

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ 5-7 КЛАССОВ ПРИНЦИПУ ДИРИХЛЕ НА КРУЖКОВЫХ ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ

Фалилеева Марина Викторовна, к.п.н.  
Казанский (Приволжский) федеральный университет  
mmwwff@yandex.ru

Киндер Михаил Иванович, к.ф.-м.н., доцент  
Казанский (Приволжский) федеральный университет  
mkinder@rambler.ru

### METHODICAL FEATURES OF TRAINING PUPILS OF 5-7 CLASSES. THE PIGEONHOLE PRINCIPLE

Falileeva Marina, Ph.D.  
Kazan (Volga) Federal University  
mmwwff@yandex.ru  
Kinder Mikhail, PhD, associate professor  
Kazan (Volga) Federal University  
mkinder@rambler.ru

*Аннотация:* В статье представлена методика проведения занятий математического кружка по теме «Принцип Дирихле» в соответствии с требованиями ФГОС ООО. На основе проектирования метапредметного содержания и результатов обучения учащихся предлагается рассматривать принцип «ящичков» как возможность обращения учащихся 5-7 классов к решению простейших задач теории чисел методом от противного, к рассуждениям с кванторами, сравнениям и первым методологическим обобщениям.

*Ключевые слова:* принцип Дирихле, метод от противного, математический кружок, обучение математике учащихся 5-7 классов.

*Abstract:* The paper presents a methodology of additional lessons on "Dirichlet's Principle" in accordance with the requirements of the Federal Educational Standard of Russia. On the basis of the design metasubject content and learning outcomes of students are invited to consider the principle of "boxes" as the possibility of treatment of pupils of 5-7 classes to solve the simplest problems in number theory by contradiction, quantifiers and methodological generalizations.

*Keywords:* Dirichlet principle, by contradiction, additional lesson, learning mathematical students grades of 5-7.

Одним из требований ФГОС ООО является проектирование и реализация метапредметного содержания и результатов образования. В настоящее время существуют различные позиции по определению метапредметности.

По нашему мнению, метапредметность — это целостный взгляд на изучаемый предмет, который включает в себя осознанное понимание понятий и фактов предмета, а также его существенных свойств через связь с другими предметами. Здесь важно, что «метапредметность не может быть оторвана от предметности» [13] и подменяться понятием межпредметности. В противном случае изучаемый учебный предмет превратится в синтезирование других учебных предметов и бытовых представлений. По мнению В.А. Хуторского метапредметность характеризует выход за предметы, но не уход от них. Метапредмет — это то, что стоит за предметом или за несколькими предметами, находится в их основе и одновременно в корневой связи с ними [13].

Наши наблюдения за работой школьников на занятиях математического кружка показывают, что при решении задач «на доказательство» учащиеся плохо применяют метод от противного или не владеют им вообще. Работая в жюри регионального этапа олимпиады по математике, мы отметили для себя, что большинство учащихся 8-9 классов, пытаясь решать предлагаемые задачи методом от противного, делают это неправильно. По нашему мнению, это связано с тем, что метод от противного встречается в школьном курсе эпизодически, чаще всего в курсе геометрии, и совсем редко в

разделах, относящихся к теории чисел, алгебре или математическому анализу. Но даже там, где он используется, обнаружилось новые проблемы. После включения геометрии в общий курс математики, учащиеся стали избегать решения геометрических задач на доказательство, «перекрывая» неудовлетворительные оценки по ней оценками по алгебре. Отсутствие практических навыков использования метода от противного приводит в конечном итоге к тому, что большинство учащихся не помнят идей и методов доказательств школьных теорем, в которых встречается этот метод.

На наш взгляд, метод от противного играет особую роль для развития метапредметного содержания школьной математики, и поэтому должен активно использоваться в решении различных математических задач на доказательство. В связи с этим возникает вопрос о методике и технологии освоения метода от противного в курсе школьной математики.

На кружковых занятиях по математике учащиеся впервые сталкиваются с методом от противного в 5-7 классах при изучении темы «Принцип Дирихле». Этот принцип был впервые сформулирован в 1834 году известным немецким математиком Петером Густавом Лежёном Дирихле (1805-1859), учеником К.Ф.Гаусса. Напомним его формулировку:

**ДИРИХЛЕ ПРИНЦИП «ящичков»:** *если в  $n$  «ящичках» лежит  $n + 1$  «предмет», то хотя бы в одном из «ящичков» лежит не меньше двух «предметов».* Принцип Дирихле часто применяется в теории диофантовых приближений и в теории трансцендентных чисел для доказательства разрешимости в целых числах систем линейных неравенств. В. Г. Спринджук [6, С. 92].

