На правах рукописи

СМОЛЯКОВА ЛАРИСА БОРИСОВНА

МНОГООБРАЗИЯ С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ ПОЧТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2006

Работа выполнена на кафедре геометрии механико-математического факультета Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Шурыгин Вадим Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Евтушик Леонид Евгеньевич

кандидат физико-математических наук, профессор Султанов Адгам Яхиевич

Ведущая организация: Московский государственный педагогический университет

Защита состоится 21 декабря 2006 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ГОУ ВПО «Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина» по адресу: 420008 Казань, ул. Кремлевская, 18

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина

Автореферат разослан «___» ноября 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета кандидат физико-математических наук, доцент Малахальцев М.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многообразия с интегрируемыми почти трансверсальными структурами принадлежат к классу гладких многообразий, моделируемых модулями над локальными алгебрами Вейля. Теория многообразий над ассоциативными коммутативными алгебрами тесно связана с геометрией расслоений струй и теорией дифференциально-геометрических объектов высших порядков на многообразиях, геометрией и топологией слоений.

Структуры гладких многообразий, моделируемых модулями над локальными алгебрами в смысле А. Вейля [20], [16] естественно возникают на различных расслоениях струй над вещественными гладкими многообразиями. В частности, структуры многообразий над алгебрами несут на себе касательные расслоения [10], расслоения голономных, неголономных и полуголономных (N, q)-скоростей Ш. Эресмана, расслоения реперов высших порядков [14], [6]. В.В. Вагнером [2] локальные алгебры применялись для описания строения касательных пространств и дифференциальных групп высших порядков. В.В. Вишневским [3] были построены полукасательные расслоения высших порядков, ассоциированные со ступенчато расслоенными многообразиями [8], являющиеся реализациями многообразий над алгебрами $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$ плюральных чисел, моделируемых $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-модулями общего вида.

Теории расслоений Вейля и функторов Вейля посвящено много исследований. Укажем, кроме упомянутых выше, работы А. Моримото, Л. Паттерсона, П. Юэна, А. П. Широкова, И. Коларжа, Э. Окассы, А.Я. Султанова, В.В. Шурыгина, Г.Н. Бушуевой(см. [5],[6],[9-13], [16]). Детальное изложение различных подходов к определению функторов Вейля и их связи с функторами, сохраняющими произведение, содержится в монографии И. Коларжа, П. Михора и Я. Словака [16].

В. Микульским [17] была получена классификация расслоенных функторов, сохраняющих произведение, на категории расслоенных многообразий. Всякий такой функтор определяется гомоморфизмом $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ локальных алгебр и относит расслоению $p : M \to N$ расслоенное произведение $T^{\mu}p : T^{\mu}M = T^{\mathbf{A}}N \times_{T^{\mathbf{B}}N} T^{\mathbf{B}}M \to T^{\mathbf{A}}N$. И. Томашем изучались лифты проектируемых векторных полей с расслоенного многообразия $p : M \to N$ на $T^{\mu}M$. В случае, когда $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — эпиморфизм, расслоение $T^{\mu}M$ несет на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbf{A}$, моделируемого $\mathbf{A}$-модулем вида $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Расслоение $T^{\mu}M$, соответствующее эпиморфизму алгебр плюральных чисел, эквивалентно полукасательному расслоению второго порядка, изучавшемуся В.В. Вишневским и Т.А. Пантелеевой [4].

Расслоение $T^{\mu}M$, соответствующее эпиморфизму локальных алгебр $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, можно определить и для слоеного многообразия $(M, \mathcal{F})$ произвольного вида. При этом расслоение $T^{\mu}M$, соответствующее эпиморфизму $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$, эквивалентно расслоению трансверсальных $\mathbf{A}$-скоростей $T^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr}}M$ на $(M, \mathcal{F})$. Для различных локальных алгебр $\mathbf{A}$ строение и геометрия расслоений трансверсальных $\mathbf{A}$-скоростей изучались Т.В. Дуком, Р. Волаком, З. Погодой, В.В. Шурыгиным (см. [10],[12], [16]).

