На правах рукописи

НАЗАРУК Елена Маратовна

Прямой метод Ляпунова для линейных систем ФДУ в пространстве Соболева

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Казань – 2016

Работа выполнена на кафедре

«Прикладная математика и фундаментальная информатика»

ФГБОУ ВПО «Омский государственный технический университет»

Научный руководитель:	Романовский Рэм Константинович, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Омский государственный технический университет»
Официальные оппоненты:	Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Вологодский государственный университет»
	Логинов Борис Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный технический университет»
Ведущая организация:	ФГОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

Защита состоится 21 апреля 2016 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д. 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, уч. корпус 2, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, НБ КФУ).

Автореферат разослан «___»___________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. ф.-м. н., доцент — Е. К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Начиная со второй половины 20-го века интенсивно развивается теория устойчивости для функционально – дифференциальных уравнений (ФДУ). Основным методом анализа устойчивости вплоть до настоящего времени является второй или прямой метод Ляпунова. Первые фундаментальные результаты в этом направлении получены в работах Б. С. Разумихина и Н. Н. Красовского. В 60-е – 90-е годы развитые в этих работах подходы к анализу устойчивости ФДУ были существенно продвинуты в работах С. Н. Шиманова, В. Б. Колмановского и В. Р. Носова, Дж. Хейла, А. В. Кима, В. В. Румянцева и других авторов, получены приложения к анализу технических, медико-биологических, экономических и других систем.

В последние полтора десятилетия проблематика, связанная с построением и применением к различным классам ФДУ функционалов Ляпунова, получила дальнейшее развитие в работах А. С. Андреева, С. П. Павликова, Г. В. Демиденко, Р. К. Романовского, А. И. Кирьянена, А. П. Жабко, Л. Б. Княжище, Ю. Ф. Долгого, Л. А. Власенко и ряда других авторов.

В связи с задачами, возникающими в приложениях, в последние годы возрос интерес к изучению ФДУ в банаховых и гильбертовых пространствах. В частности цикл работ В. В. Власова и Д. И. Медведева посвящен анализу асимптотических свойств решений линейных автономных ФДУ в пространствах Соболева W_2^m. Эти результаты получены в терминах нулей характеристических квазиполиномов.

Представляет теоретический и практический интерес распространение на эту ситуацию прямого метода Ляпунова, при том – в более общем случае неавтономных линейных систем ФДУ.

Цель работы: разработка варианта прямого метода Ляпунова для исследования асимптотического поведения – экспоненциальной устойчивости и экспоненциальной дихотомии – решений линейных неавтономных систем ФДУ в пространстве Соболева H^1.

Из сказанного выше вытекает актуальность темы диссертации.

Научная новизна. В работе получены следующие **основные результаты.**

1. Разработан подход к исследованию асимптотического поведения решений линейных неавтономных систем функционально – дифференциальных уравнений (ФДУ) в пространстве Соболева H^1 сведением к такой же задаче для разностного уравнения в пространстве, изоморфном H^1. Развит вариант прямого метода Ляпунова применительно к этой ситуации.

2. Доказан критерий экспоненциальной устойчивости в H^1 – топологии для линейной неавтономной системы ФДУ запаздывающего типа. Построен класс функционалов Ляпунова, для которых критерий эффективно проверяется. Этот результат распространен на класс линейных неавтономных систем ФДУ нейтрального типа.

3. Доказано достаточное условие экспоненциальной дихотомии в H^1 – топологии для линейной неавтономной системы ФДУ запаздывающего типа. Построен класс индефинитных функционалов Ляпунова, для которых условие эффективно проверяется. Построены подпространства фазового пространства, реализующие дихотомию.

4. На основе результатов п. 2, 3 получены условия экспоненциальной устойчивости и дихотомии для линейных неавтономных дифференциально – разностных систем запаздывающего типа.

