РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

Антонов Николай Юрьевич

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ФУРЬЕ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

01.01.01 — математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург – 2009

Работа выполнена в отделе аппроксимации и приложений Института математики и механики Уральского отделения РАН.

Научный консультант: доктор физико-математических наук профессор Черных Николай Иванович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук профессор Бадков Владимир Михайлович, доктор физико-математических наук профессор Дьяченко Михаил Иванович, доктор физико-математических наук профессор Карагулян Григорий Арташесович.

Ведущая организация: Математический институт им. В.А.Стеклова РАН.

Защита состоится 21 мая 2009 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.02 при Институте математики и механики УрО РАН (620219, г. Екатеринбург, ГСП-384, ул. С.Ковалевской, 16).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН.

Автореферат разослан "20" апреля 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 004.006.02
доктор физико-математических наук В.Т.Шевалдин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Проблема сходимости тригонометрических рядов Фурье стоит в математике с середины 19-го века и, несмотря на уже полученные глубокие результаты, до сих пор не имеет окончательного решения. Поэтому исследования по этой проблеме, как видно из дальнейшего изложения, все еще остаются актуальными.

Пусть $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L) = \varphi(L)([0,2\pi))$ множество всех измеримых по Лебегу 2π-периодических функций f таких, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(t)|)dt < \infty.$$

Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (1)$$

— тригонометрический ряд Фурье функции $f \in L([0,2\pi))$, а $S_n(f,x)$ — его частичная сумма порядка n. Определим также

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx) \qquad (2)$$

— сопряженный ряд ряда (1) и $\tilde{S}_n(f,x)$ — его n-ю частичную сумму.

Во второй половине позапрошлого века П.Дюбуа Реймон [21] установил, что даже из непрерывности периодической функции не следует, что тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке. В связи с этим возник вопрос о том, какие условия на функцию $f \in L([0,2\pi))$ являются достаточными для того, чтобы ряд (1) сходился почти всюду.

Естественность использования при исследовании рядов Фурье класса $L^2([0,2\pi))$ сделала в 1900-х годах популярной следующую задачу об условиях сходимости рядов Фурье функций из L^2 : найти как можно более медленно растущую неубывающую последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, чтобы из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k(a_k^2 + b_k^2)$$

следовала сходимость ряда (1). Числа w_k получили название множителей Вейля. Результаты в этой задаче последовательно получали П.Фату ([22], в качестве множителей Вейля можно взять $w_k = k$), Г.Вейль ([45], $w_k = k^{\frac{1}{3}}$), Е.Гобсон ([27], $w_k = k^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$), М.Планшерель ([38], $w_k = \log^3 k$), Г.Харди ([26], $w_k = \log^2 k$).

Г.Харди также принадлежит следующий результат о поведении на множестве полной меры частичных сумм тригонометрических рядов Фурье (сумм Фурье) произвольных интегрируемых по Лебегу функций [26]: если $f \in L([0, 2\pi))$, то для почти всех $x \in [0, 2\pi)$

$$S_n(f, x) = o(\ln n). \tag{3}$$

Заметим, что оценка (3), полученная в 1913 году, до сих пор не улучшена, и не доказана ее неулучшаемость (о современных результатах, связанных с (3) будет упомянуто ниже).

В 1915 году Н.Н.Лузин (см. [10]) выдвинул гипотезу о том, что ряд Фурье любой функции из $L^2([0, 2\pi))$ сходится почти всюду. То есть, согласно этой гипотезе, в задаче о множителях Вейля можно взять $w_k \equiv 1$.