Многообразия над локальными алгебрами и, в частности, многообразия с интегрируемыми почти касательными и почти трансверсальными структурами, несут на себе канонические слоения. Вопросы эквивалентности таких структур стандартным структурам касательных и трансверсальных расслоений исследовались в работах Ф.Брикелла и Р.Кларка, М.Крэмпина и Дж.Томпсона, Дж.Томпсона и У.Швардмана, С.Де Филиппо, Дж.Ланди, Дж.Мармо, Дж.Виласси, М. де Леона, И.Мендеса и М.Сальгадо, В.В. Шурыгина (см.

обзорные работы [10],[12]). Проблема эквивалентности симплектической структуры стандартной структуре кокасательного расслоения исследовалась М.К.Фамом. Геометрия многообразий с почти комплексными структурами, структурами почти произведения, f-структурами и другими полиаффинорными структурами изучалась многими авторами. В связи с этим отметим монографию К.Яно [21] и обзорную работу В.Ф.Кириченко [7], где можно найти ссылки на литературу по теории указанных структур.

Таким образом, изучение геометрии многообразий с интегрируемыми почти трансверсальными структурами высших порядков и, в частности, многообразий, моделируемых модулями над локальной алгеброй $\mathbf{A}$ вида $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, является актуальной задачей дифференциальной геометрии многообразий с интегрируемой структурой представления коммутативной ассоциативной алгебры.

Целью диссертационной работы является изучение геометрии многообразий с интегрируемыми почти трансверсальными структурами высших порядков, моделируемых модулями над локальной алгеброй $\mathbf{A}$ вида $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, где $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$ — факторалгебра алгебры $\mathbf{A}$ по некоторому идеалу $\mathbf{I}$, и расслоений $T^\mu M$ над слоеными многообразиями $(M, \mathcal{F})$, определяемых эпиморфизмами локальных алгебр $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Методы исследования. В исследованиях диссертации применяются методы изучения естественных расслоений и функторов, сохраняющих произведения ([16]), методы теории многообразий над алгебрами ([3],[5],[10],[12]), а также методы теории слоений и теории (X, G)-мнообразий ([1], [19]). При исследовании вопросов, относящихся к геометрии расслоений Вейля, используются методы теории дифференциально-геометрических структур на многообразиях ([6],[18]).

Научная новизна. Все результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Получены общие формулы для локального представления дифференцируемого над локальной алгеброй $\mathbf{A}$ отображения из области $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ в $\mathbf{A}$-модуль $\mathbf{A}^{n'} \oplus \mathbf{B}^{m'}$.

2. Построено расслоение $T^\mu M$ μ-скоростей слоеного многообразия $(M, \mathcal{F})$ и исследована структура многообразия над алгеброй $\mathbf{A}$, моделируемого $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, возникающая на этом расслоении. Исследованы свойства функтора μ-продолжения T^μ на категории слоеных многообразий. В частности, доказано, что функторы $T^{\mu_2} \circ T^{\mu_1}$ и $T^{\mu_1} \circ T^{\mu_2}$ естественно эквивалентны. С использованием этого результата построены лифты функций, векторных полей и линейных связностей с многообразия $(M, \mathcal{F})$ на расслоение $T^\mu M$.

3. Построена категория слоеных $\mathbf{A}$-гладких многообразий $M^{\mathbf{L}}$, моделируемых $\mathbf{A}$-модулями вида $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Построены представления голономии слоев канонического слоения многообразия $M^{\mathbf{L}}$, обобщающие одновременно представления голономии слоев в смысле теории слоений и представления голономии слоев как (X, G)-многообразий.

4. Понятие радиантного $\mathbf{A}$-гладкого многообразия распространено на категорию многообразий, моделируемых $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Доказано, что всякое полное радиантное многообразие $M^{\mathbf{L}}$ изоморфно расслоению $T^\mu M$ некоторого вещественного слоеного многообразия $(M, \mathcal{F})$.

5. Доказано, что всякое полное слоеное многообразие $M^{\mathbf{L}}$, допускающее сюръективную слоеную субмерсию с односвязными слоями на $(n+m)$-мерное многообразие M со слоением коразмерности n, изоморфно расслоению $T^\mu M$.