В Приложении доказан критерий экспоненциальной устойчивости и дихотомии для линейной автономной системы ФДУ нейтрального типа в терминах расположения на плоскости корней характеристического квазимногочлена.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты представляют собой дальнейшее развитие прямого метода Ляпунова для функционально-дифференциальных уравнений. Предложенные подходы к расчету на устойчивость и дихотомию могут быть использованы при исследовании асимптотического поведения динамических систем с последействием, встречающихся в задачах теории колебаний, теории автоматического управления.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на конференциях «Аналитическая механика, устойчивость и управление» (Казань, июнь 2012 г.), «Динамика систем, механизмов и машин» (Омск, ноябрь 2012 г.), «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений» (Новосибирск , август 2013 г.), «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань , август 2013 г.), XVI МНК по дифференциальным уравнениям ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014 (Беларусь, Новополоцк, май 2014 г.), «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций» (Казань, сентябрь – октябрь 2014 г.), «Динамика систем, механизмов и машин» (Омск, ноябрь 2014 г.).

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах, из них статьи [1–6] в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК. Из совместных работ в диссертацию вошли только результаты, полученные лично диссертантом.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения, заключения и списка литературы из 130 наименований, включая работы автора. В каждой главе использована своя нумерация параграфов, формул и теорем. Объем диссертации 112 страниц.

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю Р. К. Романовскому за предложенную тематику исследований, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обзор литературы и дается краткая аннотация результатов работы.

1. Глава 1 является вспомогательной. Содержит сведения из теории функций и функционального анализа, на которые опирается дальнейшее изложение. Ниже приводятся четыре основных леммы (из них леммы 1.2 и 1.4 доказаны автором).

Введем пространства

$$\mathrm{H}^0 = L_2\big((0,1) \to \mathbb{C}^N\big), \quad \mathrm{H}^1 = \mathrm{W}_2^1\big((0,1) \to \mathbb{C}^N\big). \tag{1}$$

ЛЕММА 1.1 *Функции* $\varphi \in \mathrm{H}^1$ *абсолютно непрерывны.*

Из леммы 1.1, в частности вытекает для функций $\varphi \in \mathrm{H}^1$ существование почти всюду производной $\dot{\varphi} \in \mathrm{H}^0$ и формула Ньютона – Лейбница

$$\varphi(\tau) = \int_0^\tau \dot{\varphi}(s)\,ds + \varphi(0)\,.$$

Определим в H^1 скалярное произведение формулой

$$\left\langle \varphi_1, \varphi_2 \right\rangle_{\mathrm{H}^1} = \int_0^1 \varphi_2^* \varphi_1\,ds + \varphi_2^*(0)\varphi_1(0)\,.$$

Соответствующая норма имеет вид

$$\|\varphi\|_{\mathrm{H}^1}^2 = \int_0^1 |\dot{\varphi}|^2 ds + |\varphi(0)|^2. \tag{2}$$

ЛЕММА 1.2. *Норма* (2) *топологически эквивалентна стандартной норме в* H^1.

Введем гильбертово пространство

$$E=\left\{u=\begin{bmatrix}\psi\\ f\end{bmatrix},\ \ \psi\in\mathrm{H}^0,\ \ f\in\mathbb{C}^N\right\}$$

со скалярным произведением $\langle u_1,u_2\rangle_E=\int_0^1\psi_2^*\,\psi_1\,ds+f_2^*\,f_1$

и, соответственно, нормой $\|u\|_E^2=\int_0^1|\psi|^2ds+|\,f\,|^2$.