В 1922 году А.Н.Колмогоров [30], исследуя проблему Лузина, построил пример суммируемой функции, ряд Фурье которой расходится почти всюду (о дальнейших результатах в этом направлении см. далее). Как отмечено в [30], построенная функция не принадлежит классу $L^2([0, 2\pi))$. Результатом положительного характера в этой тематике в 20-е годы прошлого столетия явилась оценка, полученная А.Н.Колмогоровым и Г.А.Селиверстовым [33] и А.И.Плеснером [39]: если $f \in L^2([0, 2\pi))$, то

$$S_n(f, x) = o\left((\ln n)^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{п.в.} \tag{4}$$

Дж.Литтлвуд и Р.Пэли [37] обобщили оценку (4) на функции из классов $L^p([0, 2\pi))$, $1 < p \leq 2$: если $f \in L^p([0, 2\pi))$, то

$$S_n(f, x) = o\left((\ln n)^{\frac{1}{p}}\right) \quad \text{п.в.} \tag{5}$$

Оценка (5) вплоть до середины 60-х годов прошлого века оставалась наиболее сильным и общим результатом в "положительном" направлении в изучении проблемы Лузина; не было даже известно, у всякой ли непрерывной функции ряд Фурье сходится почти всюду.

Справедливость гипотезы Лузина была установлена Л.Карлесоном в 1966 году. В работе [19] с помощью нового метода, были получены следующие результаты:

a) если $f \in L(\ln^+ L)^{1+\delta}([0,2\pi))$, $\delta > 0$, то

$$S_n(f,x) = o(\ln\ln n) \quad \text{п.в.}$$

(здесь и далее для $u \geq 0$ будем полагать $\ln^+ u = \ln(u+e)$);

b) если $f \in L^p([0,2\pi))$ при $p > 1$, то

$$S_n(f,x) = o(\ln\ln\ln n) \quad \text{п.в.} ;$$

c) если $f \in L^2([0,2\pi))$, то ряд Фурье функции f сходится почти всюду.

Доказательство утверждения a) с подробным изложением первой части метода Карлесона имеется в работе Н.И.Черных [16]. Ч.Фефферманом [24] было предложено другое доказательство утверждения c). Подробное изложение этого доказательства дано в [9]. Недавно М.Лэйси и К.Тиле опубликовали [36] еще одно доказательство теоремы Карлесона (утверждения c)). Тем не менее, имеющиеся доказательства все-таки достаточно сложны как в техническом, так и в идейном плане, поэтому задача поиска более простого доказательства теоремы Карлесона и ее обобщений (о которых речь ниже) остается, на наш взгляд, по-прежнему актуальной.

П.Биллард [18], используя идеи Карлесона, перенес его метод на ряды Фурье по системе Уолша и доказал сходимость почти всюду ряда Фурье–Уолша произвольной функции из $L^2([0,1])$. Доказательство теоремы Билларда, принадлежащее Р.Ханту [29], можно найти в книге [3, гл. 9, §9.2].

В 1968 году Р.Хант [28], развивая метод Карлесона, распространил утверждение о сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье на функции из классов $L^p([0,2\pi))$, $p > 1$, и даже, более того, на функции из класса $L(\ln^+ L)^2([0,2\pi))$, содержащего все эти классы L^p.

Пусть
$$M(f,x)=\sup_{n\geq 1}|S_n(f,x)|,\quad x\in[0,2\pi),$$
— мажоранта частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции $f\in L([0,2\pi))$. Обозначим через χ_F характеристическую функцию произвольного измеримого 2π-периодического множества F, через $\operatorname{mes} F$ — лебегову меру множества $F\cap[0,2\pi)$. Основным результатом работы [28] является следующая оценка

$$\operatorname{mes}\{x\in[0,2\pi):M(\chi_F,x)>y\}\leq(B_p)^p y^{-p}\cdot\operatorname{mes} F, \tag{6}$$

где $y>0$, $1<p<\infty$, $B_p\leq \text{const}\cdot p^2/(p-1)$. Используя (6), Хант доказал, что

1) $\|M(f,\cdot)\|_p\leq C_p\|f\|_p,\quad 1<p<\infty,\quad f\in L^p([0,2\pi))$;

2) $\|M(f,\cdot)\|_1\leq C\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|(\ln^+|f(x)|)^2dx+C,\quad f\in L(\ln^+L)^2([0,2\pi))$;

3) $\operatorname{mes}\{x\in[0,2\pi):M(f,x)>y\}\leq C\exp\left(-\frac{Cy}{\|f\|_\infty}\right),\quad y>0,$
$f\in L^\infty([0,2\pi))$.