6. Построено обобщение конструкции П. Молино d_F-когомологий

тензориальных форм на слоеном главном расслоении на случай тензориальных форм на расслоении $B_{\mathbf{A}}M^{\mathbf{L}}$ расслоенных $\mathbf{A}$-линейных реперов на многообразии $M^{\mathbf{L}}$. В терминах построенных $\hat{d}$-когомологий тензориальных форм построено препятствие (класс Атьи-Молино многообразия $M^{\mathbf{L}}$) к существованию $\mathbf{A}$-гладкой линейной связности на $M^{\mathbf{L}}$.

Теоретическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут найти применение при дальнейших исследованиях в трансверсальной геометрии слоений, геометрии и топологии многообразий, моделируемых модулями над алгебрами Вейля, теории дифференциально-геометрических структур высшего порядка.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

Международной летней школе-семинаре Волга—2001. Казань, 22 июня—3 июля 2001 года;

Научной конференции, посвященной 125–летию Казанского государственного педагогического университета. Казань, 22—24 октября 2001 года;

Международной молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения". Казань, 28 ноября—1 декабря 2001 года;

Международной конференции по геометрии и анализу. Пенза, 9—11 октября 2002 года;

Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова "Колмогоров и современная математика". Москва, 16—21 июня 2003 года;

Международной молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения". Казань, 16—18 декабря 2005 года;

Геометрическом семинаре Пензенского государственного педагогического университета, 5 октября 2006 года.

Результаты работы регулярно докладывались на заседаниях Казанского городского геометрического семинара и итоговых научных конференциях Казанского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 11 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 116 страниц и состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Список литературы насчитывает 114 названий. Нумерация предложений, теорем и формул в главах изолированная.

Краткое содержание диссертации

Введение содержит обзор литературы по теме диссертации, обоснование актуальности выбранной темы и краткое содержание работы.

Глава 1 посвящена описанию категории многообразий над алгеброй Вейля $\mathbf{A}$, моделируемых $\mathbf{A}$-модулями вида $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, и действию функтора μ-продолжения, определяемого для эпиморфизма локальных алгебр $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, на категории многообразий со слоениями.

В начале главы приведены необходимые определения из теории локальных алгебр Вейля и расслоений Вейля. **§1.3** посвящен доказательству теорем о локальном строении $\mathbf{A}$-гладких отображений между $\mathbf{A}$-модулями некоторых типов, обощающих теорему о локальном виде $\mathbf{A}$-гладких отображений из области $\mathbf{A}$-модуля строк $\mathbf{A}^n$ в $\mathbf{A}$-модуль $\mathbf{A}^k$ [12]. В этом параграфе найдены локальные выражения для $\mathbf{A}$-гладких отображений вида $\mathbf{A}^n \to \mathbf{L}$ и $\mathbf{B}^n \to \mathbf{L}$, где $\mathbf{L}$ — некоторый $\mathbf{A}$-модуль, а $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$ — факторалгебра(**теоремы 1.3.1, 1.3.2**). Основным результатом параграфа является

Теорема 1.3.3 *Пусть* $W = W_1 \oplus W_2 \subset \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ — *открытый* *координатный параллелипипед по отношению к вещественным координатам в* $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$*, определяемым базисом* $\{e_a\} = \{e_0 = 1, e_{a^*}, e_{\breve{a}}\}$ *в* $\mathbf{A}$ *таким, что* $\{e_{a^*}, e_{\breve{a}}\}$ *— базис максимального идеала* $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ *алгебры* $\mathbf{A}$*, а* $\{e_{\breve{a}}\}$ *— базис идеала* $\mathbf{I}$*. Отображение* $\Phi : W \to \mathbf{A}^{n'} \oplus \mathbf{B}^{m'}$ *является* $\mathbf{A}$*-гладким тогда и только тогда, когда оно имеет вид:*

$$X^{i'} = \varphi^{i'}(x^i) + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^{i'}}{Dx^p} \overset{\circ}{X}{}^p + \psi^{i'}(x^i, y^\alpha) +$$

$$+ \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v} \psi^{i'}}{Dx^u Dy^v} \overset{\circ}{X}{}^u \overset{\circ}{Y}{}^v,$$

$$Y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha) + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v} \varphi^{\alpha'}}{Dx^u Dy^v} \overset{\circ}{X}{}^u \overset{\circ}{Y}{}^v,$$