ЛЕММА. 1.3. *Гильбертовы пространства* H^1, E *изоморфны. Изоморфизм задается отображениями*

$$\mathcal{J}\varphi=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \varphi(0)\end{bmatrix},\quad \mathcal{J}^{-1}u=\int_0^\tau\psi(s)\,ds+f\,. \tag{3}$$

Построим операторную матрицу

$$F=\begin{bmatrix}\mathcal{F} & \mathcal{F}_1\\ S\mathcal{F}_1^* & \mathcal{F}_0\end{bmatrix},\qquad S\psi=\int_0^1\psi(s)\,ds,$$
$$\mathcal{F},\mathcal{F}_1\in End\left(\mathrm{H}^0\right),\quad \mathcal{F}_0\in\mathbb{C}^{N\times N},\quad \mathcal{F}^*=\mathcal{F},\quad \mathcal{F}_0^*=\mathcal{F}_0. \tag{4}$$

Обозначим $\mathrm{I}\,,\mathrm{I}_0$ единицы соответственно в H^0, $\mathbb{C}^N$.

ЛЕММА 1.4. *Матрица* (4) *задает эрмитов оператор* $E\to E$:

$$F\in End\ (E)\,,\ \ F^*=F.$$

Если при этом

$$\mathcal{F}_0\geq\alpha I_0,\quad \Delta=\mathcal{F}-\mathcal{F}_1\mathcal{F}_0^{-1}\mathcal{F}_1^*\geq\alpha I,\quad \alpha=const>0, \tag{5}$$

то при некотором $\hat{\alpha}>0$ *имеет место оценка*

$$F\geq\hat{\alpha}I_E,\qquad \mathrm{I}_{\mathrm{E}}=\begin{bmatrix}\mathrm{I} & 0\\ 0 & \mathrm{I}_0\end{bmatrix}. \tag{6}$$

2. В главе 2 – основной – исследуется устойчивость решений классов линейных ФДУ в фазовом пространстве

$\mathcal{H}^1 = \mathrm{W}^1_{2,\,loc}\left((0,1) \to \mathbb{C}^N\right) = \left\{x:[0,\infty) \to \mathbb{C}^N \,\middle|\, x \in \mathrm{W}^1_2 \text{ на каждом отрезке}\right\}.$

Подход состоит в сведении, с использованием изоморфизма (3), к такой же задаче для разностного уравнения в фазовом пространстве E. Развит вариант прямого метода Ляпунова применительно к этой ситуации. Полученные результаты иллюстрируются на примерах.

2.1. В §2.1 рассматривается задача Коши для неавтономной системы ФДУ запаздывающего типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \int\limits_0^1 [d_s T(s,t)]x(t-s), \qquad t \geq 1, \\ x\big|_{[0,1]} = \varphi \in \mathrm{H}^1. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $T:[0,1]\times[1,\infty) \to \mathbb{C}^{N\times N}$, $T \in C$ по t, $\quad |T| \leq const, \quad T(0,t) = 0.$

Под решением задачи (7) понимается функция $x \in \mathcal{H}^1$, удовлетворяющая (7) почти всюду.

Построим по матрице T операторы $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n : \mathrm{H}^0 \to \mathrm{H}^0$ и матрицу $\varGamma_n$

$$\mathcal{A}_n \psi = \int\limits_0^\tau T(\tau - s, \tau + n)\psi(s)ds,$$

$$\mathcal{B}_n \psi = \int\limits_\tau^1 \left[T(1, \tau + n) - T(1 + \tau - s, \tau + n)\right]\psi(s)ds,$$

$$\varGamma_n(\tau) = T(1, \tau + n),\ \ \tau \in [0,1],\ \ n \geq 1.$$

ЛЕММА 2.1. *Оператор* $I - \mathcal{A}_n$ *имеет равномерно по n ограниченный обратный* $\mathrm{H}^0 \to \mathrm{H}^0$.

Построим операторную матрицу

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} I - \mathcal{A}_n & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \varGamma_n S - \mathcal{B}_n & \varGamma_n \\ S & I_0 \end{bmatrix},$$

где S – оператор (0.4).

ЛЕММА 2.2. 1^0. *Матрица* Λ_n *задает равномерно по* n *ограниченный обратный оператор* $E \to E$.

