На правах рукописи

КОРОТКИЙ Михаил Александрович

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА С НЕГЛАДКИМИ СТАБИЛИЗАТОРАМИ

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2009

На правах рукописи

[signature]

КОРОТКИЙ Михаил Александрович

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА С НЕГЛАДКИМИ СТАБИЛИЗАТОРАМИ

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2009

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Уральский государственный университет им. А.М.Горького» на кафедре вычислительной математики

Научный руководитель: член-корреспондент РАН, профессор Васин Владимир Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Максимов Вячеслав Иванович

доктор физико-математических наук, профессор Ягола Анатолий Григорьевич

Ведущая организация: Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, г. Новосибирск

Защита диссертации состоится 12 ноября 2009 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.04 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Институте математики и механики УрО РАН по адресу: 620219, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан "1" октября 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
ст. н. с. В. Д. Скарин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Понятие корректности задачи математической физики было введено Ж.Адамаром [1] в начале прошлого столетия. Им было высказано мнение о том, что корректная постановка задачи является непременным условием, которому должна удовлетворять всякая математическая модель, соответствующая физической реальности. Эта точка зрения не подвергалась сомнению многие годы. Корректные задачи хороши тем, что классическая вычислительная математика позволяет решать такие задачи традиционными методами. При этом зачастую удается ответить на вопрос о сходимости предложенного алгоритма и оценке возникающей погрешности. Конечно, в каждой конкретной задаче имеются определенные трудности реализации алгоритма на компьютере, учете погрешностей округления, представления данных и результатов вычислений и т.д. Но эти проблемы обычно успешно решаются, особенно если учесть, что технические возможности современных компьютеров расширяются очень быстро. Однако часто имеющаяся информация позволяет построить лишь такую математическую модель, для которой нет теорем существования и единственности решения в естественных функциональных пространствах и, самое главное, нет устойчивости решения по входным данным задачи. Для такой модели нельзя получить регулярные вычислительные алгоритмы с помощью традиционных методов.

В 1943 году появилась работа А.Н.Тихонова [2] , в которой впервые была указана практическая важность неустойчивых по входным данным (некорректно поставленных) задач и принципиальная возможность их успешного решения в условиях принадлежности точного решения компактному множеству. В середине 50-х годов и, особенно интенсивно, в начале 60-х годов прошлого столетия началось систематическое изучение некорректных задач. Образовалось новое направление в математике, лежащее на стыке функционального анализа и вычислительной математики, которое затем оформилось в самостоятельную область науки — теорию некорректных задач. Основопологающие подходы для теории некорректных задач связаны с именами А.Н.Тихонова, В.К.Иванова, М.М.Лаврентьева.

В первой отечественной монографии по некорректным задачам М.М.Лаврентьевым[3] было введено понятие корректности по Тихонову задачи математической физики, на основе которого М.М.Лаврентьевым, его учениками и последователями, получены глубокие результаты по решению широкого спектра некорректных в классическом смысле задач, таких, например, как задачи аналитического продолжения, обратные задачи для дифференциальных уравнений, задачи интегральной геомет-

[1] *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука. 1978. Первое издание этой книги на английском языке вышло в 1932 г. Многие работы Ж.Адамара, в которых обсуждалось понятие корректности задачи, относятся непосредственно к началу века.

[2] *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. 1943. Т. 39. № 4. С. 195–198.

[3] *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР. 1962.

рии и многие другие. Многие результаты в этой области отражены в монографии М.М.Лаврентьева, В.Г.Романова, С.П.Шишатского [4]. Там же приведена обширная библиография по данному вопросу.

С понятием корректности по Тихонову тесно связано понятие квазирешения, введенное в 1962-1963 годах В.К.Ивановым в работах [5], [6] и обобщающее понятие обычного решения операторного уравнения

$$Au = f$$

на случай, когда оно неразрешимо для заданной пары метрических пространств $U \ni u$ и $F \ni f$. Это обобщение оказалось весьма плодотворным и индуцировало целое направление в теории некорректных задач. Для линейных задач оно представлено в монографиях А.Н.Тихонова, В.Я.Арсенина [7] и В.К.Иванова, В.В.Васина, В.П.Тананы [8].

В 1963 году А.Н.Тихоновым в работах [9], [10] было сформулировано понятие регуляризирующего алгоритма (регуляризирущего оператора, регуляризатора) для некорректно поставленной задачи как однопараметрического семейства операторов, специальным образом аппроксимирующего обратный оператор и обеспечивающего при согласовании параметра с уровнем погрешности исходных данных устойчивое восстановление искомого решения. Понятие регуляризирующего алгоритма оказалось весьма эффективным.

В упомянутых работах А.Н.Тихоновым предложен универсальный способ построения регуляризирующего алгоритма (метод регуляризации), основанный на введении так называемого сглаживающего функционала. Универсальность метода А.Н.Тихонова заключается в том, что он применим к существенно некорректным задачам, у которых класс возможных решений не является компактом. К настоящему времени созданы общие принципы конструирования регуляризирующих алгоритмов для широких классов некорректных задач.

Понятие регуляризирующего алгоритма имело революционное значение в вычислительной математике и фактически послужило основой для развития новой математической дисциплины. Большой вклад в эту область внесли А.Л.Агеев, Я.И.Альбер, В.Я.Арсенин, А.Б.Бакушинский, Г.М.Вайникко, Ф.П.Васильев, В.В.Васин, А.Ю.Веретенников, В.А.Винокуров, Ю.Л.Гапоненко, А.М.Денисов, С.И.Кабанихин, А.С.Леонов, О.А.Лисковец, И.В.Мельникова, Л.Д.Менихес,

---

[4] *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука. 1980.

[5] *Иванов В.К.* О линейных некорректных задачах // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 2. С. 270–272.

[6] *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // Матем. сборник. 1963. Т. 61. № 2. С. 211–223.

[7] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979.

[8] *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978.

[9] *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.

[10] *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 49-52.

В.А.Морозов, В.Г.Романов, В.Н.Страхов, В.П.Танана, А.Г.Ягола и многие другие.

Широкий круг некорректных задач составляют обратные задачи, в частности, обратные задачи, модели которых описываются дифференциальными уравнениями, в том числе, динамическими системами. Под обратной задачей для динамической системы принято понимать задачу восстановления характеристик динамической системы (коэффициентов, параметров, входящих в дифференциальные уравнения, начальные или граничные условия) по информации о пространственных координатах, скорости или других количественных характеристиках траектории (решения, движения) этой системы, поступающей в процессе специально организованных наблюдений (измерений). Такие задачи являются типичными для теории и практики обработки и интерпретации результатов наблюдений и возникают при изучении тех характеристик объектов, которые недоступны или труднодоступны для прямого измерения и о которых приходится судить по измеренным в результате эксперимента их косвенным проявлениям. В качестве примеров можно привести медицинские задачи по изучению внутренних органов человека, задачи по неразрушающему контролю за качеством изделий, задачи по определению физических характеристик тел по их взаимодействию с подходящими физическими полями и т.д. Хотя отдельные классы обратных задач давно рассматриваются в науке и практике, широкое исследование обратных задач началось сравнительно недавно, что связано с прогрессом в соответствующих областях знаний. К настоящему времени теория обратных задач стала самостоятельной областью математики, в ней сформировались различные направления, обусловленные как различными сферами ее приложений, так и многообразием математических постановок обратных задач, ей посвящена обширная литература (см., например, [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24]).

Существенную роль в становлении теории обратных задач сыграло

[11] *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1988.

[12] *Аниконов Ю.Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука. 1978.

[13] *Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент–Клэр Ч.(мл.).* Некоторые обратные задачи теплопроводности. М.: Мир. 1989.

[14] *Бухгейм А.Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука. 1983.

