На правах рукописи

Тоболкин Антон Александрович

К ТЕОРИИ *n*-УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Томск – 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Пестов Герман Гаврилович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Гриншпон Самуил Яковлевич (Томский государственный университет)

доктор физико-математических наук, профессор Копытов Валерий Матвеевич (Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН)

Ведущая организация: Алтайский государственный университет

Защита состоится «24» сентября 2009 года в 14 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 212.267.21 при Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина 36, аудитория 304 (второй корпус).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 15 августа 2009 года

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.627.21 при ТГУ, кандидат физико-математических наук, доцент А.Н. Малютина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В начале двадцатого века были заложены основы теории линейно упорядоченных множеств, было введено понятие формально вещественного поля, получен критерий линейной упорядочиваемости поля и структурные теоремы для линейно упорядоченного поля, начата классификация сечений в упорядоченных полях. Кантор ввёл понятие вполне упорядоченного множества и приступил к изучению кардиналов и ординалов [28]. Хан [33] заложил основополагающие понятия, вошедшие потом в арсенал теории упорядоченных алгебраических систем, такие как архимедовы и неархимедовы величины, неархимедовы упорядоченные группы и тела. В 1900 году в своём знаменитом докладе на математическом конгрессе Гильберт сформулировал вопрос о представимости положительного многочлена в виде суммы квадратов многочленов [21]. Публикации по этой проблеме оказались стимулом к изучению упорядоченных полей. Благодаря работе Дедекинда [30], математики стали широко использовать понятие сечения во множествах рациональных и вещественных чисел. Строение сечений в упорядоченном поле несёт существенную информацию о свойствах самого поля, поэтому логика исследований упорядоченных полей со временем привела к некоторой классификации сечений в упорядоченных полях [15; 16]. В теории линейно упорядоченных полей существенную роль играют различные замыкания упорядоченного поля [27].

Одним из центральных вопросов в теории упорядоченных полей является установление изоморфизма двух упорядоченных полей. Здесь оказались плодотворными методы теории моделей. В частности, Тарским была установлена полнота теории вещественно замкнутого поля [46]. Одновременно с развитием теории упорядоченных полей развивалась и теория упорядоченных групп. При этом изучались линейно упорядоченные группы [10] и их разные модификации, в частности, частично упорядоченные группы [31] и решеточно упорядоченные группы [11; 12; 29]. Одним из направлений в теории упорядоченных групп явилась теория циклически упорядоченных групп [3; 40], [45]. Ригер исследовал топологию циклически упорядоченных групп, Сверчковский получил структурную теорему для циклически упорядоченных групп. Забарина и Пестов [5; 6] сформулировали и доказали критерий циклической упорядочиваемости группы. Различные подходы к обобщению понятия линейного порядка по размерности предпринимались многими математиками, начиная с Кантора [28], работы которого были продолжены Шварцем [42], Риссом [41], Вагнером [47]. Следующим шагом в обобщении линейного порядка послужили работы Шпернера [43; 44] по так называемым *функциям порядка*. В основу определения функции порядка у Шпернера положена идея о взаимном расположении точки и гиперплоскости в n-мерном аффинном пространстве. В последующем при определении функции ориентации аффинного пространства Глок [32] использовал аксиоматический подход. Идея обобщения линейного порядка по размерности получила последовательное развитие в независимых работах Л. Новака и Г. Г. Пестова. Новак строит аксиоматическую теорию n-упорядоченных множеств [36; 38; 39] и применяет ее для исследования поля комплексных чисел [37]. Г.Г. Пестов и А.И. Терре строят теорию двумерно упорядоченных множеств и полей, а также теорию n-упорядоченных множеств [13; 14; 18; 19; 22; 24]. В частности, они вводят понятие k-мерной грани (k-симплекса) и k-мерной плоскости [20; 26]. Терре закладывает основы теории некоммутативных двумерно упорядоченных колец [23] и тел [25]. Забарина А. И. изучает циклически упорядоченные группы как группы с двумерным порядком [4]. В [7] доказано, что множество элементов конечных порядков в двумерно упорядоченной группе есть её нормальный делитель. Пестов для циклически упорядочиваемых групп получил новую структурную теорему, отличную от теоремы Сверчковского [17]. В работах [8], [9] начато изучение n-мерно упорядоченных групп.