2^0. *Оператор* Λ_n *компактен.*

Рассмотрим задачу Коши

$$u_n = \Lambda_n u_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad u_0 = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ f_0 \end{bmatrix} \in E. \tag{8}$$

Очевидно, задача (8) однозначно разрешима в E.

ТЕОРЕМА 2.1. 1^0. *Если* $x(t)$ *– решение класса* $\mathcal{H}^1$ *задачи* (7)*, то вектор*

$$u_n = \begin{bmatrix} \dot{x}_n(\tau) \\ x_n(0) \end{bmatrix}, \text{ где } \ x_n(\tau) = x(\tau + n), \quad \tau \in [0,1], \ n \geq 1,$$

решение задачи (8) *с начальным вектором* $u_0 = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \varphi(0) \end{bmatrix}$.

2^0. *Если* $u_n = \begin{bmatrix} \psi_n \\ f_n \end{bmatrix}$ *– решение задачи* (8) *то функция* $x : [0,\infty) \to \mathbb{C}^N$, *определяемая на* $[1,\infty)$ *равенствами*

$$x(t) = \int_0^{t-n} \psi_n(s)\,ds + f_n, \quad t \in [n, n+1], \ n \geq 1,$$

– решение задачи (7) с $\varphi(\tau) = \int_0^{\tau} \psi_0(s)\,ds + f_0$.

3^0. *Имеет место равенство*

$$\| x(\tau + n) \|_{\mathrm{H}^1} = \| u_n(\tau) \|_E, \quad n \geq 0. \tag{9}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Задача Коши* (7) *однозначно разрешима в классе* $\mathcal{H}^1$.

Далее операторы из $End(E)$ представляются операторными матрицами второго порядка.

2.2. Имея ввиду даваемое теоремой 2.1 соответствие между решениями $x \in \mathcal{H}^1$ задачи Коши (7) и решениями задачи Коши (8) *с сохранением нормы* (9), примем следующее определение.

Будем говорить, что решение $x=0$ системы ФДУ (9) *экспоненциально устойчиво в* H^1 *– топологии,* если решение $u_n=0$ разностного уравнения (8) экспоненциально устойчиво в E – топологии: при некоторых $\mu,\nu>0$ для решений задачи Коши (8) имеет место оценка

$$\|u_n\| \le \mu e^{-\nu(n-m)}\|u_m\|_E, \quad n\ge m\ge 0. \tag{10}$$

Обозначим Π класс операторных матриц – функций

$F_n:\mathbb{Z}^+\to End\ (E)$ со свойствами

$$F_n^*=F_n, \quad \alpha_1 I_E \le F_n \le \alpha_2 I_E, \ \ \alpha_k = const>0, \tag{11}$$

где I_E – матрица (6), $\alpha_k=\alpha_k(F_n)$. Поставим в соответствие матрице $F_n\in\Pi$ эрмитову форму

$$\upsilon(u,n)=\langle F_n u,u\rangle_E, \ \ u\in E. \tag{12}$$

Разность $\dot\upsilon=\upsilon(u_n,n)-\upsilon(u_{n-1},n-1),$ где u_n – решение уравнения (8), будем называть *разностной производной* формы υ вдоль траекторий системы (8). После подстановки $u_n=\Lambda_n u_{n-1}$ и замены $u_{n-1}\sim u$ $\dot\upsilon$ принимает вид

$$\dot\upsilon(u,n)=\langle G_n u,u\rangle_E, \quad G_n=\Lambda_n^* F_n\Lambda_n - F_{n-1}.$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Для того, чтобы решение* $x=0$ *системы* (7) *было экспоненциально устойчиво в* H^1 *– топологии, необходимо и достаточно существование матрицы* $F_n\in\Pi$ *такой, что матрица* G_n *эрмитовой формы* (12) *равномерно отрицательна:*

$$G_n\le-\alpha I_E, \quad \alpha=const>0. \tag{13}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Широкий класс матриц $F_n\in\Pi$ дают матрицы

$$F_n=Z_n^* F Z_n, \quad Z_n, Z_n^{-1}\in End\ (E), \quad \|Z_n\|,\|Z_n^{-1}\|\le const, \tag{14}$$