[15] *Галиуллин А.С.* Обратные задачи динамики. М.: Наука. 1986.

[16] *Гласко В.Б.* Обратные задачи математической физики. М.: Изд-во МГУ. 1984.

[17] *Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ. 1989.

[18] *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ. 1994.

[19] *Искендеров А.Д.* Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. № 5. С. 890–898.

[20] *Кабанихин С.И.* Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уранвений. Новосибирск: Наука. 1988.

[21] *Коздоба Л.А., Круковский П.Г.* Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наукова думка. 1982.

[22] *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука. 1988.

[23] *Погорелов А.Г.* Обратные задачи нестационарной химической кинетики. М.: Наука. 1988.

[24] *Прилепко А.И.* Внутренние обратные задачи теории потенциала // ДАН СССР. 1968. Т. 182. № 3. С. 503–505.

интенсивное развитие теории некорректных задач. Дело в том, что измерения результатов наблюдений и экспериментов (входных данных) сопровождаются неизбежными ошибками, поэтому искомые решения обратных задач также будут определяться с погрешностью. Оказывается, что в большинстве своем обратные задачи естествознания неустойчивы, т.е. сколь угодно малым погрешностям изменений входных данных могут соответствовать большие погрешности в определении искомого решения обратной задачи. Это обстоятельство затрудняет применение обычных методов для поиска решения обратной задачи и требует привлечения для этих целей специальных методов, методов регуляризации, разрабатываемых в теории некорректных задач.

В большинстве исследований в области обратных задач и предлагаемых методах их решения процесс решения задачи носит статический характер, т.е. при таком решении восстановление неизвестных характеристик осуществляется по завершении наблюдений по всей совокупности поступивших измерений. Иногда это обстоятельство приводит к некоторым затруднениям из-за большого объема информации, из-за ограниченного объема памяти и конечного быстродействия имеющихся вычислительных средств.

В 1983 году вышли основополагающие работы Ю.С.Осипова и А.В.Кряжимского [25], [26], в которых для решения обратных задач динамики предлагался новый метод, получивший затем название метода динамической регуляризации. Эти работы инициировали многочисленные исследования по динамическому методу решения обратных задач. Метод получил дальнейшее всестороннее развитие в школе Ю.С.Осипова и за ее пределами [27], [28], [29], [30], [31]. С идейной точки зрения метод динамической регуляризации основывается на подходах теории позиционных дифференциальных игр, развитой Н.Н.Красовским и его школой [32], [33], [34], [35], [36], [37], и подходах теории некорректных задач. Этот метод целесообразно

---

[25] *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.* О динамическом решении операторных уравнений // ДАН СССР. 1983. Т. 269. №3. С. 552-655.

[26] *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. №2. С. 51-60.

[27] *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. L.: Gordon and Breach, 1995.

[28] *Максимов В.И.* Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2000.

[29] *Осипов Ю.С., Короткий А.И.* Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. №2. С. 154-164.

[30] *Ким А.В., Короткий А.И., Осипов Ю.С.* Обратные задачи динамики параболических систем // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54. №5. С. 754-759.

[31] *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ. 1999.

[32] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой: Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука. 1985.

[33] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.

[34] *Осипов Ю.С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // ДАН СССР. 1975. Т. 223. №6. С. 1314-1317.

[35] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука. 1977.

[36] *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981.

[37] *Ушаков В.Н.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36. № 1. С. 15-23.

применять в тех случаях, когда требуется восстановить неизвестные характеристики объекта в динамике, синхронно с его развитием или, как принято говорить в инженерной практике, в режиме реального времени. При этом предполагается, что информация об измерениях поступает в заданные дискретные моменты времени по ходу процесса и на каждом шаге метода для определения текущего приближения неизвестной характеристики объекта разрешено использовать лишь те измерения, которые уже имеются в распоряжении наблюдателя к данному моменту времени без привлечения тех измерений, которые поступят в последующие моменты времени. С подобными обратными задачами приходится иметь дело, например, в механике управляемого полета, при создании технологических и производственных процессов, в проблемах оперативной обработки информации, в проблемах обработки больших объемов информации.

Метод динамической регуляризации может быть применим и в тех ситуациях, когда уже закончены все измерения и известна вся информация о проведенных наблюдениях, но обработка этой информации традиционными (статическими) методами регуляризации затруднительна из-за большого объема информации или недостаточности вычислительных средств. Тогда имеет смысл накопленную информацию об измерениях обрабатывать отдельными порциями, опираясь на идеи метода динамической регуляризации. Таким образом, этот метод может быть использован и как метод декомпозиции, заключающийся в сведении исходной задачи большой размерности к последовательности задач меньшей размерности.

В данной диссертационной работе изучаются некорректные задачи (операторные уравнения первого рода, обратные задачи реконструкции управлений в динамических системах) и способы их регуляризации методом Тихонова. При этом регуляризация проводится с использованием нетрадиционных стабилизаторов, включающих классическую или обобщенную вариацию. Использование таких стабилизаторов имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционными стабилизаторами, поскольку позволяет более качественно восстанавливать негладкие (разрывные) решения. К числу недостатков использования таких стабилизаторов можно отнести повышенную вычислительную трудоемкость.

Из сказанного выше следует, что тема диссертации актуальна.

Цель работы. Цель работы состоит в обосновании метода регуляризации Тихонова для рассматриваемых классов некорректных задач (операторных уравнений первого рода, обратных задач реконструкции управлений в динамических системах), доказательстве теорем о разрешимости регуляризированных задач, обосновании сходимости (в том числе кусочно-равномерной) регуляризованных решений к искомому решению, а также в разработке соответствующих вычислительных алгоритмов и проведении вычислительных экспериментов.

Методы исследования. Методы исследования опираются на концепции и результаты теории некорректных задач, функционального анализа и вычислительной математики, теории программного и позиционного управления. Систематически используются понятия и методы теории функций и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, численных методов анализа, теории экстремальных задач и теории управления. Для проведения вычислительных экспериментов применялись современные технологии программирования.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми. Они обобщают и дополняют работы отечественных и зарубежных исследователей в данной проблематике. Достоверность полученных результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами, соответствием полученных теоретических результатов результатам компьютерного моделирования, использованием общепризнанных апробированных математических методов и согласованностью результатов, полученных различными способами.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа имеет теоретическую и практическую значимость. В работе построены и обоснованы новые классы регулярных методов решения некорректных (неустойчивых) задач. Практическая значимость работы обусловлена тем, что предложенные в ней методы и алгоритмы могут быть использованы при решении прикладных задач.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на 38-ой Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 29 января – 2 февраля 2007 г.); 13-ой Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения" (Екатеринбург, 26 февраля – 2 марта 2007 г.); 4-ой Международной конференции "Обратные задачи: модели и имитация" (Турция, Fethiye, 26 – 30 мая 2008 г.); Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Екатеринбург, 1 – 6 сентября 2008 г.); Международной молодежной научной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"(Новосибирск, 10 – 20 августа 2009 г.); Международной конференции "Актуальные проблемы теории устойчивости и управления"(APSCT'2009) (Россия, Екатеринбург, 21-26 сентября 2009); научных семинарах кафедры вычислительной математики Уральского госуниверситета; научных семинарах отдела некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-8] (см. список в конце автореферата). Работы [1,2] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. В совместных работах [4,5,6] научному руководителю В.В.Васину принадлежат постановки задач, общее руководство исследованиями по теме диссертации и идеи доказательств основных утверждений, а диссертанту — доказательства основных теорем, разработка численных алгоритмов и программных средств для проведения численного моделирования.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа содержит список обозначений, введение, три главы и список литературы. Объем работы — 132 страницы. Библиография — 120 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы исследований, обсуждается история вопроса и показывается место проводимых исследований среди других подобных исследований, формулируется цель диссертационной работы и пути её достижения, кратко описывается содержание диссертации, отмечены новизна и практическое значение работы.

