На правах рукописи

Ускорев Илья Викторович

О ГЕОМЕТРИИ КОНФОРМНЫХ ИНВАРИАНТОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в Московском педагогическом государственном университете на кафедре геометрии математического факультета

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор КИРИЧЕНКО Вадим Фёдорович

Официальные опоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор РОДИОНОВ Евгений Дмитриевич;
кандидат физико-математических наук,
доцент БАЛАЩЕНКО Виталий Владимирович

Ведущая организация:
Казанский государственный университет

Защита состоится «29» апреля 2009 г. в «15:00» часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу: Россия, 630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан «20» марта 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

0 775876

I. Общая характеристика диссертации

Предметом исследования настоящей работы являются сасакиевы, косимплектические структуры и структуры Кенмоцу, свойства структур при их конформном преобразовании, свойства структур полученных в результате конформного преобразования этих структур, а также конформные инварианты вышеуказанных структур.

Актуальность темы:

Как известно, одним из методов изучения геометрии является полевой. Согласно этому методу, геометрия задаётся полевой величиной("геометрической структурой") на многообразии M. Первым важнейшим примером такой геометрии явилась риманова геометрия, задаваемая римановой метрикой - полем скалярных произведений в касательных пространствах. Г.Вейлем было получено, что по аналогии с римановой геометрией можно рассматривать геометрии, которые задаются другими геометрическими структурами, и развил геометрию пространства линейной связности, задаваемую некоторой геометрической структурой - линейной связностью.

Э.Картан определил и исследовал ряд новых типов геометрий, задаваемых различными геометрическими структурами. Он обнаружил, что с каждой из этих геометрий связана некоторая группа, действующая в многообразии корепеперов. Э.Картан также развил общий метод изучения таких геометрий, основанный на выборе специальной неголономной системы координат - поля корепеперов и рассмотрении продолжений. Данный метод называют ***"метод подвижного репера"***.

Класс геометрий, определяемых геометрическими структурами, к которым применим метод подвижного репера Картана, определил С. Черн. Подобные геометрические структуры можно охарактеризовать некоторой группой G и описать в терминах главных G-расслоений корепеперов. Черн назвал эти геометрические структуры G-структурами и развил их теорию, которая является вариантом метода подвижного репера Картана в инвариантном изложении.

Саму теорию G-структур можно рассматривать как синтез группового подхода Клейна и полевого подхода Римана. Большинство изучаемых в дифференциальной геометрии структур(риманову, псевдориманову, (почти)симплектическую, (почти) комплексную, кэлерову, кватернионную, афинную, проективную, флаговую, конформную и т.д.) можно рассматривать как G-структуры. Общие методы, развитые в теории G-структур, позволяют с единых позиций исследовать разнообразные геометрические структуры.

Основные геометрические задачи, решаемые в рамках теории G-структур можно сформулировать так: описание структуры группы автоморфизмов; классификация геометрических структур с максимальной группой автоморфизмов; построение полного набора дифференциальных инвариантов до порядка k, полностью описывающих дифференциально-геометрическую окрестность порядка k данной структуры; проблема эквивалентности, а именно, нахождение необходимых и достаточных условий эквивалентности геометрических структур, и проблема интегрируемости - нахождение условий эквивалентности данной геометрической структуры стандартной плоской структуре; проблема модулей - описание классов эквивалентных G-структур.

В настоящем исследовании примененен метод подвижного репера с целью определения условий нахождения необходимых и достаточных условий эквивалентности рассматриваемых дифференциально геометрических структур.

Говоря о предмете исследования диссертационной работы, можно отметить, что изучение дифференциально геометрических структур, их свойств на гладком многообразии является сновной задачей дифференциальной геометрии. Поскольку само понятие дифференциально геометрической структуры является общим, дать его чёткое, ясное, полное определение достаточно сложно. Однако, можно сказать, что среди дифференциально геометрических структур наибольшее значение имеют структуры, которые определены совокупностью тензорных полей на многообразии. Задание такой структуры на многообразии естественно влечёт задание некоторой G-структуры на этом многообразии, что равносильно заданию редукции расслоения реперов в некоторой подгруппе структурной группы.