Приведём также несколько хорошо известных занимательных формулировок этого принципа:

*Если в  $n$  клетках сидят не менее  $n + 1$  зайцев, то в какой-то клетке сидит не менее двух зайцев.*

*Если жильцов больше, чем квартир, то хотя бы двое живут в одной квартире.*

Задачи на применение принципа Дирихле встречаются на математических олимпиадах так же часто, как, например, задачи на логику или делимость. Кроме того, логика принципа «ящичков» встречается в большинстве разделов элементарной математики — теории чисел, комбинаторике, геометрии, теории графов и др.

В программе для общеобразовательных школ этот принцип не рассматривается. В учебнике Н.Я. Виленкина и др. [1] для учащихся 8 класса принцип Дирихле представлен на полутора страницах отдельным параграфом для дополнительного изучения.

В пособиях по математике для внеклассной работы со школьниками принцип Дирихле представлен повсеместно [3], [4], [5], [7], [10], [11], [12], [14] и др. В большей части даётся формулировка принципа «ящичков», приводятся примеры решения задач с помощью этого принципа, а также задачи для самостоятельного решения. Можно выделить, пожалуй, единственное пособие для занятий математического кружка С.А. Генкина, И.В. Итенберга и Д.В. Фомина [4], в котором присутствуют не только подробные разъяснения для учащихся, но и методические комментарии для педагогов-тренеров. Авторы обращают внимание на «расплывчатость» выводов в формулировке принципа («в какой-то из клеток», «не менее») и на кажущуюся недостаточность сведений в условии [4, с. 39]. Анализ материалов вышеперечисленных учебных пособий и статей [2], [8] позволяет выделить в целом единый, традиционный подход, который при обучении принципу Дирихле учащихся 5-7 классов сводится к последовательному выполнению следующих шагов:

- 1) учащимся предлагается задача на применение принципа Дирихле, при решении которой они испытывают трудности логического обоснования;
- 2) разбирается доказательство утверждения и его возможного обобщения;
- 3) формулируется сам принцип и его доказательство;
- 4) сознательно повторяют рассуждения (отработка) на задачах, цель решения которых — научить учащихся выделять объекты-«зайцы» и объекты-«клетки»;
- 5) формулируется обобщенный принцип «ящичков» и разбираются решения сопутствующих ему задач.

Построение занятий по указанной схеме приводит к реализации следующих задач обучения: запоминание формулировки принципа учащимися и отработка типичных рассуждений при решении задач. Многолетние занятия по традиционной схеме показали невысокий уровень освоения при обучении учащихся. Улучшение результатов возможно посредством увеличения часов, но сами авторы пособия рекомендуют: «Мы считаем неправильным заниматься с младшеклассниками одной темой в течение продолжительного промежутка времени. Даже в рамках одного занятия полезно

иногда сменить направление деятельности» [4, с. 4]. На наш взгляд, традиционный подход в обучении учащихся принципу Дирихле создает у учащихся иллюзию оторванности принципа от остальных разделов элементарной математики.

Мы предлагаем разделить изучение принципа Дирихле на кружковых занятиях учащихся 5-7 классов на два этапа. На первом этапе учащиеся знакомятся с методом от противного при решении простейших задач на доказательство. На следующем этапе учащиеся осмысливают, достраивают и переосознают «расплывчатые» формулировки, которые встречаются во многих задачах на принцип Дирихле. Здесь мы имеем ввиду часто встречающиеся смысловые конструкции, включающие в себя кванторы существования («найдётся клетка», «существует хотя бы один объект» и т.п.) и сравнительные утверждения («два или более зайцев», «по крайней мере два объекта» и т.п.).

Кроме того, особо выделим формулировки утверждений задач, в которых предлагается доказать, что найдётся клетка, в которой сидят а) «не менее двух зайцев», б) «более одного зайца»; в) «два и более зайцев» и г) «два зайца». Последняя формулировка — наиболее сложная в понимании учащихся: воспринимая ее буквально, они пытаются опровергнуть утверждение, рассаживая зайцев в клетки по 3 и по 1, и тогда, как они считают, заключение неверно.

Практика наблюдения за учащимися показывает, что они не знают, как решать задачи с формулировкой заключения: «Докажите, что найдётся клетка, в которой сидят два зайца». Для этого учащимся 5-7 классов, которые занимаются в математическом кружке первый год, мы предлагаем самостоятельно решить традиционную задачу на принцип Дирихле: «В 5 клетках сидят 7 зайцев. Докажите, что найдётся клетка, в которой сидят два зайца». Было интересно понять, как дети осознают вопрос задачи, сможет ли кто-то из них самостоятельно вывести доказательство принципа Дирихле в этом частном случае. Отметим, что перед занятием дети уже были знакомы как минимум с двумя темами. Первая — это «Логические задачи», где учащиеся находили соответствия между множествами, определяли истинные и ложные утверждения, находили противоречия. Вторая тема — «Чётность», при изучении которой учащиеся решали задачи на доказательство, в частности, отыскивая противоречия в неправильных решениях.