В первой главе рассматривается операторное уравнение

$$Au = f \tag{1}$$

с линейным ограниченным оператором $A : L_p[a,b] \to L_p[a,b]$, $1 \leqslant p < \infty$. Обратимость A или непрерывность обратного к A оператора не предполагаются. Для простоты считается, что задача (1) разрешима.

Для уравнения (1) исследуется метод регуляризации Тихонова

$$\min \left\{ \|Au - f\|_{L_p}^2 + \alpha\, \Omega(u) : \ u \in U \right\}, \quad \alpha = const > 0\,, \tag{2}$$

со стабилизирующими функционалами двух видов

$$\Omega(u) = \Omega_1(u) = \|u\|_{L_p}^2 + G_a^b(u) \quad (\ 1 < p < \infty\ )\,,$$

$$\Omega(u) = \Omega_2(u) = \|u\|_{L_\infty} + G_a^b(u) \quad (\ p = 1\ )\,,$$

где $G_a^b(u)$ — обобщенная вариация функции u, определяемая формулой

$$G_a^b(u) \ = \ \sup \left\{ \int_a^b u(x)v'(x)dx \ : \ v \in C_0^1[a,b]\,, \ \ |v(x)| \leqslant 1 \right\};$$

$$\|u\|_{L_\infty} = \mathrm{vraimax}\,|\,u\,| = \inf_{E \subset [a,b]} \left\{ \sup_{[a,b]\setminus E} |u(x)| \ : \ mes(E) = 0 \right\};$$

$$U = \{\ u \in D(A) \ : \ \ G_a^b(u) < \infty\ \}\,.$$

К настоящему времени в вариационных методах регуляризации предложено несколько классов стабилизирующих функционалов, которые неплохо зарекомендовали себя для нахождения как гладких, так и негладких решений некорректных задач. Так в случае функций одной переменной наибольшее распространение получили стабилизаторы, содержащие классическую вариацию в совокупности с какой-нибудь строго выпуклой нормой, например, нормой пространства $L_p[a,b]$, $1 < p < \infty$ (см., например, работы [38], [39] и библиографию в них). На этом пути удается получить сходимость регуляризованных решений к искомому в пространствах $L_p[a,b]$, поточечную сходимость, сходимость вариаций и равномерную сходимость на отрезках, не содержащих точек разрыва иско-

[38] *Агеев А.Л.* Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1980. Т. 20. № 4. С. 819–836.

[39] *Леонов А.С.* Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1982. Т. 22. № 3. С. 516–531.

мого решения (кусочно-равномерную сходимость). В работах [40], [41] построен класс стабилизаторов (с более сильным регуляризирующим эффектом), которые гарантируют сходимость в нерефлексивном пространстве W_1^n, что влечет сходимость в пространстве вариаций функций и их производных. В многомерном случае в серии работ [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48] стабилизирующий функционал строился в виде суммы обобщенной вариации [49] и нормы пространства L_p, $1 \leq p < \infty$. На этом пути в многомерном случае удается получить сходимость в L_p регуляризованных по Тихонову решений и сходимость обобщенных вариаций. С помощью аналога вариации Витали для многомерного случая в работах [50], [51] установлена кусочно-равномерная сходимость метода квазирешений на замкнутых подмножествах непрерывности искомого решения, а в двумерном случае предложен численный алгоритм.

В первой главе диссертации для одномерного случая эти результаты обобщаются и усиливаются. Для тех же стабилизаторов устанавливаются поточечная сходимость, сходимость в L_p, сходимость обобщенных вариаций и кусочно-равномерная сходимость. В отличие от упомянутых работ исследуется также вариант стабилизатора с нормой пространства L_∞. Для полноты обзора заметим, что в работах [8], [9] предложены два новых параметрических класса стабилизаторов, основанных на использовании нормы Липшица и нормы соболевского пространства с дробными производными. Для первого класса дается обоснование равномерной сходимости регуляризованных аппроксимаций для непрерывного решения исходной задачи, которое в общем случае может быть недифференцируемым. Для второго класса стабилизаторов удается установить сходимость в сильной нормированной топологии соболевского пространства, что может оказаться целесообразным для приближения как непрерывных, так и разрывных решений в зависимости от выбора показателя дифференцируемости.

---

[40] *Леонов А.С.* Об H-свойстве функционалов в пространстве Соболева // Матем. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 3. С. 378–394.

[41] *Леонов А.С.* О сходимости по полным вариациям регуляризующих алгоритмов решения некорректно поставленных задач // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2007. Т. 47. № 5. С. 767–783.

[42] *Acar R., Vogel C.R.* Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems // Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 1217–1229.

[43] *Chavent G., Kunish K.* Regularization of linear least squares problems by total bounded variation control // Optimization and Calculus of variation. 1997. Vol. 2. P. 359–376.

[44] *Vogel C.R.* Computation methods for inverse problems // Philadelphia: SIAM. 2002.

[45] *Васин В.В.* Регуляризация и дискретная аппроксимация некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Доклады РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 11–14.

[46] *Vasin V.V.* Regularization and iterativ approximation for linear ill-posed problems in the space of function of bounded variation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Supplement 1. 2002. P. 225–239.

[47] *Васин В.В.* Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // Доклады РАН. 2005. Т. 402. № 5. С. 586–589.

[48] *Васин В.В.* Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 64–77.

[49] *Giusti E.* Minimal surfaces and functions of bounded variations. Basel: Birkhauser. 1984.

[50] *Leonov A.S.* Functions of several variables with bounded variations in ill-posed problems // Comp. Maths. Math. Phys. 1996. Vol. 36. №. 9. P. 1193–1203.

[51] *Леонов А.С.* Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями: численный анализ // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1999. Т. 39. № 12. С. 1939–1944.

Обоснования метода регуляризации Тихонова для стабилизаторов Ω_1 и Ω_2 существенно различны. Это связано с тем, что пространство $L_\infty[a,b]$ не является рефлексивным, а норма $\|\cdot\|_{L_\infty}$ в этом пространстве не является равномерно выпуклой. В первом и втором параграфе первой главы доказываются теоремы о разрешимости регуляризированных задач и сходимости регуляризованных решений к искомому решению в L_p, а также сходимость обобщенных вариаций. Установлена связь между обобщенной и классической вариациями для функций одной переменной. С помощью найденной связи дополнительно доказаны поточечная сходимость регуляризованных решений к искомому точному решению и кусочно-равномерная сходимость.

Приведем формулировки основных результатов.

Теорема 1.2.4. *Пусть A — линейный ограниченный оператор $L_p[a,b] \to L_p[a,b]$, $1 < p < \infty$. Пусть правая часть уравнения (1) задана своим приближением $f_\delta : \|f - f_\delta\|_{L_p} \leqslant \delta$. Тогда для любого $\alpha > 0$ экстремальная задача (2)*

$$\Phi^* = \min\left\{ \ \|Au - f_\delta\|^2_{L_p} + \alpha\, \Omega_1(u) \ : \ u \in U \ \right\}$$

имеет единственное решение $u^\alpha \in U$, причем при

$$\alpha = \alpha(\delta) \to 0 \ , \quad \delta^2/\alpha(\delta) \to 0$$

имеют место следующие сходимости:

1) $u^{\alpha(\delta)} \to \widehat{u}$ в $L_p[a,b]$;

2) $u^{\alpha(\delta)}(x) \to \widehat{u}(x)$ $\forall x \in [a,b]$;

3) $\lim\limits_{\delta\to 0} G^b_a(u^{\alpha(\delta)}) = G^b_a(\widehat{u})$;

4) $u^{\alpha(\delta)} \to \widehat{u}$ равномерно на любом отрезке $[a',b'] \subset [a,b]$, не содержащем точек разрыва функции $\widehat{u}$;

где $\widehat{u} \in U$ есть Ω_1-нормальное решение исходной задачи (1).