Данная работа является логическим продолжением этого направления исследований.

Цель работы.

1. Задать алгоритм перехода от линейного упорядочивания группы к n-мерному упорядочиванию для произвольного натурального n.
2. Доказать, что естественный 4-мерный порядок на группе кватернионов совместим с алгебраической структурой группы.
3. Доказать существование счётного множества конечных групп, допускающих 4-мерное упорядочивание.
4. Построить пример нестандартного двумерного порядка на мультипликативной группе комплексных чисел.
5. Доказать теорему о симплексах, порождающих k-плоскость в n-мерно упорядоченной группе.

Общая методика исследования. В диссертации используются методы линейной алгебры, теории функций вещественного (комплексного) переменного, методы нестандартного анализа, теория линейно упорядоченных групп. В работе также используются введённые Пестовым определения функции n-мерного порядка и n-мерно упорядоченных алгебраических систем для $n>1$.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Основными результатами можно считать следующие:

1. Построен нестандартный 2-порядок на мультипликативной группе комплексных чисел.

2. Доказана 4-упорядочиваемость тела кватернионов.
3. Построен 3-порядок на поле комплексных чисел.
4. Доказана теорема о симплексах, порождающих плоскость. Получен критерий того, что плоскость в n-упорядоченной группе является подгруппой.
5. Построен алгоритм перехода от линейного порядка на группе к n-мерному для каждого натурального n.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты представляют научный интерес для специалистов в области упорядоченных алгебраических систем. Результаты могут быть использованы в научных исследованиях, в университетских спецкурсах для студентов и аспирантов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Международных конференциях "Мальцевские чтения" в 2006 и 2008 гг. (Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, г.Новосибирск), на Всероссийской научной студенческой конференции (Ставрополь: СевКавГТУ, 2006 г.), на IX-ой (2007 г.) и X-ой (2008 г.) Межрегиональной молодёжной конференции преподавателей, студентов и школьников "Математика, её содержание, методы и значение" (ТГУ), на Научной конференции молодых учёных, аспирантов и студентов ММФ, посвящённой трёхсотлетию со дня рождения Леонарда Эйлера (апрель 2007 г., ТГУ), на X-ой (май 2006 г.), XII-ой (апрель 2008 г.), XIII-ой (апрель 2009 г.) Всероссийских конференциях студентов, аспирантов и молодых учёных "Наука и образование" (ТГПУ), на Всероссийской конференции по математике и механике, посвящённой 130-летию Томского государственного университета и 60-летию механико-математического факультета (Томск, сентябрь 2008 г.).

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 71 странице и состоит из списка обозначений, введения, трёх глав и списка использованной литературы. Главы состоят из параграфов. Нумерация формул привязана к главам. Библиография включает 55 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение. Во введении изложена история вопроса, представлен обзор результатов, связанных с тематикой диссертации, сформулированы основные результаты.

Первая глава посвящена определению n-мерного порядка, рассмотрению частных случаев n-упорядоченных алгебраических систем.

Структура порядка тесно связана с геометрией, поэтому постараемся перенести как можно больше понятий и результатов из геометрии Евклида в геометрию n-упорядоченных множеств и групп. Если отбросить в Гильбертовской аксиоматике Евклидовой геометрии [2] аксиомы непрерывности и архимедовости и обобщить оставшиеся аксиомы на n-мерное пространство, то получим основные аксиомы порядка дискретных множеств. Поэтому теорию n-упорядоченных множеств мы должны строить так, чтобы все Гильбертовские аксиомы порядка (точнее их аналоги в строящейся геометрии n-упорядоченных множеств) были доказуемы, т.е. они должны являться аксиомами или теоремами. Например, если предположить, что мы уже дали определение 3-упорядоченного множества, затем сформулировали определение 2-мерной плоскости р, прямой $l_{(a,b)}$, проходящей через точки a, b, то в построенной теории должно быть справедливо утверждение: $a,b\in p\Rightarrow l_{(a,b)}\subseteq p$.

