На правах рукописи

Дмитриев Виктор Борисович

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань
2006

Работа выполнена на кафедре высшей математики Самарской государственной академии путей сообщения

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Пулькина Людмила Степановна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Плещинский Николай Борисович,
кандидат физико-математических наук, доцент
Уткина Елена Анатольевна

Ведущая организация: **Воронежский государственный университет**

Защита состоится 14 декабря 2006 года в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете им. В.И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, д. 17, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета
им. В.И. Ульянова-Ленина.

Автореферат разослан ноября 2006 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При математическом моделировании ряда процессов, изучаемых в физике, химии и биологии часто возникают задачи, в которых вместо классических краевых условий для дифференциальных уравнений в частных производных задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри нее. Задачи с условиями такого типа, называемые нелокальными, все чаще привлекают внимание специалистов. Большой вклад в исследование нелокальных задач внесли Бицадзе А. В., Самарский А. А., Дезин А. А., Ильин В. А., Моисеев Е. И., Жегалов В. И., Нахушев А. М., Кальменов Т. Ш., Репин О. А. и др.

Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Такого рода условия встречаются, например, при моделировании явлений, происходящих в плазме, процессов распространения тепла, некоторых технологических процессов, процессов влагопереноса в пористых средах , а также в обратных задачах и в задачах математической биологии при описании динамики численности популяции особей и в задачах демографии.

Появление условий интегрального вида порождено ограниченными возможностями для измерения тех или иных реальных характеристик в рассматриваемой области.

Впервые, возможно, задачу с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных рассмотрел Дж.Р. Кэннон (J.R. Cannon, 1963).[1] для уравнения теплопроводности. В последнее время стали появляться работы, посвященные таким задачам для различных типов уравнений (см. работы Н.И. Ионкина, Н.И. Юрчука, В.Л. Камынина, А.М. Нахушева и других авторов). Исследования в этой области начаты с эллиптических и параболических уравнений. Несколько позже подобные задачи начали исследовать для уравнений гиперболического типа.

Исследование задач с интегральными условиями связано с довольно большими трудностями, поскольку присутствие нелокальных условий затрудняет применение стандартных методов. Предстоит еще многое сделать по исследованию этих задач, по разработке различных методов их решения.

Таким образом, тема исследования диссертации является актуальной как с чисто практической точки зрения, так и с теоретических позиций.

Цель работы. Целью работы является доказательство разрешимости трех нелокальных задач с интегральными условиями для многомерного ги-

[1] Cannon J.R. The Solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy. Quart. Appl. Math. 21. (1963). P.155-160.

перболического уравнения.

Общая методика исследования. В работе используется аппарат теории дифференциальных и интегральных уравнений, теории функций и функционального анализа, а также некоторые свойства функций Бесселя.

Научная новизна.

1). Для уравнения гиперболического типа, многомерного по пространственным переменным, впервые рассмотрены задачи с неклассическим условием, выражающим нормальную (конормальную) производную через интеграл.

2). Впервые рассмотрена задача с нелинейным интегральным условием для многомерного гиперболического уравнения.

3). В результате проведенного исследования доказана однозначная разрешимость в рассматриваемой области поставленных нелокальных задач с интегральными условиями для гиперболического уравнения при определенных ограничениях на заданные функции в интегральных условиях, на правую часть и на коэффициенты уравнения.

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты имеют важное значение в теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также являются полезными в прикладных задачах. Они являются вкладом в теорию нелокальных задач, могут найти применение в теории уравнений с частными производными, а также при математическом моделировании.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

– на научном семинаре кафедры "Уравнения математической физики"под руководством доктора физико-математических наук, профессора Филатова О.П. в Самарском государственном университете в 2003-2006 гг.

– на конференции "Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского"в 2005 году, г. Казань.

– на Второй Всероссийской научной конференции «Математиеское моделирование и краевые задачи» в 2005 году, г. Самара.

– на XII Российской научной конференции. - Самара: ПГАТИ, 2005.

– на Третьей Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» в 2006 году, г. Самара.

– на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения - XVII"в 2006 году, г. Воронеж.

– на всероссийской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения"в в 2005 году, г. Самара.

– на семинаре кафедры "Высшая математика"Самарской государственной академии путей сообщения в 2006 году, г. Самара.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[10].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих четырнадцать параграфов, и списка литературы из 55 наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет 91 страницу машинописного текста.

Основное содержание работы

Во введении дано обоснование актуальности темы диссертации, определен объект исследования и указана степень разработанности проблемы, поставлена цель и задача исследования, приведено краткое содержание диссертации.

Во введении рассмотрены истоки возникновения нелокальных задач, обоснован теоретический и практический интерес к таким задачам, указаны существующие трудности при их исследовании. Содержится обстоятельный обзор работ, посвященных задачам с интегральными условиями для уравнений параболического и гиперболического типов. Рассматриваются работы, в которых изучены задачи, близкие к изучаемой в данной диссертации.

Первая глава состоит из шести параграфов.