Теорема 1.3.1. *Пусть A — линейный ограниченный оператор $L_1[a,b] \to L_1[a,b]$. Пусть операторное уравнение (1) однозначно разрешимо на $U = \{u \in L_\infty[a,b] \ : \ G^b_a(u) < \infty\}$ и $\widehat{u}$ есть решение этого уравнения. Пусть правая часть уравнения задана своим приближением $f_\delta : \ \|f - f_\delta\|_{L_1} \leqslant \delta$. Тогда для любого $\alpha > 0$ экстремальная задача (2)*

$$\Phi^* = \min\left\{ \ \|Au - f_\delta\|_{L_1} + \alpha\, \Omega_2(u) \ : \ u \in U \ \right\}$$

имеет решение $u^\alpha \in U$ и при выполнении согласований

$$\alpha = \alpha(\delta) \to 0 \ , \quad \delta/\alpha(\delta) \to 0$$

имеют место следующие сходимости:

1) $u^{\alpha(\delta)}(x) \to \widehat{u}(x)$ $\forall\, x \in [a,b]$;

2) $u^{\alpha(\delta)} \to \widehat{u}$ в $L_1[a,b]$;

3) $\lim\limits_{\delta\to 0} G_a^b(u^{\alpha(\delta)}) = G_a^b(\widehat{u})$;

4) $u^{\alpha(\delta)} \to \widehat{u}$ *равномерно на любом отрезке* $[a',b'] \subset [a,b]$, *не содержащем точек разрыва функции* $\widehat{u}$.

В качестве иллюстрации метода приведены результаты численных экспериментов с интегральным уравнением Фредгольма первого рода. Решение регуляризованной задачи минимизации с негладким стабилизатором потребовало использования оригинальной процедуры реализации субградиентного метода со сглаживанием аргумента, но без привлечения какого-либо дополнительного сглаживания целевого функционала. Результаты вычислительных экспериментов показали, что при использовании рассматриваемых стабилизаторов тонкая структура искомого решения (разрывы, пики, изломы) в значительной степени может быть восстановлена.

Численные эксперименты проводились для интегрального уравнения

$$Au \equiv \int_{-1}^{1} \frac{h}{(t-s)^2+h^2}\, u(s)ds = y(t)\ , \qquad (\text{ в расчетах } \ h=1)\ ,$$

которое встречается в задачах спектроскопии, при решении обратных задач теории потенциала, в частности, описывает линеаризованный вариант обратной задачи гравиметрии с поверхностью раздела $u = u(s)$ на глубине $z = -h$ и измеряемой аномалией силы тяжести $y = y(t)$ на поверхности $z = 0$ (см. [7]).

В качестве модельного решения были выбраны три функции:
$u_1(s) = (1-s^2)^2$ (дифференцируемая функция);
$u_2(s) = 1 - |s|$ (непрерывная, но недифференцируемая функция);
$u_3(s) = 1/4$, если $s \in [-1,0]$, $u_3(s) = 3/4$, если $s \in [0,1]$ (разрывная функция).

Во всех трех случаях в субградиентном методе минимизации целевого функционала стартовой точкой служила функция $u^0(t) \equiv 0$, которую следует отнести к достаточно далекому от модельных решений начальному приближению как по норме ($||u_1||_{L_2} \approx 1.09$, $||u_2||_{L_2} \approx 0.82$, $||u_3||_{L_2} \approx 0.79$), так и по качественному поведению. Отметим, что в выполненных численных экспериментах дополнительно не моделировались ошибки в исходных данных (ядре и правой части), т.е. присутствовали только ошибки аппроксимации и округления. Численные аппроксимации модельных решений после $I = 10^5$ итераций были получены с относительными квадратичными погрешностями $\Delta_1 = 0.00111$, $\Delta_2 = 0.00241$, $\Delta_3 = 0.00061$ соответственно. Столь большое число итераций $I = 10^5$ не диктовалось необходимостью, а было выбрано сознательно, чтобы убедиться в устойчивости счета. Ниже приводятся результаты расчетов со стабилизатора Ω_1, результаты со стабилизатором Ω_2 мало чем отличаются от первых и здесь не приводятся.

На рисунках 1–3 представлены результаты восстановления модельных решений. Число точек разбиения при аппроксимации квадратуры $N = 16$, параметры регуляризации равны соответственно $\alpha = 10^{-7}$, $\alpha = 10^{-6}$, $\alpha = 10^{-5}$.

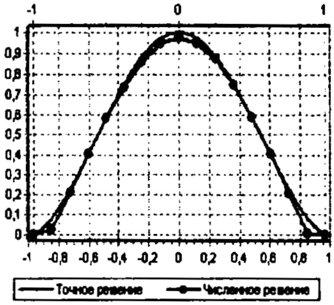

Рисунок 1.

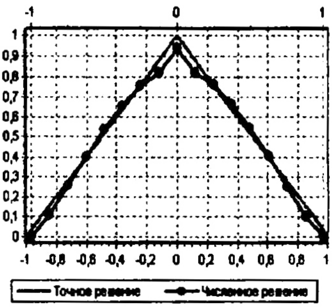

Рисунок 2.

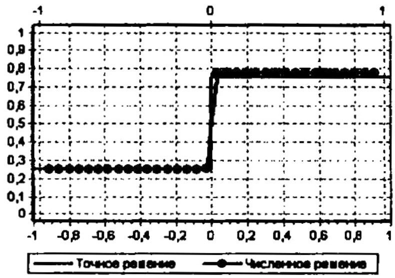

Рисунок 3.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию задачи о восстановлении (реконструкции, идентификации) априори неизвестных управлений (параметров), действующих в управляемой динамической системе

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t))=f_1(t,x(t))+f_2(t,x(t))u(t), \tag{3}$$
$$t\in T=[t_0,\vartheta],\ \ x(t_0)=x_0.$$

Управляющие воздействия $u = u(\cdot) \in U$ в динамической системе могут быть заранее неизвестны и должны быть определены по результатам наблюдений за объектом, в частности, по результатам приближенных измерений текущих фазовых положений системы $x(t)$, $t \in T$.

Хорошо известно, что рассматриваемая задача некорректна и ее решение требует привлечения методов регуляризации. Такие задачи восстановления для динамических систем изучались в разных постановках в теории управления, теории дифференциальных игр, теории оценивания и идентификации.

Для решения задачи предлагается использовать вариационный метод Тихонова, суть которого состоит в минимизации некоторого подходящего функционала невязки на множестве допустимых управлений. С точки зрения теории управления и теории обратных задач этот метод можно классифицировать как статический метод реконструкции. При решении задачи восстановления статическим методом исходной информацией для ее решения служат результаты приближенных измерений текущих фазовых положений системы, накопленные при наблюдении за движением динамической системы в течение заданного промежутка времени. Здесь восстановление осуществляется апостериорно по прошествии соответствующего промежутка времени наблюдения за движением системы по всей совокупности поступившей информации. Особенность статического подхода к рассматриваемой задаче состоит в том, что данные для расчета управляющих воздействий известны априори, алгоритм восстановления не учитывает возможного изменения этих данных в процессе расчета, сам процесс расчета не является, вообще говоря, разовым, и его можно при необходимости повторить. Для решения задачи привлекаются понятия и методы теории программного управления и теории некорректных задач.

Во второй главе показано, что при использовании стабилизаторов в виде суммы классической вариации и нормы пространства L_2 можно получить не только традиционную для данного класса задач сходимость в L_2 регуляризованных приближений к искомому управлению, но и сходимость в L_p , $1 \leqslant p < \infty$, поточечную сходимость, сходимость вариаций и кусочно-равномерную сходимость.