Исходя из этих соображений, проводились исследования по определению n-упорядоченного множества $<S,\zeta>$. В конечном счете, Г.Г. Пестовым была выдвинута идея о реализации некоторого конечного множества точек $M\subseteq S$ в R^n. При таком подходе задания n-порядка вся аксиоматика порядка скрыта в реализации. Определим вначале стандартную функцию n-порядка.

Определение 1.1.1. Пусть $x=(x_1; x_2;...; x_{n+1})$ – кортеж-столбец точек R^n, $x_i=(x_{i,1}, x_{i,2}, ..., x_{i,n+1})$, т.е. $x_{i,j}$ - j-ая координата i-ого вектора (координаты вектора записаны в строку). Тогда кортеж x можно рассматривать как матрицу размером $(n+1)\times n$ над R. Обозначим через E_{n+1} столбец из $(n+1)$ единицы. Положим $\sigma=\mathrm{sign}\circ\det$. Функцию

$$\eta_n(x)=\sigma(E_{n+1},x)$$

назовём стандартной функцией n-порядка.

Теперь на основании стандартной функции n-порядка построим определение n-мерной функции порядка.

Определение 1.1.2. Пусть задано отображение $\zeta: S^{n+1}\rightarrow\{-1,0,1\}$, где $|S|\geq n+1$. Если для каждого $A\subseteq S$, $|A|\leq 2n+1$ существует инъекция φ: $A\rightarrow R^n$ такая, что для каждого $x\in A^{(n+1)\times n}$ выполнено $\zeta(x)=\eta_n(\varphi(x))$, то ζ назовём функцией n-мерного порядка на множестве S.

Пару $<S,\zeta>$ назовём n-мерно упорядоченным множеством. Функцию φ в определении 1.1.2 в дальнейшем будем называть реализацией множества A в R^n.

Понятия n-упорядоченных групп (колец, тел, полей) естественным образом строятся на базе понятия n-упорядоченных множеств.

Определение 1.1.3. Пусть G – группа, $<G,\zeta>$ есть n-упорядоченное множество. Если для всех $x \in G^{n+1}$ и для всех $\alpha,\beta \in G$ выполнено условие: $\zeta(\alpha x \beta)=\zeta(x)$, то $<G,\zeta>$ назовём n-упорядоченной группой.

Это определение эквивалентно определению Пестова Г.Г. (доклад на семинаре по упорядоченным алгебраическим системам при ММФ ТГУ, 1986 г.). Аналогичным образом определяются n-упорядоченное кольцо и n-упорядоченное поле.

Приведём примеры n-упорядоченных групп.

1. Свободная абелева группа с n образующими допускает n-упорядочивание.
2. Мультипликативная группа C_4=<i> допускает только 2-упорядочивание.
3. Четвертная группа Клейна V_4 допускает только 3-упорядочивание.

Теорема 1.2.3. Для каждого натурального n на линейно упорядоченной группе можно задать n-мерный порядок.

Заметим, что в теореме 1.2.3 для доказательства реализации множества из $2n+1$ точки в R^n используется определитель Ван дер Монда, который получает интересную геометрическую интерпретацию: знак определителя Ван дер Монда равен значению естественной n-мерной функции порядка на линейно упорядоченной группе.

Обычно свободная группа понимается как группа свободная от определяющих отношений. Согласно теореме 1.2.3 и теореме Мацусита [35], свободная группа получает такую геометрическую интерпретацию: это группа свободная от ограничений на структуру порядка, т.е. для каждого натурального n на ней можно задать n-мерный порядок.

С использованием идей нестандартного анализа, а также методов теории функций комплексного и вещественного переменных строится двумерный порядок на прямом произведении тороидальной группы и произвольной линейно упорядоченной группы.

Теорема 1.2.5. Пусть T_0 – тороидальная группа, L – произвольная линейно упорядоченная группа, тогда $T_0 \times L$ допускает 2-упорядочивание.

Следствие 1.2.6. Мультипликативная группа комплексных чисел допускает нестандартный 2-порядок.

