\beta\geqslant 0$).

Аналогичное представление справедливо и для второй точки отрыва. На рисунке 2 показано согласование погранслойных решений с внешним разложением при горизонтальном разгоне плавающего эллиптического цилиндра ($H=1.5$, $H_B=-2$, $H_R=10$, $H_L=-10$, $Fr=3$, $\chi=0.1$, $t=0.7$).

В работе проведен значительный цикл вычислительных экспериментов для различных значений физических и геометрических параметров задачи. Показано, что при определенных условиях ($\varepsilon=0.5$, $H=0.7$, $H_B=-1.5$, $H_R=8$, $H_L=-8$, $Fr=3$, $\omega_r=3$, $t=0.5$, $\chi=0.1$) вблизи поверхности тела могут образоваться сразу две каверны (рис. 3).

При небольших ускорениях цилиндра вполне корректной оказывается задача о безотрывном обтекании. Структура решения этой задачи на малых временах имеет вид ($t\to 0$):

$$\Phi(x,y,t)=t\Phi_0(x,y)+t^3\Phi_1(x,y)+o(t^3) \tag{13}$$
$$\xi(x,t)=t^2\xi_0(x)+t^4\xi_1(x)+o(t^4) \tag{14}$$

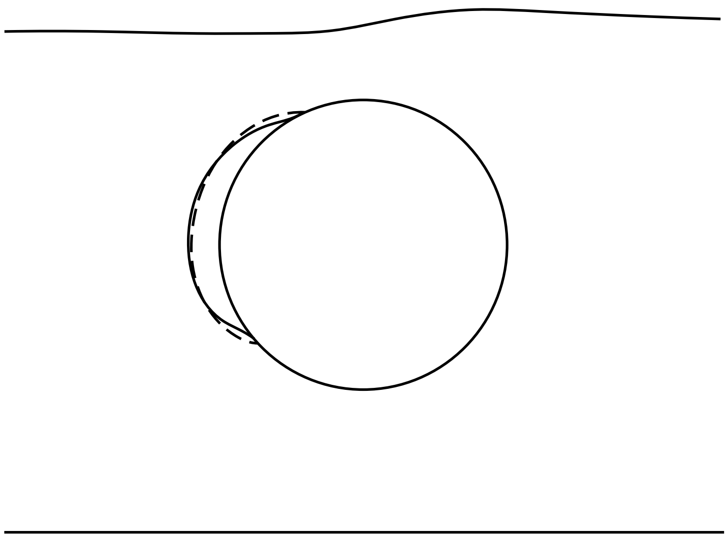

Рис. 2. Согласование погранслойных решений и внешнего разложения

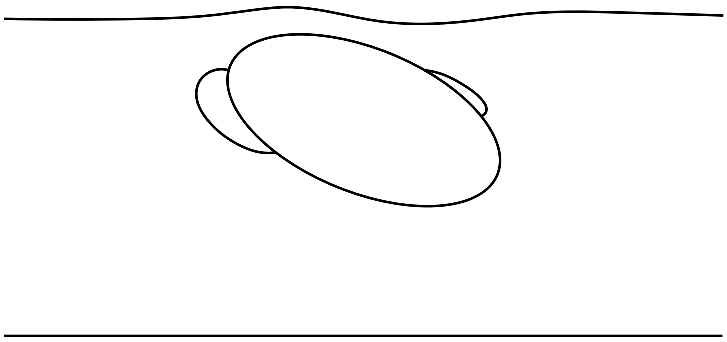

Рис. 3. Образование двух каверн

Для коэффициентов асимптотических разложений Φ_0 и Φ_1, с помощью процедуры «сноса», получены смешанные краевые задачи теории потенциала в первоначально-невозмущенной области (прямоугольнике с выброшенным эллипсом), которые решаются численно методом конечных элементов. На их основе последовательно определяются коэффициенты разложения (14). С помощью асимптотик (13)—(14) изучено влияние вращения цилиндра на конфигурацию внешней свободной поверхности жидкости на малых временах.