где F – матрица вида (4), удовлетворяющая требованиям (5) леммы 1.4. Эта лемма дает также подход к проверке условий устойчивости вида (13).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из оценки (10) для решений задачи Коши (8) вытекает, в частности, для соответствующих в силу теоремы 2.1 решений $x \in \mathscr{H}^1$ задачи Коши (7) оценка

$$\left|x(t)\right| \le \tilde{\mu} e^{-\nu n} \left\|\varphi\right\|_{\mathrm{H}^1}, \quad t \ge 1, \ \tilde{\mu} = const > 0.$$

2.3. В §2.3 в качестве приложения теоремы 2.1 рассмотрен частный случай $T = T(s), \quad T^*(s) = T(s).$

В этом случае матрица Λ_n в (8) имеет вид

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} I - \mathscr{A}_n & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} T(1)S - \mathscr{B} & T(1) \\ S & I_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}_n \psi = \int_0^\tau T(\tau - s)\psi(s)ds, \quad \mathscr{B}_n \psi = \int_\tau^1 \left[T(1) - T(1 + \tau - s)\right]\psi(s)ds.$$

Построим эрмитов оператор $\mathscr{B}_0 : \mathrm{H}^0 \to \mathrm{H}^0$

$$\mathscr{B}_0 \psi = \int_0^1 \left[T(1) - T\left(\left|\tau - s\right|\right)\right]\psi(s)ds.$$

ТЕОРЕМА 2.3. *Для того, чтобы решение* $x = 0$ *автономной системы* (7) *с эрмитовой матрицей* T *было экспоненциально устойчиво в* H^1 *– топологии, достаточно выполнение неравенств*

$$\mathscr{B}_0 \ge 0, \quad T(1) < 0, \quad b_0 = \int_0^1 \left|T(1) - T(s)\right|^2 ds < 1. \qquad (15)$$

В доказательстве использован функционал (12) с матрицей вида (14)

$$F = \begin{bmatrix} I & -T(1) \\ -ST(1) & T^2(1) - T(1) \end{bmatrix}, \qquad Z_n = Z = \begin{bmatrix} I - \mathscr{A} & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix}.$$

С помощью леммы 1.4 проверяется выполнение при условиях (15) соотношения $F \in \Pi$ и требования (13) на матрицу $G = \Lambda^* F \Lambda - F$. Приведен иллюстрирующий пример.

2.4. Параграф 2.4 посвящен переносу результатов §2.1 – 2.3 на подкласс ФДУ нейтрального типа. Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \int\limits_0^1 \left[d_s R(s,t)\right] \dot{x}(t-s) + \int\limits_0^1 [d_s T(s,t)] x(t-s), \quad t \ge 1, \\ x\big|_{[0,1]} = \varphi \in \mathrm{H}^1. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $R, T : [0,1] \times [1,\infty) \to \mathbb{C}^{N\times N}$, предполагается:

$$\begin{cases} R \text{ абсолютно непрерывна по } s, \ |R'_s| \le const, \\ \mathop{\mathrm{V}}\limits_{s=0}^{1}(T) < \infty, \ |T| \le const, \ T(0,t) = 0, \\ R'_s, \ T \text{ непрерывны по } t. \end{cases} \tag{17}$$

Исследуется устойчивость решений $x \in \mathcal{H}^1$ системы (16) сведением к такой же задаче для разностного уравнения в пространстве E

$$u_n = \tilde{\Lambda}_n u_{n-1}, \quad n \ge 1,$$

где матрица $\tilde{\Lambda}_n$ имеет такой же вид, как в (8), с заменой операторов $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n$ операторами

$$\tilde{\mathcal{A}}_n \psi = \int\limits_0^\tau \tilde{T}(\tau - s, \tau + n)\psi(s)ds, \quad \tilde{\mathcal{B}}_n \psi = \int\limits_\tau^1 \left[T(1, \tau + n) - \tilde{T}(1 + \tau - s, \tau + n)\right]\psi(s)ds,$$

$$\tilde{T}(s,t) = R'_s(s,t) + T(s,t).$$

Из построений попутно следует, как в §2.1, однозначная разрешимость задачи (16) в классе $\mathcal{H}^1$.