Вторая глава посвящена построению геометрии n-упорядоченных множеств и групп. В начале второй главы вводятся некоторые матричные преобразования: склеивание матриц, поэлементное возведение в степень, оператор выделения подматрицы и оператор подстановки матрицы в матрицу. Такие преобразования эффективно используются в пакете MatLab [34].

Доказательства в теории n-упорядоченных множеств, как правило, сводятся к таким преобразованиям над матрицами.

Пусть X – произвольная матрица. Вместо традиционной записи $X_{i,j}$ иногда будем писать $X(i,j)$. Запись set(X) в дальнейшем будет означать множество, состоящее из всех элементов матрицы X.

Склеивание матриц. Пусть матрицы X и Y имеют одинаковое количество строк. Тогда запись (X,Y) означает "приклеивание" к матрице X справа матрицы Y. Если матрицы X и Y имеют одинаковое количество столбцов, то запись $(X;Y)$ означает "приклеивание" к матрице X снизу матрицы Y.

Соответственно, запись $(x_1,\ldots,x_n)$ означает кортеж-строку, $(x_1;\ldots;x_n)$ - кортеж-столбец. При склеивании матриц (где это не вызовет недоразумения) будут опускаться скобки.

Оператор выделения подматрицы в матрице. В дальнейшем $\triangleright(i)A$ означает i-ую строку матрицы A, а $\nabla(j)A$ – j-ый столбец матрицы A. Запись $\triangleright(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_m)\nabla(j_1,\ldots,j_l,\ldots,j_n)A$ означает матрицу размером $m\times n$, у которой на месте (k,l) расположен элемент $A(i_k,j_l)$.

Оператор матричной подстановки. Запись $\int\limits_{\triangleright(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_m)\nabla(j_1,\ldots,j_l,\ldots,j_n)}^{B} A$ означает, что в матрице A с помощью операторов $\triangleright$ и ∇ выделяется подматрица $\triangleright(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_m)\nabla(j_1,\ldots,j_l,\ldots,j_n)A$ и заменяется на матрицу B.

Определение 2.1.2. Если для квадратных матриц Y_0, Y_1 над линейно упорядоченным полем $<P,\zeta>$ выполнено $\sigma Y_0=\sigma Y_1$, то будем говорить, что эти матрицы σ-эквивалентны.

Ключевым понятием здесь является понятие симплекса. В аналитической геометрии под k-симплексом понимают k-мерный тетраэдр. Однако такой подход к определению симплекса в n-упорядоченном множестве непригоден, так как наша цель – построить геометрию на дискретных множествах.

Определение 2.2.1. Пусть $<M,\zeta>$ есть n-мерно упорядоченное множество. Тогда подмножество $L\subseteq M$ называется множеством точек общего положения в M, если для каждого множества $A\subseteq L$, $|A|\leq(n+1)$, существует такое множество $B\subseteq M$, что $A\cap B=\varnothing$, $|(A;B)|=(n+1)$ и $\zeta(A;B)\neq 0$.

Определение 2.2.2. Пусть $<S,\zeta>$ есть n-упорядоченное множество. Если для кортежа $A\in S^{k+1}$ существует кортеж $B\in S^{n-k}$ такой, что выполняется $\zeta(A;B)\neq 0$, то A назовём k-симплеском n-упорядоченного множества $<S,\zeta>$ [20; 26].

Согласно определению 2.2.2, B есть симплекс, который будем называть дополняющим симплексом к A. Заметим, что при $k=-1$ кортеж A вырождается в пустое множество, а B есть n-симплекс, который в дальнейшем будем называть *максимальным*.

Определение 2.2.3. Пусть A – k-симплекс n-упорядоченного множества $<S,\zeta>$, $(0\leq k\leq n\text{-}1)$. Множество $p_A=\{x\in S\colon \zeta(A;S^{n-k-1};x)=0\}$ назовём k-мерной плоскостью, порождённой симплексом A [20; 26].

Теорема (критерий принадлежности точки плоскости) 2.2.4.