На нечётномерном римановом многообразии особую дифференциально-геометрическую структуру, называемую *контактной метрической структурой*, порождают дифференциальные 1-формы максимального ранга. Такая структура естественно обобщается до так называемой *почти контактной (метрической) структуры*. Почти контактные (метрические) структуры являются частным случаем (метрических) f–структур и тесно связаны с почти эрмитивыми структурами.

Почти контактные метрические структуры представляют один из самых содержательных примеров дифференциально геометрических структур. Только в 50-е года 20 в. начинается развитие теории почти контактных структур. Почти контактные и почти контактные метрические многообразия введены как понятия Дж.Греем. Почти контактные метрические структуры индуцируются естественным образом на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий, а также на пространствах главных тороидальных расслоений над почти эрмитовыми многообразиями.

Контактное многообразие, т.е. многообразие M^{2n+1}, с фиксированной контактной формой $\eta:\ \eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$, допускает G-структуру со структурной группой $U(n)\times e$. Это обнаружил в своих исследованиях Чжень. Позже Дж. Грей такие многообразия, допускающие указанную G-структуру, назвал почти контактными многообразиями. Дальнейшее развитие тематики привело к тому, что в 1960 году Сасаки доказал, что многообразие, допускающее G-структуру со структурной группой $U(n) \times e$, внутренним образом определяет тройку Φ, ξ, η тензоров, которые обладают свойствами $\eta(\xi) = 1$, $\eta \circ \Phi = 0$, $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$.

Огромный интерес для исследований представили специальные классы почти контактных метрических и почти контактных многообразий. Это и косимплектические, и сасакиевы, и квазисасакиевы многообразия. Косимплектические и сасакиевы структуры представляют собой некий аналог келеровых структур в почти эрмитовой геометрии.

Изучением косимплектических и сасакиевых многообразий занимались Блэр, Шоуэрс, Гольдберг, Яно, Танно, Сасаки, Моримото, Исихара, Огиуэ и пр. Танно классифицировал сасакиевы пространственные формы и пространства максимальной подвижности. Исихара и Огиуэ установили геометрический смысл сасакиевых пространственных форм.

Как таковая теория квазисасакиевых многообразий возникла в исследованиях Блэра, а сами их исследования проведены в работах Сасаки, Канемаки, Янамото, Танно. Как известно, частным случаем квазисасакиевых многообразий, обусловленных рангом 1-формы η, являются косимплектические многообразия, определяемые условием $d\eta = 0$ $(rg\ \eta = 1)$, и сасакиевы многообразия, для которых $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ $(rg\ \eta = 2n + 1)$. Блэр нашёл условия, при которых квазисасакиево многообразие является произведением сасакиева и келерова многообразий, доказал, что не существует квазисасакиевой структуры чётного ранга, а также, что характеристический вектор ξ является вектором Киллинга. Помимо этого Блэром же было доказано, что квазисасакиево многообразие постоянной кривизны является, с точностью до гомотетического преобразования структуры, сасакиевым или косимплектическим, в частности, квазисасакиево многообразие строго положительной постоянной кривизны является многообразием, гомотетичным сасакиеву.

Своё обобщение почти контактные структуры вместе с почти комплексными структурами получили в работе Яно, который ввёл понятие f-структуры в 1961 г. В дальнейшем f-структуры изучались Блэром, Голдбергом, Окумурой, Ладденом и рядом других исследователей, которые получили ряд интересных результатов, используемых до сих пор современными исследователями f-структур.

Особый интерес исследования представляют конформно-инвариантные свойства гладких многооборазий, изучение которых до сих пор являются актуальной задачей современной дифференциальной геометрии.

Исследованием конформных преобразований почти контактных метрических структур занимались Чиней и Марреро. Под конформным преобразованием почти контактной метрической структуры Φ, ξ, η, g они понимали преобразование вида:

$$\widetilde{\Phi} = \Phi; \quad \widetilde{\eta} = e^{\sigma}\eta; \quad \widetilde{\xi} = e^{-\sigma}\xi; \quad \widetilde{g} = e^{2\sigma}g\ ,$$

где σ - дифференцируемая функция на многообразии.