Приведем формулировку соответствующего результата.

Пусть допустимые текущие значения управляющего воздействия подчинены заданным геометрическим ограничениям $u(t) \in P$, $t \in T$, где P — выпуклое компактное множество из R^m. Множество допустимых управлений U представляет собой множество вектор-функций

$$U = \{\ u \in L_2(T; R^m) :\ u(t) \in P \ \text{ п.в. } \ t \in T\ \}\ .$$

Пусть за управляемой динамической системой и ее движением $x = x(t)$, $t \in T$, осуществляется наблюдение в течение промежутка времени T и в соответствующие текущие моменты времени $t \in T$ приближенно измеряются состояния системы $x(t)$, причем результаты этих измерений $y(t)$ удовлетворяют следующему условию точности измерений

$$\int_T \| x(t) - y(t) \|_n^2 \, dt \leqslant \delta^2 \ ,$$

где $\| \cdot \|_n$ — евклидова норма в R^n, δ — числовой параметр, характеризующий точность измерений, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$.

Задача восстановления состоит в том, чтобы по результатам $y = y(t)$, $t \in T$, приближенных измерений наблюдаемого движения системы $x = x(t)$, $t \in T$, приближенно определить (восстановить) ту реализацию $u = u(t)$, $t \in T$, управляющего воздействия на динамическую систему, которая отвечает (соответствует) результатам наблюдений. При этом результат $u_\delta = u_\delta(t)$, $t \in T$, восстановления искомого управляющего воздействия $u = u(t)$, $t \in T$, должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений

$$\int_T \|u_\delta(t) - u(t)\|_m^2 \, dt \to 0 \ , \quad \delta \to 0 \ .$$

Пусть функции $f_1 : T \times R^n \to R^n$ и $f_2 : T \times R^n \to R^{n\times m}$ непрерывны на множестве $T \times R^n$ и удовлетворяют на этом множестве условию подлинейного роста и локальному условию Липшица по переменной x

$$\| f_i(t,x) \| \leqslant C_i\,(1 + \| x \|_n)\ , \quad t \in T\,,\ x \in R^n\,,\ i = 1,2\,,$$

$$\| f_i(t,x_1) - f_i(t,x_2) \| \leqslant L_i(G)\, \| x_1 - x_2 \|_n\ , \quad t \in T\,,\ x \in G\,,\ i = 1,2\,.$$

Известно, что при указанных условиях для каждого элемента $u \in U$ существует единственное абсолютно непрерывное на промежутке T решение $x(\cdot) = x(\cdot;u) = x(t;u)$, $t \in T$, задачи Коши (3). Это решение иногда будем называть движением динамической системы (3), порожденным управлением $u \in U$.

Введем множество всех возможных движений системы (3), отвечающих всем возможным управлениям $X = \{x(\cdot) = x(\cdot;u) : u \in U\}$. Для каждого движения $x(\cdot) \in X$ введем множество всех допустимых управлений, отвечающих данному движению $U(x(\cdot)) = \{u \in U : x(\cdot) = x(\cdot;u)\}$ и множество всех возможных измерений этого движения $Y(x(\cdot),\delta) = \{y \in L_2(T;R^n) : \int_T \| x(t) - y(t) \|_n^2 dt \leqslant \delta^2\}$.

Искомый алгоритм решения обратной задачи отождествим с семейством отображений (методов)

$$D = \{\ D_\delta : 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0\ \}\ , \quad D_\delta : L_2(T;R^n) \to L_2(T;R^m)\ .$$

Исходную задачу теперь можно сформулировать так: требуется построить алгоритм $D = \{\, D_\delta : 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0 \}$, который на любом наблюдаемом движении $x(\cdot) \in X$ обладает регуляризирующим свойством

$$r_\delta(x(\cdot)) \to 0, \quad \delta \to 0\ ,$$

$$r_\delta(x(\cdot)) = \sup \{\, \rho\,[\, D_\delta(y), U(x(\cdot))\,] :\ y \in Y(x(\cdot),\delta)\,\}\ ,$$
$$\rho\,[\, D_\delta(y), U(x(\cdot))\,] = \min \{\, \| D_\delta(y) - v \|_{L_2(T;R^m)} :\ v \in U(x(\cdot))\,\}\ .$$

Обозначим через $W = \{u \in L_2(T;R^m) : V[u] < \infty\}$ банахово пространство с нормой $\|u\|_W = \|u\|_E + V[u]$, где $V[u]$ — полная вариация функции $u : T \ni t \to u(t) \in R^m$, определенная равенством

$$V[u] = \sup \{\, \sum_{i=1}^{l} \ \|u(t_i) - u(t_{i-1})\|_m\ : \sigma \in \Sigma\ \}\ ,$$

где Σ — множество всех конечных разбиений σ отрезка T точками $t_i \in T$, $i = 0, ..., l$, $\ t_0 < t_1 < ... < t_l = \vartheta$.

Укажем искомый алгоритм. Для любых $\delta \in [0,\delta_0]$, $y \in L_2(T;R^n)$ определим реализацию (значение) метода $D_\delta(y)$ по правилу

$$D_\delta(y) = v \in U_W :\ F_\alpha^*(y) \leqslant F_\alpha(y;v) \leqslant F_\alpha^*(y) + \varepsilon\ , \tag{4}$$

$$F_\alpha^*(y) = \min \{\, F_\alpha(y;v) :\ v \in U_W\,\}\ , \quad U_W = U \cap W\ , \tag{5}$$

$$F_\alpha = F_\alpha(y;v) = \int_T \| x(t;v) - y(t) \|_n^2 dt + \alpha\, \Omega(u)\ , \quad \Omega(u) = \| u \|^2_{L_2(T;R^m)} + V[\,u\,]\ ,$$

где ε — неотрицательный параметр, характеризующий точность решения экстремальной задачи (5), α — положительный параметр.

Теорема 2.2.1. *Пусть $U(x(\cdot)) \cap W \neq \emptyset$, тогда во множестве $U(x(\cdot))$ существует единственный Ω-нормальный элемент $\widehat{u}$. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования:*

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2)\,\alpha(\delta)^{-1} \to 0\ ,\ \varepsilon(\delta) \to 0\ ,\ \alpha(\delta) \to 0\ ,\quad \delta \to 0.$$

Тогда, алгоритм D, состоящий из методов (4), решает задачу восстановления, т.е. для любого наблюдаемого движения $x(\cdot) \in X$ при $\delta \to 0$ имеет место сходимость $r_\delta(x(\cdot)) \to 0$. Более того, каковы бы ни случились при этом реализации измерений $y_\delta \in Y(x(\cdot), \delta)$ для реализаций алгоритма $v_\delta = D_\delta(y_\delta)$ при $\delta \to 0$ имеют место следующие сходимости:

1) $v_\delta \to \widehat{u}$ сильно в $L_2(T; R^m)$;

2) $v_\delta \to \widehat{u}$ в R^m поточечно на T;

3) $V[v_\delta] \to V[\widehat{u}]$;

4) $v_\delta \to \widehat{u}$ в R^m кусочно-равномерно на T.

Для построения минимизирующих последовательностей целевого функционала используется аппроксимация допустимых управлений функциями из пространства Соболева $H = W_2^1(T)^m$ и обосновается метод проекции субградиента.

Рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу

$$F_\alpha^H(y) = \inf\{\, F_\alpha(y; v) :\ v \in U_H \,\}\ ,\quad U_H = U \cap H\ . \tag{6}$$

Теорема 2.3.1. *Пусть система (3) является линейной по управлению и фазовой переменной $f(t,x,u) = f_1(t)x + f_2(t)u + f_3(t)$ и в итерационном процессе метода проекции субградиента*

$$u_{k+1} = Pr(u_k - \beta_k v_k)\ ,\quad \beta_k > 0\ ,\quad v_k \in \nabla F_\alpha(y; u_k)\ ,\quad k = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

u_0 — произвольное начальное приближение из U_H, $Pr(z)$ — проекция точки $z \in H$ на множество U_H, v_k — произвольный субградиент из субдифференциала $\nabla F_\alpha(y; u_k)$, параметры метода $\beta_k > 0$ удовлетворяют условию:

$$\beta_k = 1\ ,\quad \text{если}\quad v_k = 0\ ;\quad \beta_k = \gamma_k / \|v_k\|_H\ ,\quad \text{если}\quad v_k \neq 0\ ;$$

$$\gamma_k > 0\ ,\quad \gamma_k \to 0\ ,\quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty\ .$$

Тогда 1) множество решений $U_\alpha^*(y)$ задачи (5) состоит из одного элемента $u_\alpha^* \in U_W$; 2) $F_\alpha^H(y) = F_\alpha^*(y)$; 3) $F_\alpha(y; \tilde{u}_k) \to F_\alpha^H(y)$, где $F_\alpha(y; \tilde{u}_k) = \sigma_k$,

$$\sigma_k = \min\{\, F_\alpha(y; u_i) :\ i \in \overline{0, k}\,\}\ ;$$

4) минимизирующая последовательность $\{\tilde{u}_k\} \subset U_H$ *задачи (6) сходится сильно в* $L_2(T; R^m)$ *к элементу* u_α^* *; 5)* $V[\tilde{u}_k] \to V[u_\alpha^*]$.

В последнем параграфе главы приведены результаты численного моделирования. Численное моделирование потребовало реализации метода проекции субградиента в дискретном варианте без привлечения дополнительного сглаживания целевого функционала. Проведенная серия вычислительных экспериментов показала, что тонкая структура управлений может быть в значительной степени восстановлена.

Моделировалась задача восстановления управления в нелинейной динамической системе

$$\dot{x}(t) = u(t) \sin x(t) \ , \quad t \in T = [t_0, \vartheta] \ , \quad x(t_0) = x_0 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ . \qquad (7)$$

Множество геометрических ограничений на управление P представляло собой отрезок $P = [\mu_1 \, , \mu_2]$, а приближенное измерение состояний динамической системы моделировалось соотношением $y(t) = x(t) + \delta \ \sin(\omega t)$, $t \in T$, $\omega = const$.

Движение динамической системы (7) аппроксимировалось методом Эйлера на равномерной сетке отрезка T, $x_{k+1} = x_k + u_k \ h \ \sin(x_k)$, $k = 0, ..., m-1$.

Численные эксперименты проводились при следующих параметрах задачи: $t_0 = 0$, $\theta = 1$, $x_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $\omega = 1$.

В качестве восстанавливаемых управлений были выбраны три функции:

1) $u = u_{(1)}(t) = 1 + \sin 2\pi t$ (гладкое управление);

2) $u = u_{(2)}(t) = 1 - |2x - 1|$ (непрерывное кусочно-гладкое управление);

3) $u = u_{(3)}(t) = \begin{cases} 0.5, & \text{если } \ t \in [0, 1/4] \ \text{ и } \ t \in [3/4, 1], \\ 1, & \text{если } \ t \in [1/4, 3/4], \quad \text{(разрывное управление)} \ . \end{cases}$

Во всех трех случаях начальной функцией в методе проекции субградиента служила функция $u^{(0)}(t) \equiv 0$. Она достаточно далеко отстоит от модельных управлений как по норме, так и по качественному поведению

$$\|u_{(1)}\|_{L_2(T)} = (3/2)^{1/2} \ , \quad \|u_{(2)}\|_{L_2(T)} = (1/3)^{1/2} \ , \quad \|u_{(3)}\|_{L_2(T)} = (0.625)^{1/2} \ .$$

Зависимость параметра $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ точности минимизации в дискретизированном целевом функционале от погрешности δ напрямую не контролировалась, точность ее решения определялась выбором количества итераций N в методе проекции субградиента и величиной шага h, характеризующего степень дискретизации задачи. Ниже приведены результаты расчетов при следующих значениях параметров: $h = 0.025$, $N = 10^4$, $\alpha = 10^{-6}$. Параметр δ принимал два значения 0.2 и 0.05. Относительные погрешности $\Xi_i(\delta) = \|u_{(i)} - u_{(i)\delta}\|_{L_2(T)} / \|u_{(i)}\|_{L_2(T)}$ соответственно равны $\Xi_1(0.2) = 0.1716$, $\Xi_1(0.05) = 0.0469$, $\Xi_2(0.2) = 0.3008$, $\Xi_2(0.05) = 0.0865$, $\Xi_3(0.2) = 0.2194$, $\Xi_3(0.05) = 0.0552$.

Результаты расчетов приведены на рисунках 4–6. Сплошной линией показано модельное восстанавливаемое управление, линия с точками — результат восстановления при $\delta = 0.2$, пунктирная линия — результат восстановления при $\delta = 0.05$.

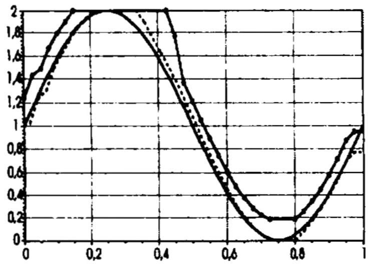

Рисунок 4.

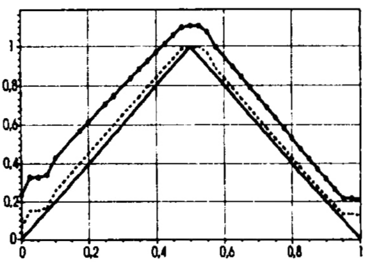

Рисунок 5.

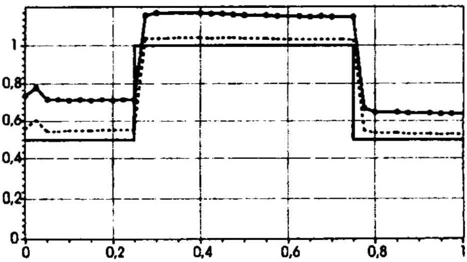

Рисунок 6.

В третьей главе рассматривается задача о восстановлении априори неизвестных управлений в системе (3) динамическим методом. При решении задачи восстановления динамическим методом исходной информацией для решения служат результаты мгновенных приближенных измерений текущих фазовых положений системы, которые поступают наблюдателю в динамике в течение заданного промежутка времени. Здесь измерения и восстановления осуществляются в динамике по ходу процесса по мгновенно поступающей информации. Особенность динамического подхода состоит в том, что данные для расчетов могут поступать только по ходу процесса и зависеть в настоящем от того, как проводилось восстановление в прошлом. Развитие такого подхода связано с тем, что в некоторых инженерных и научных разработках часто возникает необходимость осуществить восстановление синхронно с развитием процесса. С подобными задачами имеют дело в механике управляемого полета, в проблемах оперативной обработке информации при создании технологических и производственных процессов. Для решения задачи восстановления динамическим методом привлекаются понятия и методы теории позиционного управления и теории некорректных задач.

Для решения задачи построены конструктивные устойчивые регуляризирующие алгоритмы. Динамические алгоритмы способны также работать в режиме реального времени, обрабатывая поступающую по ходу движения системы информацию и выдавая результат в динамике по мере развития движения. Показано, что при использовании стабилизаторов в виде суммы классической вариации и нормы пространства L_2 можно получить поточечную сходимость, сходимость в L_p, $1 \leqslant p < \infty$, сходимость классических вариаций и кусочно-равномерную сходимость. Традиционные результаты касались сходимости в L_2. В этом смысле можно говорить о возможности численного восстанавления тонкой структуры искомого управления. В конце главы приведены результаты численного моделирования.