Пусть A есть k-симплекс n-упорядоченного множества $<S,\zeta>$, кортеж B дополняет кортеж A до невырожденного, т.е. $\zeta(A;B)\neq 0$, $x\in S$. Тогда x принадлежит плоскости p_A тогда и только тогда, когда для всех $i=1,\dots,n\text{-}k$ выполнено

$$\zeta(A;\int_{b(i)}^{x} B)=0.$$

Следствие 2.2.5. Пусть $(A;B)$ является n-симплексом n-упорядоченного множества $<S,\zeta>$, т.е. $\zeta(A;B)\neq 0$, x – произвольный элемент S; функция φ реализует $\mathrm{set}(A;B;x)$ в R^n. Тогда

$$x\in p_A \Leftrightarrow \varphi(x)\in\pi_{\varphi(A)}.$$

Отметим лемму.

Лемма (о непересекающихся плоскостях) 2.2.6. Пусть $<S,\zeta>$ есть n-упорядоченное множество. Если $\zeta(A;B)\neq 0$, то $p_A\cap p_B=\varnothing$.

Эти результаты необходимы для доказательства теоремы о порождающих симплексах.

Теорема (о порождающих симплексах) 2.2.10.

Пусть $A=(a_1;\dots;a_k)$, $B=(b_1;\dots;b_m)$ – симплексы n-упорядоченного множества $<S,\zeta>$, причём $\mathrm{set}(B)\subseteq p_A$, тогда

а) $m\leq k$;

б) $p_B\subseteq p_A$;

в) если $|\mathrm{set}(B)|=|\mathrm{set}(A)|$, то $p_B=p_A$.

В третьем параграфе доказаны некоторые теоремы геометрии n-упорядоченных групп.

Теорема (о движении плоскости) 2.3.2. Пусть A есть k-симплекс n-упорядоченной группы $<G,\zeta>$; $\alpha,\beta\in G$, тогда $\alpha p_A\beta=p_{\alpha A\beta}$.

Теорема 2.3.3. Пусть A есть k-симплекс n-упорядоченной группы $<G,\zeta>$. Для того, чтобы плоскость p_A являлась подгруппой группы G, необходимо и достаточно, чтобы $AA\subseteq p_A$.

Теорема (о пересекающихся плоскостях) 2.3.4.

Пусть A, B – симплексы n-упорядоченной группы $<G,\zeta>$. Тогда если $p_A\cap p_B\neq\varnothing$, то существует симплекс C такой, что $p_A\cap p_B=p_C$.

Иначе: если две плоскости в n-упорядоченной группе имеют общую точку, то их пересечение также есть плоскость в этой n-упорядоченной группе.

Таким образом, структура множества плоскостей в n-упорядоченной группе подобна структуре множества плоскостей n-мерного линейного пространства.

Третья глава посвящена конструированию различных n-упорядоченных групп, исходя из уже построенных ранее m-упорядоченных групп, где $m \leq n$.

В первом параграфе, используя идею Римана о стереографическом образе комплексной плоскости [1], задаём 3-порядок на поле комплексных чисел.

Теорема 3.1.2. Поле комплексных чисел C допускает 3-упорядочивание.

Исследованию четырёхмерной упорядочиваемости кватернионов посвящены следующие два параграфа.

Теорема 3.2.1. Тело кватернионов H допускает 4-упорядочивание.

Теорема 3.3.2. Группа Гамильтона $Q_8 = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$ допускает 4-упорядочивание.

Теорема 3.3.3. Существует бесконечно много неизоморфных конечных групп, допускающих 4-упорядочивание.

В заключении сформулируем некоторые гипотезы об n-мерно упорядоченных группах.

Гипотеза 1. Если конечная группа допускает n-упорядочивание, то она не допускает m-упорядочивания для $m \leq n$.

Гипотеза 2. Если n-упорядоченная группа бесконечна, то она допускает $(n+1)$-упорядочивание.

Гипотеза 3. Все конечные 4-упорядоченные группы изоморфны подгруппам мультипликативной группы кватернионов.

Гипотеза 4. Не существует конечных 3-упорядоченных групп, отличных от V_4.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Пестову Герману Гавриловичу за постановку задач и постоянное внимание ко всем этапам данной работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, И.А. Теория функций комплексного переменного: Учебник /И.А. Александров [Текст]. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 510 с.
2. Гильберт, Д. Основания геометрии. /Д. Гильберт [Текст]. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 491 с.
3. Желева, С.Д. О циклически упорядоченных группах /С.Д. Желева [Текст] //Сибирский математический журнал. – 1976. – Т.17 (5). – С. 1046-1051.