Из утверждений 2) и 1) следует сходимость почти всюду $S_n(f,x)$ к $f(x)$ для функций из классов $L(\ln^+L)^2([0,2\pi))$ и $L^p([0,2\pi))$, $p>1$, соответственно.

В 1969 году П.Шёлин [40] перенес оценку (6) на случай мажоранты $M^W(f,x)$ частичных сумм ряда Фурье по системе Уолша. Далее в [40] Шёлин показал, что путем оптимального выбора числа p для каждого y в оценке (6) и аналогичной оценке для случая рядов Фурье–Уолша получается оценка

$$\operatorname{mes}\left\{x\in\Delta:\bar{M}(\chi_F,x)>y\right\}\leq C\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\operatorname{mes} F,\quad 0<y<1/e, \tag{7}$$

где C — абсолютная константа, в качестве $\bar{M}$ могут быть взяты как $M(f,x)$ — определенная выше мажоранта частичных сумм тригонометрического ряда Фурье, так и $M^W f(x)$ — мажоранта частичных сумм ряда Уолша, а Δ — период $[0,2\pi)$ либо отрезок $[0,1]$ соответственно. Приближая произвольные функции f линейными комбинациями характеристических функций и используя (7), Шёлин установил, что если f

принадлежит классу $L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ L)$ на периоде $[0, 2\pi)$ либо на отрезке $[0, 1]$, то тригонометрический ряд Фурье либо соответственно ряд Фурье–Уолша функции f сходится почти всюду.

В 1996 году автором [17] с использованием оценки (7) для тригонометрического случая было доказано, что более общее, чем в работе [40], условие $f \in L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0, 2\pi))$ также является достаточным для сходимости почти всюду тригонометрического ряда Фурье функции f. Отметим, что при доказательстве в [17] применена конструкция, позволяющая приближать, в частности, частичные суммы тригонометрического ряда Фурье функции f частичными суммами ряда Фурье линейных комбинаций характеристических функций $\sum a_k \chi_{F_k}$, но при этом функция f, вообще говоря, функциями $\sum a_k \chi_{F_k}$ не приближается. Именно за счет достигнутой с помощью этого большей свободы и удалось получить усиление результата Шёлина [40].

В настоящей диссертации метод, использованный в [17], переносится с частичных сумм тригонометрических рядов Фурье $S_n(f, x)$ на случай последовательностей операторов более общего вида. Из полученной в главе 1 диссертации основной теоремы в качестве следствий вытекают утверждения о том, что если $f \in L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)$ на $[0, 2\pi)$ или на $[0, 1]$, то тригонометрический ряд Фурье либо, соответственно, ряд Фурье – Уолша функции f сходятся почти всюду; как следствие основной теоремы получена также оценка скорости роста частичных сумм тригонометрических рядов Фурье функций из классов, промежуточных между $L([0, 2\pi))$ и $L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0, 2\pi))$.

Отметим, что опубликованный нами в работе [46] результат о сходимости почти всюду рядов Фурье – Уолша функций из $L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0, 1])$ позднее был также получен П.Шелиным и Ф.Сориа [42].

Как уже отмечалось, А.Н.Колмогоровым [30] в 1922 году был построен пример функции из класса $L([0, 2\pi))$, тригонометрический ряд Фурье которой неограниченно расходится почти всюду. Чуть позднее им же [32] была показана возможность построения суммируемой функции с рядом Фурье, расходящимся в каждой точке. Эти примеры Колмогорова послужили идейной основой для получения в дальнейшем многими авторами различных примеров интегрируемых функций с наложенными на них дополнительными условиями и "нехорошим" поведением последовательностей частичных сумм их тригонометрических рядов Фурье, а также рядов Фурье по другим ортогональным системам. Полученные во второй половине 60-х годов прошлого столетия Карлесоном и его последователями результаты в задаче о нахождении как можно более широкого класса $\varphi(L)$ такого, что ряд Фурье каждой функции из этого класса сходится почти всюду, пробудили интерес исследователей к получению на основе колмогоровских примеров отрицательных результатов в этой задаче. В.И.Прохоренко [12] и, независимо, Й.Чень [20] построили функции из классов $L(\ln^+\ln^+ L)^\varepsilon([0,2\pi))$, $0 \le \varepsilon < 1$, с рядами Фурье, расходящимися почти всюду. (Заметим, что в работе [12] сформулированный результат получен как следствие другого результата — о расходимости ряда Фурье функции с ограничением на интегральный модуль непрерывности; этот результат будет сформулирован позднее.) К.Тандори [43] доказал, что для любого $0 \le \varepsilon < 1$ и любой последовательности положительных чисел $\lambda_n = o((\ln\ln n)^{1-\varepsilon})$ существует функция f из класса $L(\ln^+\ln^+ L)^\varepsilon([0,2\pi))$, такая что всюду на $[0,2\pi)$