Чиней и Марреро нашли условия, при которых почти контактное метрическое многообразие является локально конформно (почти) косимплектическим, и доказали, что в таких многообразиях на листах голономного распределения $\eta = 0$ индуцируется локально конформно-келерова структура.

Учитывая всё изложенное выше, можно чётко сказать, что квазисасакиевы, в частности, косимплектические и сасакиевы структуры, играют большую роль в контактной геометрии. К тому же эти структуры имеют важные общие свойста, которые заключаются в том, что все эти структуры являются нормальными структурами и их структурный ковектор является формой Киллинга.

Особым интересом пользуются исследования многообразий Кенмоцу. Впервые, структуры, характеризуемые тождеством $\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y\rangle\xi - \eta(Y)\Phi X$ были введены в 1971 году самим Кенмоцу, в честь которого впоследствии и были названы.

Такие структуры естественным образом возникают в классификации Танно связных почти контактных метрических многообразий, группа автоморфизмов которых имеет максимальную размерность.

Одним из самых замечательных и значимых свойств структур Кенмоцу является их нормальность и интегрируемость. Структуры Кенмоцу не являются контактными, а значит, и сасакиевыми, но в некотором смысле им полярны вопреки, на первый взгляд кажущегося, сходства определяющих тождеств.

Всякое конформно-плоское многообразие Кенмоцу, а также всякое локально-симметрическое многообразие Кенмоцу локально эквивалентно многообразию Кенмоцу такого типа.

Как известно, класс многообразий Кенмоцу совпадает с классом почти контактных метрических структур, получаемых из косимплектических многообразий каноническим конформным преобразованием косимплектической структуры.

Если говорить о тензоре кривизны Вейля, используемого в исследованиях по тематике диссертационной работы, то следует напомнить, что тензор кривизны Вейля назван в честь Германа Вейля. Это тензор, удовлетворяющий всем свойствам симметрии тензора Римана с дополнительным условием, которое заключается в том, что построенный к тензору Вейля тензор Риччи равен нулю. Сам тензор Вейля может иметь нетривиальную форму только в пространствах размерности больше трёх, тогда как в двумерном и трёхмерном пространствах тензор Вейля тождественно равен нулю.

В компонентах тензор Вейля имеет следующий вид:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(r_{ik}g_{jl} + r_{jl}g_{ik} - r_{il}g_{jk} - r_{jk}g_{il}) + \frac{\varkappa}{(n-1)(n-2)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}),$$

где $i, j, k, l = 1, ..., 2n+1$, R_{ijkl} – компоненты тензора Римана-Кристоффеля, r_{ij} - компоненты тензора Риччи.

Тензор Вейля обладает тем свойством, что остаётся инвариантным при конформных преобразованиях метрики. Зная это свойство и значения компонент тензора Вейля, можно изучать конформную геометрию пространств и их свойства.

Цель диссертационной работы:

Изучение геометрии основных классов почти контактных метрических структур, а именно сасакиевых, косимплектических структур и структур Кенмоцу на гладком многообразии.

Основные задачи:

1. Вывести формулы преобразованных структурных тензоров почти контактного метрического многообразия при конформном преобразовании структуры с определяющей гладкой функцией σ;

2. Найти условия инвариантности структурных тензоров почти контактного метрического многообразия при конформном преобразовании структуры с определяющей гладкой функцией σ;

3. На основе полученных формул преобразования структурных тензоров почти контактной метрической структуры для сасакиевых, косимплектических структур и структур Кенмоцу определить, в какие структуры и при каких условиях рассматриваемые структуры перейдут при конформном преобразовании структуры с определяющей гладкой функцией σ;

4. Вычислить, когда при конформном преобразовании сасакиевых, косимплектических структур и структур Кенмоцу сохраняется условие их нормальности. Определить сами условия нормальности рассматриваемых структур, если таковые имеют место быть;

5. Вычислить компоненты тензора Вейля для сасакиевых, косимплектических структур и структур Кенмоцу;

6. Исследовать геометрический смысл обращения в нуль элементов спектра тензора Вейля для сасакиевых, косимплектических структур и структур Кенмоцу;

7. Найти условия, при которых сасакиева, косимплектическая структура и структура Кенмоцу являются эйнштейновыми.