4. Забарина, А.И. О циклически упорядоченных группах: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук /А.И. Забарина [Текст]. – Томск, 1985. – 87 с. [Защита: 19 апреля 1985 г. Утверждение: 4 сентября 1985 г.]
5. Забарина, А.И., Пестов, Г.Г. К теореме Сверчковского /А.И. Забарина, Г.Г. Пестов //Сибирский математический журнал. – 1984. – Т.XXV. – №4. – С. 56-93.
6. Забарина, А.И., Пестов, Г.Г. О критерии циклической упорядочиваемости группы /А.И. Забарина, Г.Г. Пестов [Текст]//Упорядоченные множества и решётки: Межвуз.науч.сб. – Вып. 9. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. – С. 19-24.
7. Забарина, А.И., Пестов, Г.Г. О подгруппах 2-упорядоченных групп /А.И. Забарина, Г.Г. Пестов [Текст] //Актуальные проблемы математики и методики её преподавания: Материалы заочной научно-практической конференции. – Томск: Изд-во ТГПУ, 2007. – С. 17-20.
8. Забарина, А.И., Пестов, Г.Г. Об n-мерно упорядоченных группах /А.И. Забарина, Г.Г. Пестов [Текст] //Международная конференция по математике и механике. 16-18 сентября 2003 г., г. Томск, 2003 г.: Тезисы докладов. – Томск: Изд-во ТГУ, 2003. – С. 40.
9. Забарина, А.И., Пестов, Г.Г. Об n-мерно упорядоченных группах. /А.И. Забарина, Г.Г. Пестов [Текст] //Вестник Томского государственного университета. – №280. – декабрь, 2003. – С. 40-42.
10. Кокорин, А.И., Копытов, В.М. Линейно-упорядоченные группы /А.И. Кокорин, В.М. Копытов [Текст]. – М.: Наука, 1972. – 200 с.
11. Копытов, В. М. Решёточно-упорядоченные группы. /В.М. Копытов [Текст]. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
12. Копытов, В.М., Медведев, Н.Я. Правоупорядоченные группы /В.М. Копытов, Н.Я. Медведев [Текст]. – Новосибирск: Научная книга, 1996. – 250 с.
13. Пестов, Г.Г. Глубина точки и функция сечений n-мерной точечной системы /Г.Г.Пестов [Текст] //Труды Томского государственного университета. – 1967. – Т. 191. – С. 174-178.
14. Пестов, Г.Г. Двумерно упорядоченные поля /Г.Г. Пестов [Текст]. – Томск: Изд-во ТГУ, 2003. – 128 с. Пестов, Г.Г. n-мерные точечные системы /Г.Г. Пестов [Текст] //Труды Томского ордена трудового красного знамени государственного университета. – 1967. – Т. 191. – С. 158-163.
15. Пестов, Г.Г. К теории сечений в упорядоченных полях /Г.Г.Пестов [Текст] //Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42. – No 6. – С. 1350-1360.