где u*,* v *и* p *— мультииндексы,* q *— высота алгебры* $\mathbf{A}$*, а функции* $\varphi^{i'}(x^i)$*,* $\varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha)$*, и* $\psi^{i'}(x^i, y^\alpha)$ *принимают значения соответственно в* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *и* $\mathrm{Ann}\,(\mathbf{I})$*.*

В **§1.4** вводится понятие μ-скорости на слоеном многообразии $(M, \mathcal{F})$, где $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — эпиморфизм локальных алгебр:

Определение. *Две* $\mathbf{A}$*-скорости* $j^{\mathbf{A}}_x f$ *и* $j^{\mathbf{A}}_x g$ *в точке* $x \in M$ *называются* μ*-эквивалентными, если они определяют одну и ту же трансверсальную* $\mathbf{A}$*-скорость* $j^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr}\,x} f = j^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr}\,x} g$ *и одну и ту же* $\mathbf{B}$*-скорость* $j^{\mathbf{B}}_x f = j^{\mathbf{B}}_x g$ *в* $x \in M$*. Класс* μ*-эквивалентности* $j^\mu_x f$ $\mathbf{A}$*-скорости* $j^{\mathbf{A}}_x f$ *называется* μ*-скоростью в* $x \in M$*.*

Далее в этом параграфе определяется функтор T^μ, относящий слоеному многообразию $(M, \mathcal{F})$ расслоение μ-скоростей $T^\mu M$ над $(M, \mathcal{F})$, а морфизму слоений — морфизм расслоений μ-скоростей. Доказано

Предложение 1.4.3 *Расслоение* $T^\mu M$ *несет на себе естественную структуру* $\mathbf{A}$*-гладкого многообразия, моделируемого* $\mathbf{A}$*-модулем* $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$*.*

В **§1.5** введена категория $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f{-}\mathcal{M}an$ слоеных $\mathbf{A}$-гладких многообразий, моделируемых $\mathbf{A}$-модулями вида $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Многообразие $M^{\mathbf{L}}$, моделируемое $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{L}$, называется слоеным, если на нем задан $\mathbf{L}$-атлас с функциями склейки, сохраняющими слоение на $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, определяемое проекцией $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m \to \mathbf{A}^n$. Слоеное многообразие $M^{\mathbf{L}}$ несет на себе каноническое слоение $\mathcal{F}^{\mu}$, слои которого являются $\mathbf{B}^m$-многообразиями. Многообразия из категории $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f{-}\mathcal{M}an$ называются слоеными $\mathbf{L}$-многообразиями.

Показано (**предложение 1.5.1**), что функтор T^{μ} может рассматриваться как функтор из категории слоений $\mathcal{F}ol$ в категорию $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f{-}\mathcal{M}an$.

В **главе 2** изучаются аналитические продолжения морфизмов слоений $\varphi : M \to T^{\mu}M'$ и лифты геометрических структур со слоеного многообразия M на расслоение $T^{\mu}M$.

В **§2.1** доказано следующее

Предложение 2.1.1 *Пусть $(M,\mathcal{F})$ и $(M',\mathcal{F}')$ — слоеные многообразия и $\varphi : M \to T^{\mu}M'$ — морфизм слоений. Тогда существует единственное слоеное $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\varphi^{\mu} : T^{\mu}M \to T^{\mu}M'$, ограничение которого на многообразие M, отождествляемое с образом нулевого сечения, совпадает с φ. В частности, сечение $s : M \to T^{\mu}M$, являющееся морфизмом слоений, единственным образом продолжается до изоморфизма $s^{\mu} : T^{\mu}M \to T^{\mu}M$ в категории $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f{-}\mathcal{M}an$.*

В **§2.2** изучается действие функтора T^{μ} на категории расслоенных векторных пространств. Показано (**предложение 2.2.3**), что применение функтора T^{μ} к расслоенному векторному пространству дает расслоенный $\mathbf{A}$-модуль, изоморфный $\mathbf{A}$-модулю $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$.