Методика исследования:

В работе используется аппарат классического тензорного анализа, метод инвариантного исчисления Кошуля, а также метод подвижного репера и внешних форм Картана в их современной трактовке – метод присоединённых G-структур, теория конформных преобразований структур, аппарат векторных полей и внешних форм, методы восстановления тождеств, классические методы теории гладких многообразий, теории почти контактных метрических структур.

Научная новизна:

1. Найден закон преобразования структурных тензоров почти контактной метрической структуры при её конформном преобразовании;

2. Найдены условия инвариантности структурных тензоров при конформном преобразовании почти контактной метрической структуры;

3. Определено конформное преобразование, переводящее косимплектическую структуру в структуру Кенмоцу, и обратное преобразование, переводящее структуру Кенмоцу в косимплектическую структуру;

4. Найдено условие нормальности конформно преобразованной структуры косимплектического типа;

5. Вычислены все компоненты тензора Вейля для многообразий Сасаки, косимплектического многообразий и многообразия Кенмоцу;

6. Найдены условия обращения в нуль элементов спектра тензора Вейля для многообразия Сасаки, косимплектического многообразия и многообразия Кенмоцу;

7. Получены тождества, эквивалентные обращению в нуль элементов спектра тензора Вейля для многообразия Сасаки, косимплектического многообразия и многообразия Кенмоцу;

8. Получены условия для тензора Вейля конформной кривизны, при которых многообразия Сасаки, косимплектические многообразия и многообразия Кенмоцу являются эйнштейновы, η-эйнштейновыми.

Практическое значение:

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейших работах по изучению почти контактных метрических структур, в частности сасакиевых, косимплектических многообразий и многообразий Кенмоцу. Кроме того они могут найти своё применение в качестве материала для спецкурсов по близкой тематике в высших учебных заведениях.

Апробация работы:

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседании объединённого Семинара кафедры геометрии, семинаре кафедры геометрии Московского педагогического государственного университета (руководитель - доктор физико-математических наук, профессор Кириченко В.Ф.); на Международной конференции "Геометрия в Астрахани-2007", Международной конференции "Геометрия в Астрахани-2008"в АГУ г. Астрахань в 2007 и 2008 гг. соответственно, на научном семинаре кафедры геометрии под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора В.В. Шурыгина в

Казанском государственном университете.

Публикации:

Основное содержание диссертации изложено в 6 публикациях(3-х тезисов и 3-х статей), которые приведены в конце автореферата.

Структура и объём диссертации:

Диссертация состоит из введения, трёх глав, состоящих из 9 параграфов, заключения и списка литературы, использованной в ходе работы над диссертацией, список публикаций автора по теме диссертации. Список литературы содержит 39 наименований. Основное содержание диссертации изложено на 72 страницах.

II. Краткое содержание основного текста диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы, представляется исторический обзор по развитию тематики, формулируются основные цели и задачи диссертационного исследования, излагаются основные результаты, полученные в работе.

Глава 1. Основные понятия и определения.

Глава §1 носит реферативный характер. В ней даётся определение контактной и почти контактной (метрической) структуры, определения соответствующих им многообразий; рассмотрена пара взаимнодополнительных фундаментальных распределений $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$; строится адаптированный структуре репер(A-репер); вводится понятие присоединённой G-структуры; представляются матрицы структурного оператора и метрического тензора в A-репере:

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n - единичная матрица порядка n.

В §2 приводится первая группа структурных уравнений римановой связности на пространстве присоединённой G-структуры:

1) $d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^a{}_b\omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b$

2) $d\omega^a = \ \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_a{}^b\omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b$

3) $d\omega = \ C_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + C^{ab}\omega_b \wedge \omega_c + C^b_c\omega^c \wedge \omega_b + C_b\omega \wedge \omega^b + C^b\omega \wedge \omega_b,$

где $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$: π - естественная проекция пространства присоединённой $G-$структуры на многообразие M, при этом

$B^{ab}{}_c = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi^a_{\hat{b},c}$; $B^{abc} = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]}$; $B^a{}_b = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,b}$; $B_{ab}{}^c = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}$;
$B_{abc} = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]}$; $B_a{}^b = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}$; $B^{ab} = \sqrt{-1}(\Phi^a_{0,\hat{b}} - \frac{1}{2}\Phi^a_{\hat{b},0})$; $B_{ab} = -\sqrt{-1}(\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{1}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0})$;
$C^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]}$; $C_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{[a,b]}$; $C^a_b = -\sqrt{-1}(\Phi^0_{\hat{a},b} + \Phi^0_{b,\hat{a}})$; $C^a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},0}$;
$C_a = \sqrt{-1}\Phi^0_{a,0}$.