16.Пестов, Г.Г. К теории упорядоченных алгебраических систем: Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук /Г.Г. Пестов [Текст]. – Томск, 2003. – 262 с. [Защита: 30 ноября 2004 г. Утверждение: 13 мая 2005 г.]
17.Пестов, Г.Г. О классе циклически упорядочиваемых групп /Г.Г.Пестов [Текст] //Вестник Томского государственного университета. – Бюллетень оперативной научной информации. – №21, февраль. – 2004. – Томск, 2004. – С. 39-43.
18.Пестов, Г.Г. Теоремы о внешних точках и гранях n-мерной точечной системы /Г.Г. Пестов [Текст] //Труды Томского ордена трудового красного знамени государственного университета. – 1967. – Т. 191. – С. 164-174.
19.Пестов, Г.Г. n-мерные точечные системы /Г.Г. Пестов [Текст] //Труды Томского ордена трудового красного знамени государственного университета. – 1967. – Т. 191. – С. 158-163.
20.Пестов, Г.Г. n-упорядоченные множества /Г.Г. Пестов [Текст] //Труды Иркутского государственного университета. – Иркутск, 1970. – Т. 74 /Серия математическая. – Вып. 6. – С. 146-169.
21.Проблемы Гильберта /Сборник под ред. П.С. Александрова [Текст]. – М.: Наука, 1972. – 240 с.
22.Терре, А.И. Некоторые вопросы теории 2-упорядоченных полей /А.И. Терре [Текст] //Материалы Пятой научной конференции по математике и механике. – Томск, 1975. – С. 85-86.
23.Терре, А.И. О классе двумерно упорядоченных ассоциативно-коммутативных колец /А.И. Терре [Текст] //Четвертый Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей: Тезисы сообщений. – Кишинев, 1980. – С. 100-101.
24.Терре, А.И. О классе двумерно упорядочиваемых полей /А.И. Терре [Текст]. – Томск, 1983. – 13 с. [Деп. в ВИНИТИ 26-8-83 г., № 4681 – 83].
25.Терре, А.И. Строение архимедовых двумерно упорядоченных тел /А.И. Терре [Текст]. – Томск, 1983. – 32 с. [Деп. в ВИНИТИ 26-8-83 г., №4680 – 83].
26.Терре, А.И. Элементы геометрии n-мерного порядка/А.И. Терре [Текст]. – Томск, 1982. – 36 с. [Деп. в ВИНИТИ 27-10-82 г., №5941 – 82].
27.Baer, R. Dichte, Archimedizität und Starrheit geordneter Körper /R. Baer [text]. – Math. Ann. – 1970, 188. – No3. – S. 165-205.
28.Cantor, G. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten / G. Cantor [text]. – In: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Berlin, Springer, 1932. – S. 165-205.
29.Conrad, P. Archimedean Extensions of Lattice-Ordered Groups /P. Conrad [text]. – J. Indian Math. Soc., 30 (1966). – P. 199-221.