В **§2.3** доказана (**предложение 2.3.2**) естественная эквивалентность функторов $T^{\mu_1} \circ T^{\mu_2}$, $T^{\mu_2} \circ T^{\mu_1}$ и $T^{\mu_1 \otimes \mu_2}$, рассматриваемых как фукторы из категории слоений $\mathcal{F}ol$ в себя, и показано (**предложение 2.3.4**), что эта естественная эквивалентность определяет на многообразии $T^{\mu_1}(T^{\mu_2}M)$ естественную структуру многообразия над алгеброй $\mathbf{A}_2$, моделируемого $\mathbf{A}_2$-модулем $\mathbf{A}_2^{n_3} \oplus \mathbf{B}_2^{m_3}$, где $n_3 = n \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{A}_1$, $m_3 = m \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{B}_1$. В этом параграфе рассмотрены также некоторые частные случаи вышеуказанных эквивалентностей.

В **§2.4** с использованием результатов предыдущего параграфа построены лифты функций и векторных полей с многообразия $(M, \mathcal{F})$ на расслоение $T^{\mu}M$ и исследованы их свойства.

В **§2.5** (**предложения 2.5.1, 2.5.2**) доказано, что применение функтора T^{μ} к главному расслоению расслоенных реперов $B_f^r M(M, G_f^r(\mathbf{R}^{n+m}))$ слоеного многообразия $(M, \mathcal{F})$ приводит к главному расслоению над $T^{\mu}M$, которое естественно эквивалентно главному расслоению $B_f^r(\mathbf{A})T^{\mu}M(T^{\mu}M, G_f^r(\mathbf{L}, \mathbf{A}))$ слоеных $\mathbf{A}$-гладких реперов многообразия $T^{\mu}M$. Использование этого результата позволяет получить (**предложение 2.5.3**) лифт слоеной линейной связности с многообразия $(M, \mathcal{F})$ на расслоение $T^{\mu}M$.

Следующие две главы посвящены изучению слоеных $\mathbf{A}$-гладких многообразий $M^{\mathbf{L}}$, моделируемых $\mathbf{A}$-модулями вида $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$.

В **главе 3** рассмотрены некоторые специальные классы слоеных многообразий $M^{\mathbf{L}}$ и найдены условия, при которых многообразие, принадлежащее одному из этих классов, эквивалентно расслоению $T^{\mu}M$ некоторого слоеного многообразия $(M, \mathcal{F})$.

В **§3.1** вводится понятие радиантного слоеного $\mathbf{L}$-многообразия $M^{\mathbf{L}}$ как $\mathbf{L}$-многообразия с $\mathbf{L}$-атласом, функции склейки которого принадлежат псевдогруппе локальных $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{L}$, порождаемой μ-продолжениями вещественных диффеоморфизмов. Введенное понятие радиантности является обобщением аналогичного понятия теории аффинных многообразий, использовавшегося в работе В. Гольдмана и М. Хирша([15]). Для $\mathbf{A}$-гладких многообразий, моделируемых $\mathbf{A}$-модулями $\mathbf{A}^n$, приведенное выше определение радиантности совпадает с определением, использовавшимся В.В. Шурыгиным.

Основным результатом **§3.1** является **теорема 3.1.1**, утверждающая, что радиантное $\mathbf{A}$-гладкое многообразие $M^{\mathbf{L}}$, слои которого являются полными многообразиями (в смысле теории (X,G)-многообразий [1]), изоморфно в категории $(\mathbf{A},\mathbf{B})_f{-}\mathcal{M}an$ расслоению $T^\mu M$ для некоторого слоеного многообразия $(M,\mathcal{F})$.

Эта теорема является обобщением аналогичных результатов работ В.В. Шурыгина, Ф.Брикелла и Р.Кларка, Т.В. Дука, а также работы М. де Леона, И.Мендеса и М.Сальгадо, относящихся, соответственно, к случаям полных радиантных $\mathbf{A}$-гладких многообразий, моделируемых $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n$, полных близко касательных, полных квазитрансверсальных и полных близко p-касательных структур на многообразиях(см. [11]).

Поскольку функции склейки слоеного многообразия $M^{\mathbf{L}}$ сохраняют слоение на $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, определяемое проекцией $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m \to \mathbf{R}^{n+m}$, то, кроме слоения $\mathcal{F}^\mu$, слоеное многообразие $M^{\mathbf{L}}$ несет на себе еще одно каноническое слоение $\mathring{\mathcal{F}}$, вдоль слоев которого постоянны вещественные части координат на $M^{\mathbf{L}}$.