Вводятся определения фундаментальной формы и конформного преобразования почти контактной метрической структуры.

Глава 2. Структурные тензоры AC-структуры и их преобразование при конформном преобразовании структуры.

В §1 рассматриваются семейства функций на пространстве присоединённой G-структуры, служащих компонентами шести основных тензоров почти контактной метрической структуры, названных структурными тензорами. Получены формулы, по которым преобразуются структурные тензоры при конформном преобразовании почти контактной метрической структуры с определяющей гладкой функцией σ:

$$\begin{cases} \widetilde{B}(X,Y) = B(X,Y) - \frac{1}{2}\{\langle\Phi^2 Y, X\rangle\Phi^2(\sigma^\sharp) - \langle\Phi Y, X\rangle\Phi(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y)\} \\ \widetilde{C}(X,Y) = C(X,Y) \\ \widetilde{D}(X) = e^\sigma D(X) \\ \widetilde{E}(X) = e^\sigma(E(X) + d\sigma(\xi)(\Phi^2 X)) \\ \widetilde{F}(X) = e^\sigma F(X) \\ \widetilde{G} = e^{2\sigma}(G - \Phi^2(\sigma^\sharp)). \end{cases}$$

В §2 показано, что структурный тензор C является абсолютными инвариантом при конформном преобразовании почти контактной метрической структуры с определяющей гладкой функцией σ, а тензоры D, F – относительными инвариантами. Найдены условия инвариантности остальных структурных тензоров. Введены понятия нормальной, сасакиевой, почти косимплектической, косимплектической, квазисасакиевой структур и структур Кенмоцу, а также определение соответствующих им многообразий. Преставлены основные примеры вышеуказанных структур. Доказана

Теорема 1. Тензор B - абсолютный инвариант при конформном преобразовании AC-структуры тогда и только тогда, когда $\sigma^\sharp \in \mathfrak{M}$.

Следствие. Пусть M – AC-многообразие размерности свыше 3. Тогда следующие условия равносильны:

1) B – абсолютный инвариант конформного преобразования AC-структуры с определяющей функцией σ;

2) G - относительный ивариант конформного преобразования AC-структуры с определяющей функцией σ;

3) $\sigma^\sharp \in \mathfrak{M}$.

Теорема 2. AC-структура косимплектического типа является косимплектической тогда и только тогда, когда при каноническом конформном преобразовании она переходит в структуру Кенмоцу.

Теорема 3. AC-структура косимплектического типа является структурой Кенмоцу тогда и только тогда, когда при преобразовании, обратном каноническому конформному преобразованию, она переходит в косимплектическую структуру.

Теорема 4. Структура Кенмоцу имеет следующий набор структурных тензоров:

$B = C = D = F = G = 0;\ E = -\Phi^2$.

Теорема 5. AC-структура косимплектического типа при конформном преобразовании переходит в AC-структуру косимплектического типа тогда и только тогда, когда $\sigma^\sharp \in \mathfrak{M}$, где σ - определяющая функция конформного преобразования.

Следствие. AC-структура косимплектического типа при каноническом конформном преобразовании переходит в AC-структуру косимплектического типа.

В §3 рассмотрены вопросы сохранения условия нормальности рассматриваемых в диссертационном исследовании AC-структур при конформном преобразовании.

Теорема 6. Нормальная AC-структура при конформном преобразовании переходит в нормальную AC-структуру тогда и только тогда, когда $\sigma^\sharp \in \mathfrak{M}$, где σ - определяющая функция конформного преобразования.

Следствие 1. Нормальная AC-структура косимплектического типа при каноническом конформном преобразовании переходит в нормальную AC-структуру косимплектического типа. □

Следствие 2. Структура Кенмоцу является нормальной AC-структурой косимплектического типа.