Нелинейные нестационарные задачи о неустановившемся движении цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости без учета отрыва частиц жидкости от его поверхности рассматривались во многих работах. В статьях Tyvand P. A., Miloh T. (J. Fluid Mech., 1995) исследовались задачи о движении кругового цилиндра после удара с постоянной скоростью и о его движении из состояния покоя с постоянным ускорением. Для решения этих задач, впервые, был применен асимптотический анализ на малых временах. Существенного продвижения по времени в задаче о начальном этапе движения кругового цилиндра удалось достичь только в результате применения прямых численных методов. Подробные обзоры численных результатов приведены в статье Горлова С. И. (Выч. технологии, 1998). Среди последних работ отметим статью Макаренко Н. И. и Костикова В. К. (ПМТФ, 2013), в которой изучалась задача о генерации нелинейных нестационарных волн на поверхности идеальной жидкости в бесконечно глубоком водоеме при движении погруженного эллиптического цилиндра (без вращения). Для ее решения был применен метод сведения исходной задачи к системе интегро-дифференциальных уравнений. На основе данного метода была получена начальная по времени асимптотика, описывающая движение цилиндра из состояния покоя с постоянным ускорением. В работе Коробкина А. А., Костикова В. К., Макаренко Н. И. (Вестник НГУ, 2012) изучалось движение эллиптического цилиндра под ледовым покровом, который моделировался упругой пластиной.

В диссертации большое внимание уделяется задачам, в которых безотрывный режим движения цилиндра сменяется на отрывной. Исследована задача об отрывном ударе эллиптического цилиндра из состояния разгона. В частности, рассмотрена мгновенная остановка тела, когда его скорость резко падает до нуля. Особенностью этой задачи является то, что в результате мгновенной остановки происходит отрыв жидкости от тела (жидкость срывается с поверхности тела в его передней части). При этом образующаяся на поверхности тела зона отрыва заранее неизвестна и подлежит определению в ходе решения задачи.

Предложена модификация прямого асимптотического метода по времени, позволяющая учитывать образование неоднозначностей на внешней свободной границе жидкости при поступательно-вращательном разгоне плавающего эллиптического цилиндра. Показано, что вращение контура и его форма оказывают существенное влияние на процессы, приводящие к обрушению волн. Процессы обрушения волн, вызванные поступательным движением кругового цилиндра подробно изучены в статьях Горлова С. И. (ПМТФ, 1999 и др.). В этих работах обрушение волн происходит уже после разгона цилиндра, когда рассматривается режим движения с постоянной скоростью.

В первой главе получены точные условия возникновения отрыва частиц жидкости от поверхности движущегося тела. На плоскости физических параметров $(\chi,\ Fr)$ постороены нейтральные кривые, разделяющие области безотрывного и отрывного разгона цилиндра. Также приведены примеры решения задач о разгоне двух эллиптических цилиндров.

Во второй главе рассматривается задача об отрывном разгоне или торможении эллиптического цилиндра в возмущенной идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Предполагается, что до начала отрывного движения свободная граница приобрела форму, обусловленную безотрывным разгоном цилиндра на малых временах. Исследование задачи проводится на основе общей математической модели (1)—(8), где скорость движения цилиндра определяется формулами:

$$\dot{h}(t) = t, \quad 0 < t < t_*; \quad \dot{h}(t) = \omega_1(t - t_*) + t_*, \quad t > t_*$$