ТЕОРЕМА 2.4. *Для того чтобы решение* $x=0$ *системы* (16) *было экспоненциально устойчиво в* H^1 *– топологии, необходимо и достаточно существование матрицы* $F_n \in \Pi$ *такой, что матрица*

$$\tilde{G}_n = \tilde{\Lambda}_n^* F_n \Lambda_n^* - F_{n-1}, \quad n \ge 1,$$

равномерно отрицательна: $\tilde{G}_n \le -\alpha I_E$ при некотором $\alpha > 0.$

Пусть в (16)

$$R = R(s),\ T = T(s),\ R^* = R,\ T^* = T,\ \tilde{T}(s) = R'(s) + T(s). \tag{18}$$

$$\tilde{\mathscr{B}}_0 \psi = \int_0^1 \left[T(1) - \tilde{T}(|\tau - s|) \right] \psi(s) ds, \qquad \tilde{b}_0 = \int_0^1 \left| T(1) - \tilde{T}(s) \right|^2 ds < 1,$$

ТЕОРЕМА 2.5. *Для того, чтобы решение системы* (16) – (17) *с матрицами* (18) *было экспоненциально устойчиво в* H^1 *– топологии, достаточно выполнение неравенств*

$$\tilde{\mathscr{B}}_0 \le 0, \quad T(1) < 0, \quad \tilde{b}_0 < 1.$$

2.5. В §2.5 критерий устойчивости из §2.2 применен к частному случаю линейной неавтомной дифференциально –разностной системы запаздывающего типа. Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{l} A_k(t) x(t - a_k), \quad t \ge 1, \\ x|_{[0,1]} = \varphi \in \mathrm{H}^1, \end{cases} \tag{19}$$

$$A_k : [1;\infty) \to \mathbb{C}^{N \times N},\ A_k \in C, \quad |A_k| \le const, \quad 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_l = 1.$$

Из результатов §2.1 следует однозначная разрешимость задачи Коши (19) в классе $\mathscr{H}^1$. Поставим в соответствие числу $\tau \in [0,1)$ число

$$l(\tau) = \max\left\{ k \in \mathbb{Z} \mid a_k \le \tau \right\}.$$

Построим матрицы

$$A_{kn}(\tau)=A_k(\tau+n),\quad \varGamma_n(\tau)=\sum_{k=0}^{l}A_{kn}(\tau),\quad \tau\in[0,1],\quad n\geq 1, \tag{20}$$

операторы $C_n, D_n : \mathrm{H}^0 \to \mathrm{H}^0$, $\tilde{\Lambda}_n : E \to E.$

$$\begin{aligned} C_n\psi &= \sum_{k\leq l(\tau)} A_{kn}(\tau)\int_0^{\tau-a_k}\psi(s)\,ds,\\ D_n\psi &= \sum_{k> l(\tau)} A_{kn}(\tau)\int_{1+\tau-a_k}^{1}\psi(s)\,ds \end{aligned} \tag{21}$$

$$\hat{\Lambda}_n=\begin{bmatrix} I-C_n & 0\\ 0 & I_0\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\varGamma_n S-D_n & \varGamma_n\\ S & I_0\end{bmatrix}. \tag{22}$$

Обратимость оператора $I-C_n$ в H^0 доказана в §2.5.