Следствие 3. Пусть f - конформное преобразование AC-структуры S, первый структурный тензор которой является абсолютным инвариантом преобразования f. Тогда, если S - структура косимплектического типа (соответственно, нормальная структура), то её образ $\tilde{S}$ - AC-структура косимплектического типа(соответственно, нормальная AC-структура).

Следствие 4. Пусть f - конформное преобразование AC-структуры S, шестой структурный тензор которой является относительным инвариантом преобразования f. Тогда, если S - структура косимплектического типа (соответственно, нормальная структура), то её образ $\tilde{S}$ - AC-структура косимплектического типа(соответственно, нормальная AC-структура).

Следствие 5. Структура, полученная нетривиальным конформным преобразованием косимплектической структуры S является нормальной структурой $\tilde{S}$ тогда и только тогда, когда $\exists f \in C^\infty(M) : \nabla_X(\Phi)Y = f(\langle \Phi X, Y\rangle - \eta(Y)\Phi X)$.

Предложение. Структура, полученная нетривиальным конформным преобразованием сасакиевой структуры, не может быть нормальной AC-структурой.

Глава 3. Тензор Вейля для основных типов многообразий

В §1 введено определение тензора Вейля и задана формула для вычисления его компонент:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2n-1}(r_{ik}g_{jl} + r_{jl}g_{ik} - r_{il}g_{jk} - r_{jk}g_{il}) + \frac{\varkappa}{2n(2n-1)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$

где r_{ij} - компоненты тензор Риччи на пространстве присоединённой G-структуры.

Изложены основные свойства тензора Вейля.

В §2 подсчитаны значения компонент тензора Римана-Кристоффеля, тензора Риччи и компоненты тензора Вейля на пространстве присоединённой G-структуры для сасакиева многообразия:

$R^a_{bcd} = R^a_{b\hat{c}\hat{d}} = R^a_{b\hat{c}0} = R^a_{b\hat{c}0} = 0$; $R^a_{b\hat{c}d} = A^{ac}_{bd} - 2\delta^a_b\delta^c_d - \delta^a_d\delta^c_b$; $R^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = R^a_{\hat{b}\hat{c}d} = R^a_{\hat{b}c0} = R^a_{\hat{b}\hat{c}0} = 0$;

$R^a_{\hat{b}cd} = -2\delta^a_{[c}\delta^b_{d]}$; $R^a_{0cd} = R^a_{0\hat{c}\hat{d}} = R^a_{0\hat{c}d} = R^a_{0\hat{c}0} = 0$; $R^a_{0c0} = -\delta^a_c$

$r_{ab} = 0$, $r_{\hat{a}b} = A^{ah}_{bh} - 2\delta^a_b$, $r_{a0} = 0$, $r_{00} = 2n$

$W_{\hat{a}0c0} = \frac{1}{2n-1}A^{ah}_{ch} - \frac{2n+\varkappa}{2n(2n-1)}\delta^a_c$; $W_{\hat{a}bc\hat{d}} = -A^{ad}_{bc} + 2\delta^a_b\delta^d_c + \frac{1}{2n-1}(A^{ah}_{ch}\delta^d_b + A^{dh}_{bh}\delta^a_c) + \frac{4n^2-10n-\varkappa}{2n(2n-1)}\delta^a_c\delta^d_b$;

$W_{\hat{a}\hat{b}cd} = \frac{4n^2+6n+\varkappa}{2n(2n-1)}(\delta^b_c\delta^a_d - \delta^a_c\delta^b_d) + \frac{1}{2n-1}(A^{ah}_{ch}\delta^b_d + A^{bk}_{dk}\delta^a_c - A^{al}_{dl}\delta^b_c - A^{bm}_{cm}\delta^a_d)$; $W_{a000} = 0$;

$W_{ab00} = 0$; $W_{a0c0} = 0$; $W_{abc0} = 0$; $W_{abcd} = 0$; $W_{\hat{a}b00} = 0$; $W_{\hat{a}\hat{b}c0} = 0$; $W_{\hat{a}b\hat{c}0} = 0$; $W_{\hat{a}bcd} = 0$.

Предложение: Пусть M - многообразие Сасаки. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) M - многообразие Эйнштейна;

2) M - многообразие Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 2n$;

3) $A^{ah}_{bh} = 2(n+1)\delta^a_b$.