Изучение поставленной задачи можно разделить на два основных этапа. Вначале строится решение задачи о безотрывном разгоне эллиптического цилиндра на промежутке времени $0 < t < t_*$. Затем, после смены режима движения, рассматривается задача об отрывном разгоне или торможении тела в жидкости. Решение первой задачи на малых временах представляется в виде асимптотических разложений (13)—(14). На их основе определяется потенциал скоростей $\Phi(x, y, t_*)$ и возмущение свободной границы $\xi(x, t_*)$ в момент времени t_*. После этого рассматривается движение с отрывом. Структура решения задачи при $t > t_*$ имеет вид ($\tau = t - t_*$, $\tau \to 0$):

$$\Phi(x, y, t) = \Phi(x, y, t_*) + \tau\Phi_2(x, y) + o(\tau) \tag{15}$$

$$\xi(x, t) = \xi(x, t_*) + \tau\xi_2(x) + \tau^2\xi_3(x) + o(\tau^2) \tag{16}$$

$$\eta(\theta, t) = \tau\eta_0(\theta) + \tau^2\eta_1(\theta) + o(\tau^2) \tag{17}$$

Исследования по отрывному разгону твердых тел в первоначально покоящейся жидкости показали, что отрыв происходит сразу по конечному и, в большинстве случаев, не маленькому участку поверхности тела. При этом для корректной постановки задачи определения первоначальных зон контакта и отрыва необходимо сформулировать дополнительные граничные условия в виде неравенств.

Подставляя (15)—(17) в уравнение и граничные условия рассматриваемой задачи, в главном приближении по времени, с учетом дополнительных условий в виде неравенств, получим для определения функции Φ_2 смешанную краевую задачу теории потенциала в области $\Omega(t_*)$ с односторонними ограничениями на поверхности тела:

$$\Delta\Phi_2 = 0, \quad R \in \Omega(t_*); \tag{18}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = \omega_1 n_x, \quad F(\Phi_2) \geqslant 0, \quad R \in S_{11}(t_*) \tag{19}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \geqslant \omega_1 n_x, \quad F(\Phi_2) = 0, \quad R \in S_{12}(t_*) \tag{20}$$

$$\Phi_2 = t_*\frac{\partial\Phi_*}{\partial x} - \frac{1}{2}(\nabla\Phi_*)^2 - Fr^{-2}\xi(x,t_*), \quad R \in S_2(t_*) \tag{21}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = 0, \quad y = H_B; \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial^2\Phi_*}{\partial x^2}t_*, x = H_R - h(t_*),\ H_L - h(t_*) \tag{22}$$

$$F(\Phi_2) = 0.5\chi - \Phi_2 + t_*\frac{\partial\Phi_*}{\partial x} - \frac{1}{2}(\nabla\Phi_*)^2 - Fr^{-2}(y - H)$$

$$\Phi_* = \Phi(x,y,t_*), \quad \xi_* = \xi(x,t_*)$$

Здесь $S_{11}(t_*)$ и $S_{12}(t_*)$ — первоначальные зоны контакта и отрыва, которые получаются в результате предельного перехода при $t \to t_*$ ($t > t_*$) границ $S_{11}(t)$ и $S_{12}(t)$.

На основании решения задачи с односторонними ограничениями находятся коэффициенты разложений (15)—(17). Отметим, что для определения первых малых членов этих разложений не требуется решения новых краевых задач (функция $\eta_0(\theta)$ оказывается равной нулю, а функция $\xi_2(x)$ явно выражается через функции $\xi_0(x)$ и $\xi_1(x)$). Существенными здесь оказываются следующие члены разложений $\xi_3(x)$ и $\eta_1(\theta)$, которые находятся на основании решения нелинейной задачи (18)—(22).

Проведенные исследования показали, что при быстром разгоне тела из состояния волнения (без вращения) вблизи его поверхности могут образоваться сразу две каверны. При увеличении ускорения тела зоны отрыва смыкаются, образуя большую каверну за телом (см. рис. 4). Аналогичная картина наблюдается при быстром торможении, когда жидкость срывается с поверхности тела в его передней части. При неограниченном увеличении ускорения тела задача разгона переходит в задачу удара. Отметим, что при повторной смене режима движения твердого тела в жидкости, число зон отрыва может увеличиться.