Первый параграф посвящен постановке задачи и определению обобщенного решения задаче с линейным интегральным условием для волнового уравнения.

Рассматривается уравнение

$$L_0 u \equiv u_{tt} - \triangle u = f(x,t) \tag{1}$$

в цилиндре $Q_T = \{(x, \tau) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \tau < T\}$, где Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, и для него ставится задача с начальными условиями Коши

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{3}$$

и нелокальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{S_T} = \int\limits_{\Omega} K(x,y)\, u(y,t)\, dy, \quad x \in \partial\Omega, \tag{4}$$

где $\varphi(x), \psi(x), K(x,y)$ заданы, а $S_T = \{(x,t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ - боковая поверхность цилиндра Q_T. S_T - гладкая поверхность.

Затем получено тождество, с помощью которого введено понятие обобщенного решения:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} (-u_t v_t + \nabla u \nabla v)\, dx\, dt - \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v(x,t) \int\limits_{\Omega} K(x,y)\, u(y,t)\, dy\, ds\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} f(x,t)\, v(x,t)\, dx\, dt + \int\limits_{\Omega} \psi(x)\, v(x,0)\, dx. \tag{5}$$

Определение 1.1.1. *Назовем обобщенным решением из $W_2^1(Q_T)$ задачи (1)- (4) функцию $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию (2) и тождеству (5) для любой функции $v \in W_2^1(Q_T)$, такой, что $v(x,T) = 0$.*

Во втором параграфе введены основные понятия и определения, а также приведены основные формулы и теоремы, используемые в диссертации.

В третьем параграфе приведена формулировка теоремы и получена априорная оценка вспомогательной функции w, необходимая для доказательства существования решения задачи.

Теорема 1.3.1.

Пусть $f(x,t) \in L_{2,1}(Q_T)$, $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\psi(x) \in L_2(\Omega)$, функция $K(x,y)$ непрерывно дифференцируема по x,

$K \in L_2(\Omega \times \Omega)$, а также выполняется условие

$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}(K^2(x,y) + |\nabla_x K(x,y)\,|^2)\, dx\, dy = R < \infty$. Тогда задача (1)-(4) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$.

Получена априорная оценка решения задачи (1)-(4).

В четвертом параграфе первой главы доказана единственность решения задачи (1)-(4).

В пятом параграфе первой главы методом Галеркина доказано существование решения задачи (1)-(4).

В шестом параграфе первой главы рассмотрена задача о радиальных колебаниях газа в цилиндрической трубке - задача с интегральным условием:

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r. \tag{6}$$

$$u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 0. \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = \int\limits_0^R r\, u(r,t)\, dr + g(t). \tag{8}$$

Она решена путем сведения к стандартной задаче.

Вторая глава, состоящая из четырех параграфов, посвящена задаче с линейным интегральным условием для общего гиперболического уравнения.

В первом параграфе второй главы приводится следующая постановка задачи.

Рассматривается уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t)\, u_{x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\, u_{x_i} + b(x,t)\, u_t +$$

$$+ a(x,t)\, u = f(x,t) \tag{9}$$

в цилиндре $Q_T = \{(x,\tau) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \tau < T\}$, где Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, и для него ставится задача с начальными условиями Коши

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{10}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{11}$$

и нелокальным условием

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i)\, |_{S_T} = \int\limits_{\Omega} K(x,y)\, u(y,t)\, dy, \quad x \in \partial\Omega, \tag{12}$$

где $\varphi(x), \psi(x), K(x,y)$ заданы, а $S_T = \{(x,t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ - боковая поверхность цилиндра Q_T. S_T - гладкая поверхность.

Получено тождество, с помощью которого вводится понятие обобщенного решения:

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\, u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)\, u_{x_i} v + b(x,t)\, u_t v +$$

$$+ a(x,t)\, uv)\, dx\, dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_\Omega K(x,y)\, u(y,t)\, dy\, ds\, dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega f(x,t)\, v(x,t)\, dx\, dt + \int_\Omega \psi(x)\, v(x,0)\, dx. \qquad (13)$$

Определение 2.1.1. *Назовем обобщенным решением из $W_2^1(Q_T)$ задачи (9)- (12) функцию $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию (10) и тождеству (13) для любой функции $v \in W_2^1(Q_T)$, такой, что $v(x,T) = 0$.*

Во втором параграфе второй главы получена априорная оценка решения.

Имеет место следующая

Теорема 2.2.1. *Пусть $f(x,y) \in L_{2,1}(Q_T)$, $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\psi(x) \in L_2(\Omega)$, ядро $K(x,y)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{x\in\Omega} |K(x,y)\,| \leq R(y),$$

а также выполняются следующие условия:

$$\max_{Q_T} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, \frac{\partial b}{\partial t}, a_i, b, a \right| \leq \mu_1,$$

$$\int_\Omega R^2(y)\, dy = R_1 < \infty.$$

Тогда задача (9)-(12) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$.

В третьем параграфе второй главы доказывается единственность решения задачи (9)-(12).

В четвертом параграфе второй главы методом Галеркина доказывается существование решения задачи (9)-(12).