Формулировка предложенной задачи на принцип Дирихле, видимо, была настолько непривычна учащимся, что ни один из них не привел самостоятельно полное доказательство. Типичные комментарии школьников сводились к фразам типа «И так все понятно. Что здесь доказывать? Иначе быть не может». Другими словами, учащиеся интуитивно понимали, что доказываемое утверждение верно, но настоящее доказательство сформулировать не смогли. Наиболее характерным рассуждением учащихся является следующее: «Если мы будем по одному зайцу сажать в клетку, то остальных двух придется посадить в клетку с другими зайцами» (распределение — 1, 1, 1, 2, 2). В принципе, данное рассуждение верно, однако следует отметить, что это только один из случаев распределения зайцев по клеткам, а существуют и другие. Педагогу необходимо также обратить внимание учащихся на то, что среди многочисленных распределений, возможно, найдется такое, в котором не выполняется доказываемое утверждение. После этого дети начинают сомневаться в своем доказательстве, и здесь — для придания им уверенности — полезным является рассмотрение нескольких случаев распределения зайцев по клеткам, например, (3, 4, 0, 0, 0) или (0, 0, 0, 7, 0). На этих примерах дети осознают смысл утверждения «сидят два зайца». (В последнем распределении: если в клетке сидят семь зайцев, то два там сидят точно.)

На следующем этапе занятия педагог дает решение задачи методом от противного с последующим методологическим обобщением в виде плана решения таких задач:

- 1) в задаче на доказательство выделяем условие и заключение;
- 2) строим отрицание заключения;
- 3) находим противоречие между условием и отрицанием заключения.

Практика обучения показала, что если учащиеся уже знакомы с темами «Логика» и «Чётность», то они достаточно успешно и с интересом усваивают и метод от противного, и принцип Дирихле. Формулировка этого плана без предварительного изучения указанных тем или аналогичных им, на наш взгляд, является преждевременной.

Для усиления метапредметности на занятиях с учащимися уместно рассказать о значении метода от противного для математики на примерах великих научных открытий. В своей практике мы приводили пример открытия неевклидовой геометрии великим русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским. Рассказ о жизни учёного, сути открытия и его значении для прогресса всей науки в целом [9] меняет представление учащихся о ценности этого метода. Наши наблюдения показывают, что после такого отступления учащиеся с трепетом и уважением начинают относиться к

методам решения математических задач и с большей осознанностью используют метод от противного.

После решения двух-трех задач можно формулировать принцип Дирихле. Последующие задачи необходимо решать с учащимися двумя способами: методом от противного и по принципу Дирихле. Практика обучения показала, что при первом знакомстве более удобным для учащихся 5-7 классов является метод от противного, а не принцип Дирихле. Активное, осознанное использование принципа Дирихле при решении задач проявляется у большинства учащихся, начиная только с 8-9 классов.

В заключение отметим, что сформулированный подход к проектированию и реализации занятий по теме «Принцип Дирихле» соответствует ФГОС ООО и является примером переориентирования традиционных целей на занятиях математического кружка в школе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 8 кл. с углубл. изучением математики/ Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Сурвилло и др. – М.: Просвещение, 2001. – 256 с.
2. Болтянский В. Шесть зайцев в пяти клетках // Квант. – 1977. - № 2. – С.17-20.
3. Дориченко С.А., Яценко И.В. LVIII Московская математическая олимпиада: сборник подготовительных задач. – М.: ТЕИС, 1994. – 61 с.
4. Генкин С.А. Ленинградские математические кружки // С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. – Киров: Из-во «АСА», 1994. – 272 с.
5. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.
6. Математическая энциклопедия (в 5 томах). – М.: Советская энциклопедия, 1982. – Т.2. – С. 178.
7. Муштару Д.Х. Подготовка к математическим олимпиадам. – Казань: Казанское математическое общество, 2000. – 239 с.
8. Орлов А.И. Принцип Дирихле //Квант. – 1971. – № 7. – С. 17-21.
9. Николай Иванович Лобачевский: историко-биографический сборник / Н.Е. Сосов, В.Е. Фомин, Л.Р.Шакирова, В.В. Шурыгин, В.В. Шурыгин (мл.), Г.Д. Тарзиманова. – Казань: Жиен, 2014. – 656 с.
10. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.1. – М.: Наука, 1991. – 240 с.
11. Спивак А.В. Математический кружок. 6-7 классы. – М.: Посев, 2003. - 128 с.
12. Фарков А.В. Готовимся к олимпиадам по математике. – М.: Изд-во «Экзамен», 2006. – 160 с.
13. Хуторской А.В. Метапредметное содержание и результаты образования: как реализовать федеральные государственные образовательные стандарты (ФГОС) // Интернет-журнал «Эйдос». – 2012. – № 10. Режим доступа: <http://eidos.ru/journal/2012/0229-10.htm> .
14. Шарыгин И.Ф. Задачи на смекалку. 5-6 классы: пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2010. – 95 с.
15. Шклярский Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 480 с.