Задача восстановления здесь ставится и формализуется так же, как и во второй главе. Однако теперь алгоритм должен быть динамическим. Определим формально такой алгоритм D как семейство методов D_δ^Δ, $D = \{ D_\delta^\Delta : \Delta \in \Sigma,\ 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0 \}$, где Σ — множество всех конечных разбиений Δ отрезка T. Каждый метод D_δ^Δ представляет собой набор отображений $D_\delta^{\Delta i}$, $D_\delta^\Delta = \{ D_\delta^{\Delta i} : i = 0, ..., m-1 \}$, $D_\delta^{\Delta i} : R^n \times R^n \times R^m \to U[t_i, t_{i+1}] \cap W[t_i, t_{i+1}]$, где $U[t_i, t_{i+1}]$ и $W[t_i, t_{i+1}]$ — сужение функций из U и W на отрезок $[t_i, t_{i+1}]$. Функцию $v_\delta^\Delta : T \to R^m$, определенную равенствами

$$v_\delta^\Delta(t) = v_i(t) = D_\delta^{\Delta i}(y(t_i), z(t_i), v_{i-1}(t_i)),\ t_i \leqslant t < t_{i+1},\ i = 0, ..., m-1,$$

назовем реализацией метода D_δ^Δ на измерении $y \in Y(x(\cdot), \delta)$ и обозначим символом $D_\delta^\Delta(y)$. Положим также $v_\delta^\Delta(\vartheta) = v_{m-1}(\vartheta)$. Значение $z = z(t_i)$ в момент времени t_i внутренней переменной z метода D_δ^Δ однозначно формируется на основании сложившейся к этому моменту времени доступной информации $y(t_j)$, $j = 0, ..., i-1$, о движении системы (3) и реализовавшихся управляющих воздействиях v_j, $j = 0, ..., i-1$, этого метода. Правило формирования переменной z и управляющего воздействия $v_{-1}(t_0)$ метода D_δ^Δ сформулируем ниже.

Исходную задачу восстановления теперь можно сформулировать следующим образом: требуется построить алгоритм $D = \{ D_\delta^\Delta : \Delta \in \Sigma,\ 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0 \}$, который при определенных согласованиях параметров метода на любом наблюдаемом движении $x(\cdot) \in X$ обладает регуляризирующим свойством $r_\delta^\Delta(x(\cdot)) \to 0$ при $d(\Delta) \to 0$ и $\delta \to 0$, где $r_\delta^\Delta(x(\cdot)) = \sup\{ \rho[D_\delta^\Delta(y), U(x(\cdot))] :\ y \in Y(x(\cdot), \delta) \}$.

Пусть известно приближение u_h^0 значения $u_0 = u(t_0)$, $\|u_h^0 - u_0\|_m \leqslant h$. Величина параметра h будет подчинена величине δ. Это условие о возможности нахождения приближения u_h^0 будет использоваться в алгоритме D для назначения вектора $v_{-1}(t_0) = u_h^0$. Обозначим

$$H_\delta^i(v) = 2 < z - y, \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(\tau, y) v(\tau)\, d\tau >_n + \alpha(\delta)\ \Omega_{t_i}^{t_{i+1}}(v),$$

$$\widehat{H}_\delta^i = \min \{ H_\delta^i(v) :\ v \in U[t_i, t_{i+1}; w] \cap W[t_i, t_{i+1}] \},$$

$$U[t, \tau; w] = \{ u \in U[t, \tau] : u(t) = w \}, \quad \Omega_t^\tau(v) = \int_t^\tau \|v(\eta)\|_m^2\, d\eta + V_t^\tau[v],$$

где $V_t^\tau[v]$ — полная вариация функции v на отрезке $[t,\tau]$.

Приступим к построению конкретного алгоритма. Для любых $\delta \in [0,\delta_0]$, $\Delta \in \Sigma$, $i \in \{0,...,m-1\}$, $y \in R^n$, $z \in R^n$, $w \in P$ определим значение отображения $D_\delta^{\Delta i}$ в точке (y,z,w) по правилу $D_\delta^{\Delta i}(y,z,w,) = v_\delta^i$, где v_δ^i есть элемент множества $U[t_i,t_{i+1};w] \cap W[t_i,t_{i+1}]$, удовлетворяющий условию

$$\widehat{H}_\delta^i \leqslant H_\delta^i(v_\delta^i) \leqslant \widehat{H}_\delta^i + \varepsilon(\delta)\ . \tag{8}$$

Значение $z(t)$ внутренней переменной z алгоритма определим следующим образом: если $t = t_0$, то $z(t_0) = y(t_0)$; если $t \in (t_i, t_{i+1}$, то

$$z(t) = z(t_i) + \int_{t_i}^{t} f(\tau, y(t_i), D_\delta^i(y(t_i), z(t_i), v_{i-1}(t_i)))(\tau)\, d\tau\ . \tag{9}$$

Опишем по шагам работу алгоритма во времени.

Шаг $i = 0$. В момент времени t_0 наблюдателю поступает информация в виде измерения $y(t_0)$ состояния $x(t_0)$ наблюдаемого движения $x(\cdot) \in X$ системы и приближенное значение $u_h^0 = u_h^0(x(\cdot))$ реального управления, порождающего это наблюдаемое движение. Положив $y = y(t_0)$, $z = z(t_0)$, $w = u_h^0$, наблюдатель в момент времени t_0 по правилу (8) находит часть $v_\delta^0 = D_\delta^{\Delta 0}(y,z,w)$ реализации $v_\delta^\Delta = D_\delta^\Delta(y)$ метода D_δ^Δ, которая принимается за приближение к искомому управлению на промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Значение $v_\delta^0(t_1)$, найденного управления, запоминается для выполнения следующего шага. Затем по правилу (9) определяется и запоминается для выполнения следующего шага состояние $z(t_1)$ системы-модели (внутренней переменной алгоритма).

Шаг $i = 1$. В момент времени t_1 наблюдателю поступает информация в виде измерения $y(t_1)$ состояния $x(t_1)$ наблюдаемого движения $x(\cdot)$ системы. Положив $y = y(t_1)$, $z = z(t_1)$, $w = v_\delta^0(t_1)$, наблюдатель в момент времени t_1 по правилу (8) находит часть $v_\delta^1 = D_\delta^{\Delta 1}(y,z,w)$ реализации v_δ^Δ метода D_δ^Δ, которая принимается за приближение к искомому управлению на промежутке времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Значение $v_\delta^1(t_2)$, найденного управления, запоминается для выполнения следующего шага. Затем по правилу (9) определяется и запоминается для выполнения следующего шага состояние $z(t_2)$ системы-модели.

Следующие шаги $i = 2,...,m-1$ аналогичны шагу $i = 1$. Таким образом, последовательно по ходу процесса (в динамике) к конечному моменту времени $t_m = \vartheta$ будет получена полная реализация метода $v_\delta^\Delta = D_\delta^\Delta(y)$.

Теорема 3.2.1. *Пусть $U(x(\cdot)) \cap U[t_0,\vartheta;u_0] \cap W \neq \emptyset$, тогда во множестве $U(x(\cdot)) \cap U[t_0,\vartheta;u_0]$ существует единственный Ω — нормальный элемент $\widehat{u}$. Если параметры регуляризации удовлетворяют при $\delta \to 0$ условиям согласования $(d(\Delta(\delta)) + \varepsilon(\delta) + \delta)\alpha(\delta)^{-1} \to 0$, $\alpha(\delta) \to 0$, $\varepsilon(\delta) \to 0$, $h(\delta) \to 0$, то алгоритм D, состоящий из методов (8)-(9), решает задачу восстановления, т.е. для любого наблюдаемого движения*

$x(\cdot) \in X$ при $\delta \to 0$ имеет место сходимость $r_\delta^\Delta(x(\cdot)) \to 0$. Более того, для реализации алгоритма $v_\delta^\Delta = D_\delta^\Delta(y)$, каковы бы ни случились при этом измерения $y \in Y(x(\cdot), \delta)$, при $\delta \to 0$ имеют место сходимости:

1) $v_\delta^\Delta \to \widehat{u}$ сильно в $L_2(T; R^m)$; 2) $v_\delta^\Delta \to \widehat{u}$ в R^m поточечно на T;

3) $V[v_\delta^\Delta] \to V[\widehat{u}]$; 4) $v_\delta^\Delta \to \widehat{u}$ в R^m кусочно-равномерно на T.