В третьей главе рассматривается нелокальная задача с нелинейным интегральным условием для гиперболического уравнения.

В первом параграфе третьей главы рассматривается уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,t)\, u_{x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\, u_{x_i} + b(x,t)\, u_t +$$

$$+a(x,t)\, u = f(x,t) \tag{14}$$

в цилиндре $Q_T = \{(x,\tau) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \tau < T\}$, где Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, и поставим для него задачу с начальными условиями Коши

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{15}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{16}$$

и нелокальным условием

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i)\,|_{S_T} = \int\limits_{\Omega} K(x,y,t,u(y,t))\, dy, \quad x \in \partial\Omega, \tag{17}$$

где $\varphi(x), \psi(x), K(x,y,t,u(y,t))$ заданы, а $S_T = \{(x,t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ - боковая поверхность цилиндра Q_T.

Понятие обобщенного решения поставленной задачи введено на основании следующего тождества:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} (-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\, u_{x_i} v + b(x,t)\, u_t v +$$

$$+a(x,t)\, uv)\, dx\, dt - \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v(x,t) \int\limits_{\Omega} K(x,y,t,u(y,t))\, dy\, ds\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} f(x,t)\, v(x,t)\, dx\, dt + \int\limits_{\Omega} \psi(x)\, v(x,0)\, dx. \tag{18}$$

Определение 3.1.1. *Назовем обобщенным решением из $W_2^1(Q_T)$ задачи (14)- (17) функцию $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию (15) и тождеству (18) для любой функции $v \in W_2^1(Q_T)$, такой, что $v(x,T) = 0$.*

Основным результатом третьей главы является следующая

Теорема 3.2.1.

Пусть выполнены следующие условия:

$$f(x,t) \in L_{2,1}(Q_T),\ \varphi(x) \in W_2^1(\Omega),\ \psi(x) \in L_2(\Omega);$$

$$\max_{Q_T} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, \frac{\partial b}{\partial t}, a_i, b, a \right| \leq \mu_1,$$

$$|K(x,y,t,u_1) - K(x,y,t,u_2)\,| \leq R(y,t)\,|u_1 - u_2|,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega} R^2(y,t)\,dy = R_1 < \infty,$$

$$|K(x,y,t,0)\,| \leq F(y,t) \quad \forall x \in \Omega,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega} F(y,t)\,dy = M_1 < \infty,$$

$$\left| \frac{\partial K(x,y,t,u)}{\partial t} \right| \leq A(y,t)\,|u| + B(y,t),$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega} A^2(y,t)\,dy = M_2 < \infty,$$

$$\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega} B(y,t)\,dy \right)^2 dt = M_3 < \infty.$$

Тогда задача (14)-(17) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$.

В четвертом параграфе третьей главы методом Галеркина доказывается существование решения поставленной задачи.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Л.С.Пулькиной за постоянное внимание, помощь и всестороннюю поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Дмитриев В. Б.* Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами при старших производных / *В. Б. Дмитриев* // Сборник научных трудов студентов, аспирантов и молодых ученых. – Выпуск 5. – Самара: СамГАПС, 2004. – С. 165–166.

2. *Дмитриев В. Б.* Нелокальная задача для уравнения колебаний мембраны / *В. Б. Дмитриев* // XII Российская научная конференция. – Самара: ПГАТИ, 2005. – С. 324.

3. *Дмитриев В. Б.* Нелокальная задача для уравнения колебаний мембраны / *В. Б. Дмитриев* // Труды Второй Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара: Изд-во СамГТУ, 2005. – С. 83–85.

4. *Дмитриев В. Б.* Об одной нелокальной задаче для многомерного волнового уравнения / *В. Б. Дмитриев* // СамДифф-2005: всероссийская конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения". Тезисы докладов. - Самара: "Универс-групп", 2005. – С. 28–30.

5. *Дмитриев В. Б.* О существовании обобщенного решения нелокальной задачи для волнового уравнения / *В. Б. Дмитриев* // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского – Казань: Казанское математическое общество, 2005, Т. 31, с. 58–60.

6. *Дмитриев В. Б.* Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения / *В. Б. Дмитриев* // Вестник СамГу, 2006. N - 2(42), с. 15–27.

7. *Дмитриев В. Б.* Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения гиперболического типа / *В. Б. Дмитриев* // Вестник СамГТУ, 2006. вып. 42, с. 35–40.

8. *Дмитриев В. Б.* Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения / *В. Б. Дмитриев* // Труды Третьей Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара: Изд-во СамГТУ, 2006. – С. 102–104.

9. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения гиперболического типа с n пространственными переменными / *Л. С. Пулькина , В. Б. Дмитриев* // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XVII". – Воронеж: Центрально-Черноземное книжное издательство, 2006. – с. 150.

10. *Дмитриев В. Б.* Об одной задаче для нагруженного уравнения / *В. Б. Дмитриев* // Дни студенческой науки: Сборник научных трудов студентов, и аспирантов СамГАПС. – Выпуск 7. – Самара: СамГАПС, 2006. – С. 237.