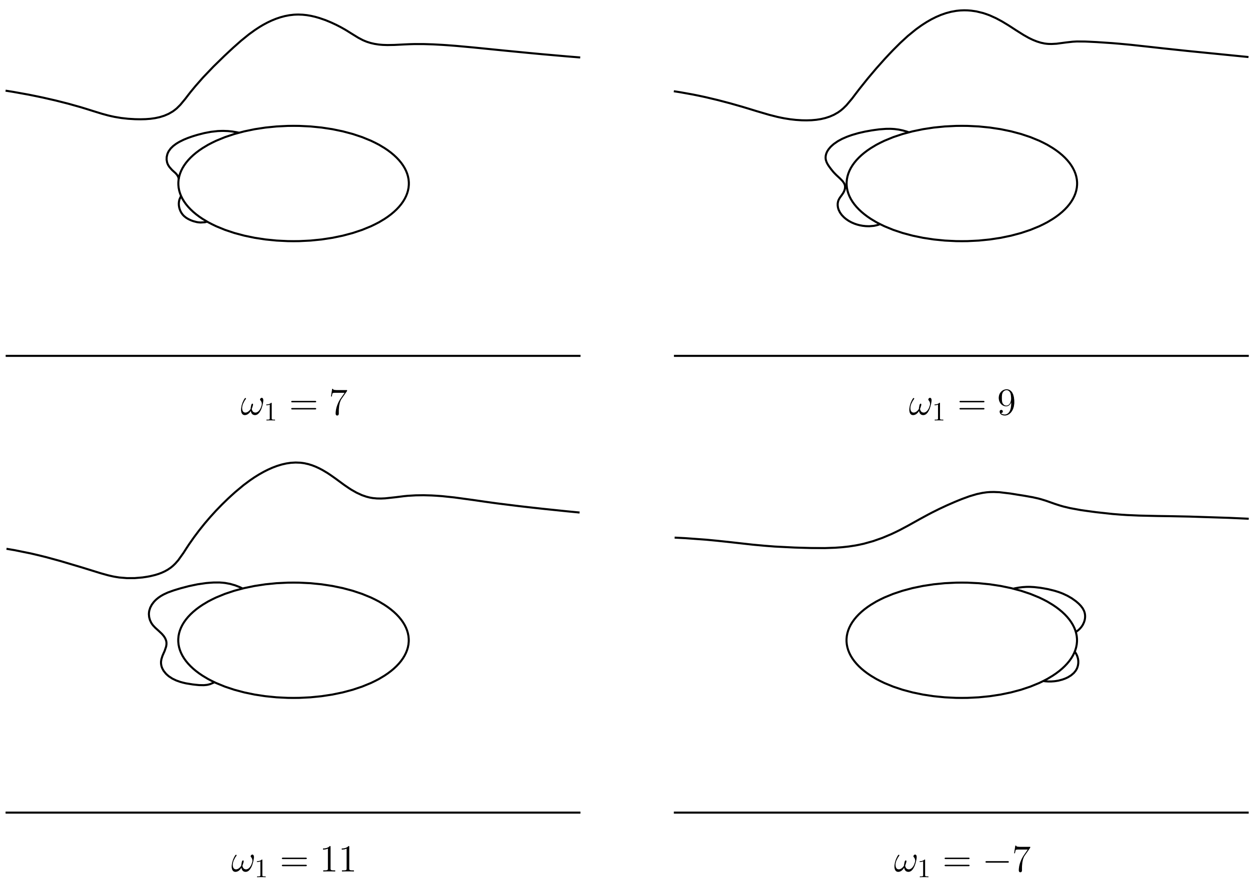

Рис. 4. Образование каверн при различных скачках ускорения

При старте твердое тело испытывает со стороны жидкости очень большие нагрузки. В связи с этим актуальным является снижение сопротивления тела с помощью искусственной кавитации. Если отрывной разгон тела начинается одновременно с подачей газа в каверну, то первоначальная зона отрыва будет зависеть от давления этого газа, ускорения цилиндра, а также от глубины его погружения. В главе исследуется вопрос о влиянии давления в каверне на реакцию жидкости на тело при его старте. Сделан вывод о том, что при совместном действии больших ускорений и искусственной кавитации можно снизить силу сопротивления в несколько раз при незначительном изменении подъемной силы и момента. Для подтверждения справедливости полученных численных результатов, приводится пример задачи, имеющей аналитическое решение.