При численном моделиировании рассматривалась та же самая нелинейная задача, что и во второй главе, но решалась она динамическим методом. Результаты расчетов приведены на рисунке 7. Сплошной линией показано модельное восстанавливаемое управление. Для управления 1) $\alpha = 0.0001$, $d(\Delta) = 0.004$, $I = 9000$. Штриховой линией показано восстановление при $\delta = 0.45$ и линия из точек получена при $\delta = 0.02$. Для управления 2) $\alpha = 0.001$, $d(\Delta) = 0.004$, $I = 7700$. Штриховая линия получена при $\delta = 0.08$ и линия из точек при $\delta = 0.005$. Для управления 3) $\alpha = 0.0007$, $d(\Delta) = 0.004$, $I = 9000$. Штриховая линия получени при $\delta = 0.46$ и линия из точек при $\delta = 0.01$. Здесь I — число итераций в методе проекции субградиента.

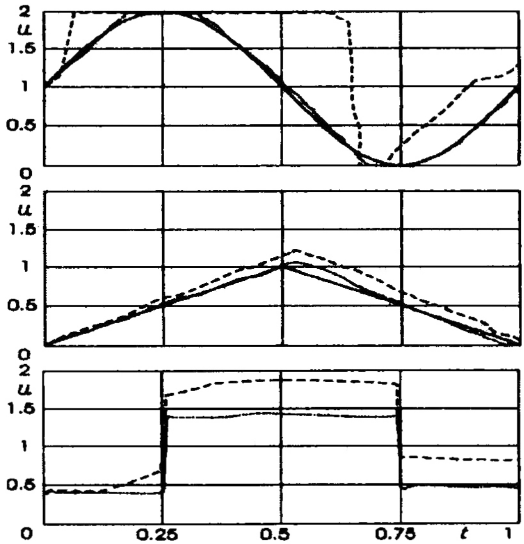

Рисунок 7.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)\,,\ \dot{x}_2(t) = u(t)\,, \quad t \in T = [t_0, \vartheta]\,,\ x_1(t_0) = 0\,,\ x_2(t_0) = 0;$$
$$\mu_1 \leqslant u(t) \leqslant \mu_2\,, \quad \mu_1 = const\,, \quad \mu_2 = const \geqslant \mu_1\,.$$

Пусть параметры системы принимают следующие числовые значения $t_0 = 0$, $\vartheta = 2$, $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 1$, а восстанавливаемое управление имеет вид

$$\widetilde{u} = \widetilde{u}(t) = \begin{cases} -1\,, & t \in (0.5, 1) \cup (1.5, 2]\,, \\ 1\,, & t \in [0, 0.5] \cup [1, 1.5]\,. \end{cases}$$

Результаты расчетов приведены на рисунке 8. Сплошной линией показано модельное восстанавливаемое управление. Восстановление управления проводилось при следующих значениях параметров: $\alpha = 0.001$, $d(\Delta) = 0.0004$, $I = 3000$. Линия с точками получена при $\delta = 0.1$ и пунктирной линией показано восстановление при $\delta = 0.01$.

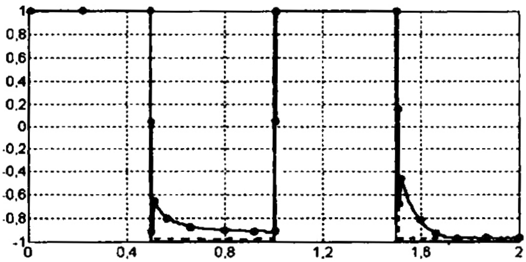

Рисунок 8. Восстановление $\widetilde{u}$ динамическим методом.

В диссертации рассматриваются и другие численные примеры.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

- Для линейных операторных уравнений в пространствах L_p, $1 \leqslant p < \infty$, обоснован метод регуляризации Тихонова при использовании негладких стабилизаторов, представляющих собой сумму обобщенной вариации и нормы пространства L_p, $1 < p < \infty$, или сумму обобщенной вариации и нормы пространства L_∞, позволивших в одномерном случае, кроме традиционной сходимости регуляризованных решений в L_p, получить сходимость обобщенных вариаций, поточечную и кусочно-равномерную сходимости.

- На основе тихоновской регуляризации со стабилизатором в форме суммы нормы пространства L_2 и классической вариации обоснованы методы статического и динамического восстановления управлений в обратных задачах динамики. А именно, для регуляризованного семейства приближенных решений установлены поточечная сходимость, сходимость в L_p, $1 \leqslant p < \infty$, сходимость вариаций и кусочно-равномерная сходимость.

- Реализована оригинальная вычислительная технология, связанная с применением субградиентных методов минимизации целевых функционалов, которая осуществлена с помощью предварительной аппроксимации аргументов функционала более гладкими элементами пространства Соболева, но без какого-либо предварительного сглаживания целевого функционала. Разработаны соответствующие алгоритмы и выполнены численные эксперименты по восстановлению модельных решений интегральных уравнений и управлений в обратных задачах динамики, которые показали, что разработанные в работе методы позволяют восстановить с приемлемой точностью как гладкие, так и негладкие, в частности, разрывные решения.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК:

1. Короткий М.А. Восстановление управлений и параметров методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Известия вузов. Математика. 2009. № 2. С. 76–82.

2. Короткий М.А. Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 39–53.

Другие публикации:

3. Короткий М.А. Метод регуляризации Тихонова с негладкими стабилизаторами // Труды 38-ой Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 29 января – 2 февраля 2007 г.). Екатеринбург: УрО РАН. 2007. С. 159–163.

4. Васин В.В., Короткий М.А. Новые классы негладких стабилизаторов в вариационных методах регуляризации некорректных задач // Тезисы доклада на 13-ой Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения" (Екатеринбург, 26 февраля – 2 марта 2007 г.). Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования № 11. Научное издание. Екатеринбург: УрО РАН. 2007. С. 231–232.

5. Vasin V.V., Korotkii M.A. Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional // Jornal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2007. Vol. 15, №8. P. 853–865.

6. Vasin V.V., Korotkii M.A. Piecewise uniform regularization of inverse problems with nonsmooth solutions // Abstracts of the Fourth International Conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation" (Turkey, Fethiye, May 26 – 30, 2008). Istanbul: Literatur Yayincilink Ltd. 2008. P. 189–190.

7. Короткий М.А. Реконструкция управлений методом Тихонова с негладким стабилизатором // Тезисы докладов Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Екатеринбург, 1 – 6 сентября 2008 г.). Екатеринбург: Издательство Уральского университета. 2008. С. 215–216.

8. Короткий М.А. Восстановление управлений методом динамической регуляризации с негладкими стабилизаторами // Тезисы докладов молодежной международной научной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" (Новосибирск, 10 – 20 августа 2009 г.). Новосибирск: Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН. 2009. С.57-58.

Подписано в печать 28.09.2009 г. Формат 60 × 84 × 16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,5.
Заказ № 854 . Тираж 100.

Отпечатано в типографии ИПЦ
«Издательство УрГУ».
г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

10 =