В **§3.2** вводится представление голономии слоя канонического слоения $\mathring{\mathcal{F}}$ на $M^{\mathbf{L}}$, обобщающее одновременно представления голономии слоя в смысле теории слоений и в смысле теории (X,G)-многообразий. Для многообразий с тривиальной голономией доказана следующая

Теорема 3.2.1 *Пусть $M^{\mathbf{L}}$ — полное слоеное $\mathbf{A}$-гладкое многообразие, $(M,\mathcal{F})$ — вещественное слоеное многообразие, $p: M^{\mathbf{L}} \to M$*

— *сюръективная субмерсия, удовлетворяющая условиям:*

1) *слои субмерсии p односвязны и являются слоями канонического слоения $\mathring{\mathcal{F}}$,*

2) *субмерсия p является морфизмом слоений по отношению к каноническому слоению $\mathcal{F}^{\mu}$ на многообразии $M^{\mathbf{L}}$.*

Тогда многообразие $M^{\mathbf{L}}$ $\mathbf{A}$-диффеоморфно расслоению Вейля $T^{\mu}M$.

Заключительная **глава 4** посвящена обобщению конструкции П. Молино d_F-когомологий тензориальных форм на слоеном главном расслоении на случай тензориальных форм на расслоении $B_{\mathbf{A}}M^{\mathbf{L}}$ расслоенных $\mathbf{A}$-линейных реперов на слоеном многообразии $M^{\mathbf{L}}$.

В **§4.1** рассматриваются два $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, $\mathbf{L}' = \mathbf{A}^{n'} \oplus \mathbf{B}^{m'}$ и расслоение $\mathbf{L}' \otimes \Lambda^1 M^{\mathbf{L}}$ всех $\mathbf{L}'$-значных 1-форм на $M^{\mathbf{L}}$. Это расслоение можно разложить в сумму Уитни расслоений

$$\mathbf{L}' \otimes \Lambda^1 M^{\mathbf{L}} = \Lambda'(\mathbf{L}')^1_{\mathbf{A}-\mathrm{lin}} M^{\mathbf{L}} \oplus \tilde{\Lambda}(\mathbf{L}')^1 M^{\mathbf{L}},$$

где $\Lambda'(\mathbf{L}')^1_{X,\,\mathbf{A}-\mathrm{lin}} M^{\mathbf{L}}$ — $\mathbf{A}$-модуль расслоенных $\mathbf{L}'$-значных $\mathbf{A}$-линейных форм на $T_X M^{\mathbf{L}}$. Внешние произведения $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_r \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_s$, где $\eta_1, \ldots, \eta_s$ — расслоенные $\mathbf{A}$-линейные 1-формы, а $\xi_1, \ldots, \xi_r \in \tilde{\Lambda}(\mathbf{L}')^1_X M^{\mathbf{L}}$, образуют подмодуль $\Lambda(\mathbf{L}')^{r,s}_X M^{\mathbf{L}}$ в модуле $\mathbf{L}' \otimes \Lambda^{r+s}_X M^{\mathbf{L}}$. Построен оператор

$$\hat{d} = \hat{d}_{r,s} : \Omega(\mathbf{L}')^{r,s}(U) \to \Omega(\mathbf{L}')^{r+1,s}(U),$$

где символом $\Omega(\mathbf{L}')^{r,s}(U)$ обозначен $\mathbf{A}$-модуль гладких сечений расслоения

$$\Lambda(\mathbf{L}')^{r,s} M^{\mathbf{L}} \subset \mathbf{L}' \otimes \Lambda^{r+s} M^{\mathbf{L}} \to M^{\mathbf{L}}.$$

над открытым множеством $U \subset M^{\mathbf{L}}$. Доказано

Предложение 4.1.1 1) $\hat{d} \circ \hat{d} = 0$, *и, таким образом, для каждого s слоеному многообразию $M^{\mathbf{L}}$ относится комплекс дифференциаль-*

ных форм:

$$0 \to \Omega(\mathbf{L}')^{0,s}(M^{\mathbf{L}}) \xrightarrow{\hat{d}} \Omega(\mathbf{L}')^{1,s}(M^{\mathbf{L}}) \xrightarrow{\hat{d}} \Omega(\mathbf{L}')^{2,s}(M^{\mathbf{L}}) \xrightarrow{\hat{d}} \dots . \qquad (0.1)$$

2) *Группы когомологий* $H^{r,s}(\mathbf{L}')M^{\mathbf{L}}$ *этого комплекса не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора подрасслоения* $\tilde{\Lambda}(\mathbf{L}')^1 M^{\mathbf{L}}$.