ТЕОРЕМА. *Решение* $x=0$ *дифференциально-разностной системы* (19) *экспоненциально устойчиво в* H^1 *– топологии тогда и только тогда, когда при некоторой матрице* $F_n\in\Pi$ *выполняется неравенство*

$$\hat{G}_n=\hat{\Lambda}_n^{*}F_n\hat{\Lambda}_n-F_{n-1}\leq-\alpha I_E,\quad \alpha=const>0, \tag{23}$$

где $\hat{\Lambda}_n$ *– матрица* (22) *с операторами* (20), (21).

В приведенном примере использован функционал (12) с матрицей вида (14).

3. В главе 3 развитый в главе 2 подход к анализу устойчивости решений линейных систем ФДУ сведением к такой же задаче для разностного уравнения в пространстве $E=\mathrm{H}^0\otimes\mathbb{C}^N$ применен к анализу более сложного, чем устойчивость, типа поведения решений – экспоненциальной дихотомии.

3.1. Будем говорить, что для решений системы (7) имеет место *экспоненциальная дихотомия в* H^1 *– топологии*, если фазовое пространство E задачи Коши (8) распадается в прямую сумму подпространств

$$E = E_+ \dot{+} E_-, \quad E_\pm \neq \{0\}, \quad \dim \mathrm{E}_- < \infty, \tag{24}$$

так, что для решений задачи (8) имеют место при некоторых $\mu_k, \nu_k > 0$ оценки

$$\begin{aligned} u_0 \in E_+ \Rightarrow \|u_n\| \le \mu_1 e^{-\nu_1(n-m)} \|u_m\| \quad (n > m), \\ u_0 \in E_- \Rightarrow \|u_n\| \le \mu_2 e^{-\nu_2(m-n)} \|u_m\| \quad (n < m), \end{aligned} \tag{25}$$

Последнее требование (24) в автономном случае выполняется автоматически, в общем случае постулируется.

Построим класс $\mathcal{J}$ операторных матриц $\mathbb{Z}^+ \to End\ (E)$:

$$F_n = Z_n^* diag\left(P_1 - P_2, Q_1 - Q_2\right) Z_n,$$

$$Z_n, Z_n^{-1} End\ (E), \quad \|Z_n\|, \|Z_n^{-1}\| \le const,$$

P_k, Q_k −эрмитовы проекторы соответственно в $L_2(0,1)$, $\mathbb{C}^N$, $P_1 + P_2 = I$,

$$Q_1 + Q_2 = I_0, \ \dim \mathrm{P}_2 L_2 < \infty, \ \Pi_k = diag\left(P_k, Q_k\right) \neq 0,$$

при этом в каждой паре (P_1, Q_1), (P_2, Q_2) хотя бы один из проекторов отличен от нуля. Поставим в соответствие матрице $F_n \in \mathcal{J}$ индефинитную форму (12).

ТЕОРЕМА 3.1. *Для того, чтобы для решений системы* (7) *имела место экспоненциальная дихотомия в* H^1 – *топологии, достаточно, чтобы при некоторой* F_n класса $\mathcal{J}$ *матрица* G_n *разностной производной формы* υ *вдоль траекторий системы* (8) *была равномерно отрицательна.*

Построение подпространств (24), реализующих дихотомию, опирается на компактность оператора Λ_n (лемма 2.2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из оценок (25) можно получить, в частности, для решений $x \in \mathcal{H}^1$ задачи Коши (7) оценки вида

$$|x(t)| \le \tilde{\mu}_1 e^{-\nu_1 t} \|\varphi\|_{\mathrm{H}^1}, \quad \text{если } u_0 = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \varphi(0) \end{bmatrix} \in E_+,$$

$$\max_{[1,t]} |x(t)| \ge \tilde{\mu}_2 e^{-\nu_2 t} \|\varphi\|_{\mathrm{H}^1}, \quad \text{если } u_0 \in E_-.$$

3.2. В §3.3 в качестве следствия из теоремы 3.1 получена

ТЕОРЕМА 3.2. *Для того, чтобы для решений дифференциально-разностной системы* (19) *имела место экспоненциальная дихотомия в* H^1 – *топологии, достаточно выполнение при некоторой* F_n класса $\mathcal{J}$ неравенства (23), *где* $\hat{\Lambda}_n$ – *матрица* (22) *с операторами* (20), (21).