30.Dedekind, R. Stetigkeit und Irrationale Zahlen / R. Dedekind [text] – Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, Achte Auflage. – 22 s.
31.Fuchs, L. Partially ordered algebraic systems / L. Fuchs. [text] – Pergamen Press, 1963. – 229 p.
32.Glock, E. Die orientierungsfunktionen eines affinen Raumes. /E. Glock [text] – Math. Z., 1962, 78. – No 4. – S. 319-360.
33.Hahn, H. Über die nichtarchimedischen Grössensysteme /H. Hahn [text] – S.-B. Akad. Wiss. Wien. – 11a, 116 (1907). – S. 601-655.
34.Hunt, Brian R. A Guide to MATLAB, 2e: for Beginners and Experienced Users /Br. Hunt [text]. – Cambridge University Press, 2006. – 327 p.
35.Matsusita, S. Sur la puissance des orders dans un groupe libre / S. Matsusita. [text] – Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. – A, 56, 1953. – P. 15-16.
36. Novoa, L. G. Independance of a certain axiomatic system / L.G. Novoa. [text] – Proc. Amer. Math. Soc., 1969. – 22. – P. 470.
37.Novoa, L. G. Order characterization of the complex field / L.G. Novoa. [text]. – Can. Math. Bull., 1978. – 21. – No3. – P. 313-318.
38.Novoa, L.G. On *n*-ordered sets and order completeness / L.G. Novoa. [text] – Pacific J. Math., 1965. – 15. – No4. – P. 1337-1345.
39.Novoa, L.G. Ten axioms for three-dimensional Euclidean geometry /L.G. Novoa. [text]. – Proc. Amer. Math. Soc., 1968. – 19. – P. 146-152.
40.Rieger, L.S. On the ordered and cyclically ordered groups /L.S. Rieger. – Věstník Král. České Spol. Nauk, 1946, No. 6. – P. 1-31.
41.Riesz, F. Über mehrfache Ordnungstypen /F. Riesz [text]. – Math. Ann., 1905. – 61. – S. 406-421.
42.Schwarz, H.G. Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen /H.G. Schwarz [text]. – Halle, 1888. – 61 s.
43.Sperner, E. Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie / E. Sperner [text]. – Arch. Math., 1948. – 1. – S. 9-12.
44.Sperner, E. Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie /E. Sperner [text]. – Arch. Math., 1949. – 121. – S. 107-130.
45.Swierczkowski, S. On cyclically ordered groups / S. Swierczkowski [text] – Fund. Math., 1953. – 47. – P.161-167.
46.Tarski, A., McKinsey, J.C. C. A Decision Method for elementary Algebra and Geometry / A. Tarski, J.C. McKinsey [text]. – 2-ed. – Berfkeley; Los Angeles, 1948. – 63 p.
47.Wagner, K.Über nicht-archimedische Metrisierbarkeit in *n*-fach geordneter Mengen / K. Wagner [text]. – Maath. Ann., 1958. – 134. – No 1. – S. 33-40.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Тоболкин, А.А. Двумерный порядок на прямом произведении групп /А.А. Тоболкин [Текст] //Общенаучный периодический журнал "Вестник Томского государственного университета". – №297. – апрель, 2007 г. – С.159-160. – 0,25 п.л. (Поступила в научную редакцию «Вестника ТГУ» 01.12.2006 г., принята к печати 08.12.2006 г. Входит в перечень ведущих рецензируемых научных журналов ВАК, 2001-2005 гг.; см.: письмо ВАК от 30.11.2006 г.).
2. Пестов, Г.Г., Тоболкин, А.А. k-плоскости в n-мерно упорядоченных группах /Г.Г. Пестов, А.А. Тоболкин [Текст] //Общенаучный периодический журнал «Вестник Томского государственного университета». – №301. – август, 2007. – С.92-93. – 0,13 п.л. (авторский вклад – 50%)
3. Пестов, Г.Г., Тоболкин, А.А. К геометрии n-упорядоченных групп /Г.Г. Пестов, А.А. Тоболкин [Текст] // Общенаучный периодический журнал «Вестник Томского государственного университета». – Математика и механика. – №1. – 2007. – С.46-49. – 0,5 п.л. (авторский вклад – 50%)
4. Тоболкин, А.А. Двумерный порядок на прямом произведении групп /А.А. Тоболкин [Текст] //Научная конференция молодых ученых, аспирантов и студентов ММФ, посвященная трехсотлетию со дня рождения Леонарда Эйлера – Томск: ТГУ, 2007 – С. 133-134. – 0,13 п.л.
5. Тоболкин, А.А. К теории n-мерно упорядоченных групп /А.А. Тоболкин [Текст] //Научный потенциал студенчества – будущему России: Материалы Всероссийской научной студенческой конференции. – Ставрополь: СевКавГТУ, 2006. – С.59-61. – 0,18 п.л.
6. Тоболкин, А.А. Об n-упорядоченных группах /А.А. Тоболкин [Текст] //Материалы X Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Наука и образование" – Томск: Изд-во ТГПУ, 2006. – Т.1. – Ч.2. – С 107-113. – 0,43 п.л.
7. Тоболкин, А.А. Теорема о мультипликативной группе кватернионов /А.А. Тоболкин [Текст] //Сборник материалов заочной Всероссийской научно-практической конференции "Актуальные проблемы математики и методика ее преподавания". – Томск: Изд-во ТГПУ, 2007. – С. 21-32. – 0,75 п.л.
8. Тоболкин, А.А. Теоремы об n-упорядоченных группах /А.А. Тоболкин [Текст] //Всероссийская конференция по математике и механике, посвящённая 130-летию Томского государственного университета и 60-летию механико-математического факультета: Сборник тезисов. 22-25 сентября 2008 г., г.Томск – Томск: Томский государственный университет, 2008 г. – С.64. – 0,06 п.л.

Издательство Томского ЦНТИ. Лицензия ИД №05060 от 14.06.2001 г.
Подписано в печать 08.08.2009 г. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная №1.
Гарнитура Таймс. П.л. 1,0. Заказ № 730. Тираж 100 экз.
Отпечатано в Томском ЦНТИ. Лицензия ПД № 12-0084 от 16.04.2001 г.
Россия, 634021, г.Томск, пр.Фрунзе, 115/3. Тел.: (3822) 263169.