В §**4.2** в терминах $\hat{d}$-когомологий тензориальных форм построено препятствие (класс $a(B_{\mathbf{A}}M^{\mathbf{L}})$ Атьи-Молино слоеного многообразия $M^{\mathbf{L}}$) к существованию $\mathbf{A}$-гладкой линейной связности на $M^{\mathbf{L}}$:

Теорема 4.2.1 $a(B_{\mathbf{A}}M^{\mathbf{L}}) = 0$ *тогда и только тогда, когда существует слоеная* $\mathbf{A}$*-гладкая связность в расслоении* $B_{\mathbf{A}}M^{\mathbf{L}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Апанасов, Б. Н. Геометрия дискретных групп и многообразий. / Б. Н. Апанасов // — М.: Наука, 1991. — 432 с.

2. Вагнер, В. В. Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков. / В. В. Вагнер // Труды семин. по вект. и тенз. анализу. — Вып. 10. — МГУ, 1956. — С. 31–88.

3. Вишневский, В. В. Многообразия над плюральными числами и полукасательные структуры. / В. В. Вишневский // Итоги науки и техники./ВИНИТИ — Т. 20: Проблемы геометрии. — М.,1988. — С. 35–75.

4. Вишневский, В. В. Голоморфные продолжения объектов в полукасательное расслоение второго порядка. / В. В. Вишневский, Т. А. Пантелеева // Известия вузов. Математика. — 1985. — N 9. — С. 3–10.

5. Вишневский, В. В. Пространства над алгебрами. / В. В. Вишневский, А. П. Широков, В. В. Шурыгин. — Казань: изд-во Казанского университета, 1984. — 264 с.

6. Евтушик, Л. Е. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. / Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков // Итоги науки и техники./ВИНИТИ — Т. 9: Проблемы геометрии. — М.,1979. — 247 с.

7. Кириченко, В. Ф. Дифференциальная геометрия K-пространств. / В. Ф. Кириченко // Итоги науки и техники./ВИНИТИ — Т. 8: Проблемы геометрии. — М.,1977. — С. 95–126.

8. Остиану, Н. М. Ступенчато-расслоенные пространства. / Н. М. Остиану // Труды геом. семин./ВИНИТИ АН СССР — Т. 5. — М., 1974. — С. 259–309.

9. Султанов, А. Я. Продолжения тензорных полей и связностей на расслоения Вейля. / А. Я. Султанов // Известия вузов. Математика. — 1999. — N 9. — С. 81–90.

10. Широков, А. П. Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами. / А. П. Широков // Итоги науки и техники./ВИНИТИ — Т. 12: Проблемы геометрии. — М.,1981. — С. 61–95.

11. Шурыгин, В. В. Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй. / В. В. Шурыгин // Успехи мат. наук. — Т. 48, вып. 2 (290). — 1993. — С. 75–106.

12. Шурыгин, В. В. Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля. / В. В. Шурыгин // Итоги науки и техники./ВИНИТИ — Т. 73: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — М.,2002. — С. 162–236.

13. Bushueva, G. N. On the higher order geometry of Weil bundles over smooth manifolds and over parameter-dependent manifolds. / G. N. Bushueva, V. V. Shurygin // Lobachevskii J. of Math. — 2005. — Vol. 18. — Pp. 53–105.

14. Ehresmann, C. Les prolongements d'une variété différentiable. I.

Calcul des jets, prolongement principal. / C. Ehresmann // C. R. Acad. Sci. — 1951. — T. 233, N 11. — Pp. 598–600.

15. Goldman, W. The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds. / W. Goldman, M. W. Hirsch // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 26, no. 2. — Pp. 629–649.

16. Kolář, I. Natural operations in differential geometry. / I. Kolář, P. W. Michor, J. Slovák. — Springer. — 1993. — 434 pp.

17. Mikulski, W. M. Product preserving bundle functors on fibered manifolds. / W. M. Mikulski // Archiv. Math. — Vol 32. — 1996. — Pp. 307–316.