Развитая в §3.2 схема построения реализующих дихотомию подпространств (24) в §3.4 проиллюстрирована на конкретном примере.

4. В приложении доказан критерий экспоненциальной дихотомии в C – топологии в терминах расположения на плоскости корней характеристического квазиполинома.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. *Назарук, Е. М.* Спектральный критерий экспоненциальной дихотомии для линейной автономной системы функционально-дифференциальных уравнений / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Доклады АН ВШ РФ– 2012. – №1(18). – С. 19–27.
2. *Назарук, Е. М.* Прямой метод Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем запаздывающего типа в пространстве Соболева / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Доклады АН ВШ РФ. – 2013. – №2 (21). – С. 6–15
3. *Назарук, Е. М.* Прямой метод Ляпунова для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в пространстве Соболева. / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Сиб. матем. журнал .–2014. – Т. 55, № 4. – С. 846–857.

4. *Назарук, Е. М.* О дихотомии линейных автономных систем функционально-дифференциальных уравнений / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95. №1. – С.129–135.

5. *Назарук, Е. М.* Дихотомия решений функционально – дифференциальных уравнений в пространстве Соболева / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Дифференциальные уравнения. –2015. – Т.51, №4. – С. 459–471.

6. *Назарук, Е. М.* Дихотомия решений дифференциально-разностных уравнений в пространстве Соболева / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // ДАН. – 2015. – Т.461, №4. – С. 394 – 397.

Публикации в других изданиях

7. *Назарук, Е. М.* О дихотомии решений автономной системы дифференциально-разностных уравнений/ Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Труды X Международной четаевской конференции « Аналитическая механика, устойчивость и управление». Казань: Изд-во Казан. гос. тех. ун-та, 2012 – Т. 2. – С. 454–462.

8. *Назарук, Е. М.* Дихотомия решений линейной автономной системы ФДУ нейтрального типа / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Материалы VIII МНТК «Динамика систем, механизмов и машин», посвященной 70-летию ОмГТУ. Омск: Изд-во ОмГТУ 2012. – Книга III.– С. 93–97.

9. *Назарук, Е. М.* О дихотомии линейных систем нейтрального типа / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Тезисы докладов МНК «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений», посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск: СО РАН. – 2013. – С. 235.

10. *Назарук, Е. М.* О дихотомии линейных систем функционально-дифференциальных уравнений / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Материалы XI Казанской летней школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань: Казан. ун-т. – 2013. – Т. 46. – С. 327–330.

11. *Назарук, Е. М.* Прямой метод Ляпунова для линейных систем ФДУ в пространстве Соболева / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Тезисы докладов XVI МНК по дифференциальным уравнениям ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014. Новополоцк. Беларусь. Минск: Институт математики НАН Беларуси. – 2014. – С. 101.

12. *Назарук, Е. М.* Устойчивость и дихотомия линейных систем ФДУ в пространстве Соболева / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Материалы МНК «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций». Казань. Казань: Изд-во Казан. ун-та.–2014. – Т. 49. – С. 245–249.

13. *Назарук, Е. М.* Устойчивость решений линейных неавтономных систем нейтрального типа в пространстве Соболева / Е. М. Назарук // Омский научный вестник. – 2014. – № 2 (130). – С. 23–26.

14. *Назарук, Е. М.* Дихотомия решений линейных неавтономных дифференциально-разностных систем в пространстве Соболева / Е. М. Назарук, Р. К. Романовский // Материалы МНТК. «Динамика систем, механизмов и машин». Омск: Изд-во ОмГТУ, 2014. – № 3. – С. 213–216.