Теорема 7. Пусть M - многообразие Сасаки. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $W_{\hat{a}0c0} = 0$; 2) $W(X,\xi)\xi = 0$, $X \in \mathfrak{X}(M)$; 3) $r = \alpha g + \beta\eta\otimes\eta$, где $\alpha = \frac{\varkappa}{2n} - 1$, $\beta = 2n - \alpha$.

Теорема 8. Пусть M - многообразие Сасаки. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $W_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$; 2) $\langle W(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi Z,\Phi H\rangle = \langle W(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi H\rangle$, $X, Y, Z, H \in \mathfrak{X}(M)$;

3) M - многообразие Эйнштейна;

4) M - многообразие Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 2n$. □

Теорема 9. Пусть M - многообразие Сасаки. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $W_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$; 2) $\langle W(\Phi Z,\Phi H)\Phi Y,\Phi X\rangle = \langle W(\Phi Z,\Phi^2 H)\Phi Y,\Phi^2 X\rangle$, $X, Y, Z, H \in \mathfrak{X}(M)$;

3) M - многообразие Эйнштейна;

4) M – многообразие Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 2n$.

В §3 подсчитаны компоненты тензора Вейля на пространстве присоединённой G-структуры для косимплектического многообразия:

$W_{\hat{a}0c0} = \frac{1}{2n-1}(A^{ah}_{ch} - \frac{\varkappa}{2n}\delta^a_c)$; $W_{\hat{a}\hat{b}cd} = \frac{1}{2n-1}(A^{ah}_{ch}\delta^b_d + A^{bh}_{dh}\delta^a_c - A^{ah}_{dh}\delta^b_c - A^{bh}_{ch}\delta^a_d) + \frac{\varkappa}{2n(2n-1)}(\delta^a_d\delta^b_c - \delta^a_c\delta^b_d)$;

$W_{\hat{a}bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} + \frac{1}{2n-1}(A^{ah}_{ch}\delta^d_b + A^{dk}_{bk}\delta^a_c) - \frac{\varkappa}{2n(2n-1)}\delta^a_c\delta^d_b$; $W_{a000} = 0$; $W_{ab00} = 0$; $W_{a0c0} = 0$;

$W_{abc0} = 0$; $W_{abcd} = 0$; $W_{\hat{a}b00} = 0$; $W_{\hat{a}\hat{b}c0} = 0$; $W_{\hat{a}bc0} = 0$; $W_{\hat{a}bcd} = 0$.

Предложение: Пусть M - косимплектическое многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) M – многообразие Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 0$;

2) M – риччи-плоско; 3) $A^{ah}_{bh} = 0$.

Теорема 10. Пусть M - косимплектическое многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $W_{\hat{a}0c0} = 0$; 2) $W(X,\xi)\xi = 0$, $X \in \mathfrak{X}(M)$;

3) $r = \alpha g + \beta\eta\otimes\eta$, где $\alpha = \frac{\varkappa}{2n}$, $\beta = -\alpha$.

Теорема 11. Пусть M - косимплектическое многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $W_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$; 2) $\langle W(\Phi^2X, \Phi^2Y)\Phi Z, \Phi H\rangle = \langle W(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi H\rangle$, $X, Y, Z, H \in \mathfrak{X}(M)$;

3) M – многообразие Эйнштейна;

4) M – многообразие Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 0$.

Теорема 12. Пусть M - косимплектическое многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $W_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$; 2) $\langle W(\Phi Z, \Phi H)\Phi Y, \Phi X\rangle = \langle W(\Phi Z, \Phi^2 H)\Phi Y, \Phi^2 X\rangle$, $X, Y, Z, H \in \mathfrak{X}(M)$;

3) M – многообразие Эйнштейна; 4) M – плоско; 5) $A^{ad}_{bc} = 0$.

В §4 подсчитаны значения компонент тензора Риччи и компоненты тензора Вейля на пространстве присоединённой G-структуры для многообразия Кенмоцу:

$r_{\hat{a}b} = -2n\delta^a_b - A^a_b, r_{ab} = 0, r_{0b} = 0, r_{00} = -2n$.