В третьей главе исследуется совместное движение идеальной, несжимаемой, неоднородной жидкости и полностью погруженного в нее эллиптического цилиндра на малых временах. Предполагается, что цилиндр движется из состояния покоя в горизонтальном направлении с постоянным ускорением. При движении с большими ускорениями происходит отрыв жидкости от тела, в результате которого вблизи его поверхности образуется каверна и появляется новая внутренняя свободная граница. Математическая постановка задачи о разгоне с отрывом включает в себя полные нелинейные уравнения движения идеальной, несжимаемой, неоднородной жидкости, а также соответствующие начальные и граничные условия. Скорость движения жидкости, давление, плотность и возмущения внутренней и внешней свободных границ жидкости на малых временах представляются в виде разложений ($t \to 0$):

$$\vec{v}(x,y,t) = t\vec{v}_0(x,y) + o(t), \quad p(x,y,t) = p_0(x,y) + o(1),$$
$$\rho(x,y,t) = \rho_0(y) + o(1) \tag{23}$$
$$\xi(x,t) = t^2\xi_0(x) + o(t^2), \quad \eta(\theta,t) = t^2\eta_0(\theta) + o(t^2) \tag{24}$$

где $\rho_0(y)$ — плотность первоначально невозмущенной жидкости.

Отметим, что все дальнейшие рассуждения носят общий характер и справедливы для произвольной функции $\rho_0(y)$. Конкретные примеры рассматриваются для случая экспоненциально-стратифицированной жидкости (k — показатель стратификации):

$$\rho_0(y) = e^{k(H-y)} \tag{25}$$

Подставляя асимптотические разложения (23)—(24) в систему уравнений Эйлера для неоднородной жидкости, в главном приближении по времени, с учетом дополнительных условий в виде неравенств, получим для определения функции p_0 смешанную краевую задачу для эллиптического дифференциального уравнения второго порядка с неизвестными априори областями контакта и отрыва:

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho_0}\nabla p_0\right) = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad p_0 = 0, \quad y = H$$
$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial n} = Fr^{-2}n_y + n_x, \quad p_0 \geqslant -0.5\chi, \quad R \in S_{11}(0)$$
$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial n} \geqslant Fr^{-2}n_y + n_x, \quad p_0 = -0.5\chi, \quad R \in S_{12}(0)$$
$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = 0, \quad x = H_R,\ H_L; \quad -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y} = Fr^{-2}, \quad y = H_B$$

Отметим, что близкая по математической постановке задача об ударе с отрывом твердого тела, плавающего на поверхности неоднородной жидкости, была рассмотрена в статье В. И. Юдовича (Владикавк. мат. журнал, 2005), где была доказана теорема существования и единственности ее решения.

После решения задачи с односторонними ограничениями, функции $\xi_0(x)$ и $\eta_0(\theta)$ определяются на основании равенств:

$$v_{0y} = 2\xi_0(x); \qquad R_0^{-1}(\theta)\left[x(v_{0x}-1)+yv_{0y}\right] = \\ = R_0'(\theta)R_0^{-2}(\theta)\left[xv_{0y}-y(v_{0x}-1)\right]+2\eta_0(\theta)$$

Отдельно рассматривается задача о безотрывном разгоне цилиндра в неоднородной жидкости. Ее анализ проводится на основании первых двух членов асимптотики.

Основное внимание при исследовании задачи уделяется изучению влияния начального распределения плотности, а также чисел Фруда и кавитации на форму каверны и конфигурацию внешней свободной поверхности жидкости. Для ряда конкретных случаев изучены условия возникновения отрыва частиц жидкости от поверхности движущегося тела. Показано, что небольшие показатели стратификации оказывают существенное влияние на условия возникновения отрыва, а также на реакцию жидкости на тело.