18. Molino, P. Théorie des G-structure: le problème d'equivalence. / P. Molino // Lecture Notes in Mathematics, vol. 588, Springer. — 1977.

19. Molino, P. Riemannian foliations. / P. Molino. — Birkhäuser. — 1988. — 339 pp.

20. Weil, A. Théorie des points proches sur les variététes différentiables. / A. Weil // Colloque internat. centre nat. rech. sci. — Vol 52. — Strasbourg, 1953. — Pp. 111–117.

21. Yano, K. Differential geometry on complex and almost complex spaces. / K. Yano// N.Y. — 1965.

Публикации автора по теме диссертации

1. Смолякова Л. Б. О линейных связностях на многообразии, моделируемом $\mathbf{R}(\varepsilon)$-модулем $\mathbf{R}(\varepsilon)^n \oplus \mathbf{R}^m$. / Л. Б. Смолякова // Новейшие проблемы теории поля, 1999-2000: Труды 11 и 12 Междунар. лет. шк.-семин. "Волга" по соврем. пробл. теор. и мат. физ., проходящ. в рамках Петров. чтений. — Казань, 2000. — С. 368 – 372.

2. Смолякова Л. Б. Препятствие к существованию голоморфных связностей на многообразиях над локальными алгебрами. / Л. Б. Смолякова // Петровские чтения. Волга XIII: материалы междунар.

летней школы-сем. по теорет. и математ. физике. — Казань, 2001. — С. 118-119.

3. Смолякова Л. Б. Функторы Вейля на категории расслоенных многообразий. / Л. Б. Смолякова, В. В. Шурыгин // Труды мат. центра им. Н.И.Лобачевского т.11. Проблемы современной математики. Материалы науч. конференции, посвященной 125–летию Казанского государственного педагогического университета (Казань, 22 – 24 октября 2001 г.) — Казань, 2001. — С. 245–248.

4. Смолякова Л. Б. О многообразиях над алгебрами Вейля, моделируемых модулями специального вида. / Л. Б. Смолякова // Труды мат. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.12, Лобачевские чтения – 2001: Материалы междунар. молодеж. науч. шк.-конф. (Казань, 28 ноября – 1 декабря 2001 г.) — Казань, 2001. — С. 59.

5. Smolyakova L. B. An analog of the Vaisman-Molino cohomology for manifolds modelled on some types of modules over Weil algebras and its application. / V. V. Shurygin, L. B. Smolyakova // Lobachevskii J. of Math., vol. 9. — 2001. — Pp. 55 – 75.

6. Smolyakova L. B. The Atiyah-Molino classes for some types of manifolds modelled on modules over Weil algebras./ V. V. Shurygin, L. B. Smolyakova // Труды участников междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 5 –11 сентября 2002г.) — Ростов-на-Дону, 2002. — С. 89 – 90.

7. Smolyakova L. B. On the structure of complete radiant manifolds modelled on modules over algebras. / International conference Kolmogorov and Contemporary Mathematics (Moscow, June 16 – 21, 2003), Abstracts. — Moscow, 2003. — P.856.

8. Смолякова Л. Б. Препятствие к существованию **A**-гладких связностей в расслоениях реперов на многообразиях, моделируемых модулями некоторого типа над алгеброй Вейля **A**. / Л. Б. Смоляко-

ва // Международная конференция по геометрии и анализу: Сборник трудов. — Пенза, 2003. — С. 94 – 100.

9. Смолякова Л. Б. О представлениях голономии многообразий, моделируемых модулями над алгеброй Вейля. / Л. Б. Смолякова // Труды геометр. семинара. Казанск. ун-т., вып. 24. — 2003. — С. 129 – 138.

10. Смолякова Л. Б. Строение полных радиантных многообразий моделируемых модулями над алгебрами Вейля. / Л. Б. Смолякова // Известия вузов. Математика. — 2004. — N 5. — С. 76–83.

11. Smolyakova L. B. Weil bundles over foliated manifolds and foliated manifolds over Weil algebras./ V. V. Shurygin, L. B. Smolyakova // Труды участников междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 5 –11 сентября 2006г.) — Ростов-на-Дону, 2006. — С. 101 – 103.