$$\sup_n \frac{|S_n(f,x)|}{\lambda_n} = +\infty, \quad \sup_n \frac{|\tilde{S}_n(f,x)|}{\lambda_n} = +\infty.$$

Отсюда, в частности, следует, что результат Прохоренко–Ченя можно усилить, заменив расходимость почти всюду на расходимость всюду. Позднее В.Тотиком [44, теорема 3] было доказано, что если в некотором классе $\varphi(L)([0,2\pi))$ существует функция с тригонометрическим рядом Фурье, расходящимся на множестве положительной меры, то в этом же классе найдется функция, ряд Фурье которой неограниченно расходится всюду. Кёрнер [35] несколько усилил результат работы Тандори [43] в части расходимости: если функция $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ удовлетворяет условию $\psi(u) = o(\log\log u)$ при $u \to \infty$, то существует функция из класса $L\psi(L)([0,2\pi))$ с расходящимся всюду рядом Фурье. Другое доказательство этого результата Кёрнера имеется в [15].

Наилучший на сегодняшний день результат, касающийся расходимости на множестве положительной меры тригонометрических рядов Фурье функций из классов $\varphi(L)([0,2\pi))$ принадлежит С.В.Конягину [7]: если неубывающая функция $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ и последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \geq 1$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию $\psi(n)\lambda_n = o\left(\sqrt{\ln n / \ln\ln n}\right)$ при $n \to \infty$, то существует функция $f \in L\psi(L)([0, 2\pi))$ такая, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(f,x)|}{\lambda_n} = \infty$$

для всех $x \in [0, 2\pi)$. Отсюда, в частности, вытекает следующее утверждение: для любой неубывающей функции $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, удовлетворяющей условию $\varphi(u) = o\left(u\sqrt{\ln u / \ln\ln u}\right)$ при $u \to \infty$, найдется функция из класса $\varphi(L)([0, 2\pi))$ такая, что ее ряд Фурье неограниченно расходится всюду на $[0, 2\pi)$. Для любого класса $\varphi(L)([0, 2\pi))$, "промежуточного" между $L(\ln^+ L)^{\frac{1}{2}}(\ln^+ \ln^+ L)^{-\frac{1}{2}}([0, 2\pi))$ и $L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0, 2\pi))$, ответ на вопрос, существует ли в таком классе функция с расходящимся на множестве положительной меры (а значит и всюду) рядом Фурье или для каждой функции из этого класса ее ряд Фурье сходится почти всюду, к настоящему времени неизвестен.

Наиболее сильный в настоящий момент результат, касающийся расходимости рядов Фурье–Уолша, принадлежит С.В.Бочкареву: если $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\psi(u) = o\left(\sqrt{\ln u}\right)$ при $u \to \infty$, то существует функция $f \in L\psi(L)([0, 1])$, ряд Фурье–Уолша которой расходится почти всюду [1] (всюду [2]) на $[0, 1]$. Таким образом, "зазор" между наилучшими положительным и отрицательным результатами в случае рядов Уолша несколько меньше, чем в тригонометрическом случае.