В четвертой главе рассматривается одновременное вертикальное движение эллиптического цилиндра, полностью погруженного в идеальную несжимаемую однородную жидкость и горизонтальной стенки (дна) на малых временах. Предполагается, что твердая стенка начинает плавный вертикальный разгон с постоянным ускорением. При этом рассматриваются случаи, когда цилиндр свободно движется в жидкости или разгоняется из состояния покоя с постоянным ускорением. Свободные движения цилиндра не приводят к отрыву частиц жидкости от его поверхности (для отрыва цилиндру нужно сообщить дополнительное начальное ускорение). В этом случае закон движения цилиндра и форма внешней свободной поверхности жидкости заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. Задача с отрывом и образованием каверны вблизи тела исследуется при заданных законах движения цилиндра и стенки.

Приведены результаты по определению формы каверны и конфигурации внешней свободной поверхности жидкости на малых временах. Показано, что при определенных условиях на поверхности эллипса могут образоваться сразу две зоны отрыва. В задаче об отрывном разгоне кругового цилиндра, полностью погруженного в жидкость, построены погранслойные решения в точках отрыва и проведено их согласование с внешним разложением. Также исследована задача об отрывном разгоне кругового цилиндра, погруженного в жидкость больше, чем наполовину.

В заключении диссертации перечислены основные результаты работы.

В приложении содержатся тексты программ, написанные в среде пакета FreeFem++. Они представляют собой численную реализацию задачи разгона эллиптического цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости как без учета, так и с учетом отрыва частиц жидкости от его поверхности.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Норкин М. В., Яковенко А. А.* Начальный этап движения эллиптического цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т.52. №11. С.2060–2070.

2. *Норкин М. В., Яковенко А. А.* Начальный этап движения эллиптического цилиндра в неоднородной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью // Изв. высш. учеб. заведений. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. 2013. №2. С.13-17.

3. *Норкин М. В., Яковенко А. А.* Формы свободных границ жидкости на малых временах при совместном вертикальном движении эллиптического цилиндра и горизонтальной стенки // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2013. №2. С.67–73.

4. *Норкин М. В., Яковенко А. А.* Образование неоднозначностей на свободной поверхности жидкости при поступательно-вращательном разгоне плавающего эллиптического цилиндра // Изв. высш. учеб. заведений. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. 2014. №1. С.18-22.

5. *Яковенко А. А.* Условия возникновения отрыва жидкости при поступательно-вращательном разгоне плавающего эллиптического цилиндра //

Изв. высш. учеб. заведений. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. 2014. №3. С.22-26.

6. *Норкин М. В., Яковенко А. А.* Разгон эллиптического цилиндра в неоднородной жидкости со свободной поверхностью. Современные проблемы механики сплошной среды. Труды 16 международной конференции. Ростов-на-Дону, 16—19 октября 2012 г. Том 2. Изд-во ЮФУ. С.172-176.

7. *Норкин М. В., Яковенко А. А.* Математические вопросы возникновения кавитации на начальном этапе движения твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IV». Тезисы докладов. Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов н/Д, 2014. С.104.

8. *Норкин М. В., Яковенко А. А.* Математическое моделирование начального этапа отрывного движения эллиптического цилиндра в возмущенной жидкости со свободной поверхностью. «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете». Тезисы докладов. Изд-во ЮФУ, Ростов н/Д, 2014. С.105.

9. *Норкин М. В., Яковенко А. А.* Разгон и торможение эллиптического цилиндра в возмущенной жидкости с учетом отрыва частиц жидкости от его поверхности. Труды XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 14—17 октября 2014 г. Изд-во ЮФУ, 2014. Т.2. С.151-155.

10. *Яковенко А. А.* Условия возникновения отрыва жидкости на начальном этапе движения плавающего эллиптического цилиндра с учетом искусственной кавитации. Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IV». Тезисы докладов. Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов н/Д, 2014. С.134-135.