Следствие. Пусть M - многообразие Кенмоцу. Многообразие M является многообразием Эйнштейна с космологической константой ϵ, равной $-2n$, тогда и только тогда, когда $A^{ah}_{bh} = 0$.

$W_{\hat{a}0c0} = \frac{-2n-\varkappa}{2n(2n-1)}\delta^a_c + \frac{1}{2n-1}$; $W_{\hat{a}\hat{b}cd} = \frac{2n(2n-1)-\varkappa}{2n(2n-1)}\delta^{ab}_{cd} + \frac{1}{2n-1}(r^a_c\delta^b_d + r^b_d\delta^a_c - r^a_d\delta^b_c - r^b_c\delta^a_d)$;

$W_{\hat{a}bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc}$; $W_{a000} = 0$; $W_{ab00} = 0$; $W_{a0c0} = 0$; $W_{abc0} = 0$; $W_{abcd} = 0$; $W_{\hat{a}b00} = 0$;

$W_{\hat{a}\hat{b}c0} = 0$; $W_{\hat{a}bc0} = 0$; $W_{\hat{a}bcd} = 0$

Теорема 13. Пусть M - многообразие Кенмоцу. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) M - многообразие Эйнштейна;

2) M - многообразие Эйнштейна с космологической константой $\epsilon = -2n$; 3) $A^{ah}_{ch} = 0$.

Теорема 14. Пусть M - многообразие Кенмоцу. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $W_{\hat{a}0c0} = 0$; 2) $W(X,\xi)\xi = 0$, $X \in \mathfrak{X}(M)$; 3) $r = \alpha g + \beta\eta\otimes\eta$, где $\alpha = \frac{\varkappa}{2n} + 1$, $\beta = -2n - \alpha$.

Теорема 15. Пусть M - многообразие Кенмоцу. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $W_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$; 2) $\langle W(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi H\rangle = \langle W(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi H\rangle$, $X, Y, Z, H \in \mathfrak{X}(M)$;

3) M – многообразие Эйнштейна;

4) M - многообразие Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = -2n$;

Теорема 16. Пусть M - многообразие Кенмоцу. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $W_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$; 2) $\langle W(\Phi Z, \Phi H)\Phi Y, \Phi X\rangle = \langle W(\Phi Z, \Phi^2 H)\Phi Y, \Phi^2 X\rangle$, $X, Y, Z, H \in \mathfrak{X}(M)$;

3) M - многообразие Эйнштейна;

4) M – многообразие Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = -2n$; 5) $A^{ad}_{bc} = 0$.

После главы 3 представлен список использованной литературы.

Автор выражает глубокую признательность доктору физико-математических наук, профессору Кириченко В.Ф. за постановку проблемы, внимание и помощь, оказанную автору при работе над диссертационным исследованием.

III. Список публикаций автора по теме диссертации

1) Ускорев И.В. Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур // Тезисы докладов II Международного семинара "Геометрия в Астрахани-2007. Симметрии: теоретический и методический аспекты", Астрахань, 2007, с. 60-61

2) Ускорев И.В. Геометрия конформных инвариантов некоторых классов почти контактных метрических структур // Моск.пед.гос.ун-т, М., 2008, Деп. в ВИНИТИ 16.05.2008. № 419-В2008, 33с.

3) Ускорев И.В. Геометрия конформных инвариантов некоторых классов почти контактных метрических структур // Тезисы докладов Международного семинара "Геометрия в Одессе-2007", Одесса, 2008, с. 133-134

4) Ускорев И.В. Спектр тензора Вейля для основных классов почти контактных метрических структур // Тезисы докладов III Международного семинара "Геометрия в Астрахани-2008", Астрахань, 2008, с. 55-56

5) Ускорев И.В. Спектр тензора Вейля для основных классов почти контактных метрических структур // Электронный журнал "Исследовано в России", http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/017.pdf, Москва, 2009, с. 144-166

6) Кириченко В.Ф., Ускорев И.В. Инварианты конформного преобразования почти-контактных метрических структур // Матем.заметки, том. 84, №6, Москва, 2008, с. 838-850

Подп. к печ. 17.03.2009 Объем 0,75 п.л. Заказ №. 37 Тир 100 экз.
Типография МПГУ

10 =