Пусть $f \in L([0, 2\pi))$. Обозначим через $\omega(f, \delta)_1$ модуль непрерывности функции f в метрике $L([0, 2\pi))$:

$$\omega(f, \delta)_1 = \sup_{|h|\leq\delta} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|dx.$$

Пусть $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — произвольный модуль непрерывности, то есть непрерывная, неубывающая, полуаддитивная, равная в нуле нулю функция. Определим множество H_1^ω следующим образом:

$$H_1^\omega = \{f \in L([0, 2\pi)) : \omega(f, \delta)_1 = O(\omega(\delta))\}.$$

Заметим, что если ω_1 и ω_2 — два модуля непрерывности, и в некоторой окрестности нуля $\omega_1(\delta) = O(\omega_2(\delta))$, то $H_1^{\omega_1} \subset H_1^{\omega_2}$.

А.Зигмунд [5, т.2, гл. XIII, теорема (3.10)] доказал, что если модуль непрерывности ω удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty$$

(это условие эквивалентно сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(k^{-1})/k$), то тригонометрический ряд Фурье функции $f \in H_1^{\omega}$ сходится почти всюду. Несмотря на простоту доказательства, этот результат Зигмунда до сих пор не улучшен (в том смысле, что не распространен на более широкие классы H_1^{ω}), и не доказана его неулучшаемость.

Из результата Зигмунда, в частности, следует, что если модуль непрерывности ω удовлетворяет условию $\omega(\delta) = O((\ln(1/\delta))^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, то ряд Фурье любой функции $f \in H_1^{\omega}$ сходится почти всюду. В связи с последним утверждением в [5, т.2, гл. XIII, с.258] была сформулирована проблема: останется ли утверждение верным при $\varepsilon = 0$? Исследуя эту проблему Зигмунда, В.И.Прохоренко [12] построил пример функции $F \in L([0, 2\pi))$ такой, что $\omega(F, \delta)_1 = O((\ln\ln(1/\delta))^{-1})$, и ее ряд Фурье расходится почти всюду. Отсюда с помощью одной теоремы вложения П.Л.Ульянова [14, теорема 2 (следствие 4)] Прохоренко получил уже упоминавшийся выше результат о существовании функции из класса $L(\ln^+ \ln^+ L)^{\varepsilon}([0, 2\pi))$, $0 \le \varepsilon < 1$, с расходящимся почти всюду рядом Фурье.

В настоящей диссертации в главе 2 получено усиление первого из только что сформулированных результатов Прохоренко [12]. А именно, построен пример функции F с расходящимся почти всюду рядом Фурье и интегральным модулем непрерывности, удовлетворяющим условию $\omega(F, \delta)_1 = O\left(\sqrt{\ln\ln(1/\delta)/\ln(1/\delta)}\right)$. При этом наше доказательство существенно опирается на основную лемму работы [7].

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, $f \in L([0, 2\pi))$. Положим

$$M(f, \Lambda, x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{|S_n(f, x)|}{\lambda_n}, \quad x \in [0, 2\pi).$$

В случае $\lambda_n \equiv 1$, если ряд Фурье функции f сходится почти всюду, в частности, если $f \in H_1^\omega$, где ω удовлетворяет условию $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(k^{-1})/k < \infty$, то мажоранта $M(f, \{1\}, x)$ почти всюду конечна. Для произвольной функции $f \in L([0, 2\pi))$ конечные значения почти во всех точках принимает мажоранта $M(f, \{\ln n\}, x)$. Это следует из оценки Г.Харди (3). Однако, функция $M(f, \{\ln n\}, x)$ при этом может быть не интегрируемой: в [5, т.2, гл.XIII, п.2] построен пример функции $F \in L([0, 2\pi))$, у которой $M(F, \{\ln n\}, \cdot) \notin L$.

В настоящей диссертации (в главе 2) рассматривается задача о наиболее общих условиях на модуль непрерывности ω, достаточных для того, чтобы для всех $f \in H_1^\omega$ мажоранта $M(f, \Lambda, \cdot)$ была интегрируемой. Установлено (теорема 2.2), что при некоторых разумных условиях на последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(1/k)}{k\lambda_k} < +\infty \tag{8}$$

является достаточным для того, чтобы для каждой функции $f \in H_1^\omega$ мажоранта $M(f, \Lambda, \cdot)$ была интегрируема. Показано, что условие (8) при соответствующих условиях на Λ является неулучшаемым (теорема 2.3): если ряд в левой части (8) расходится, то существует функция $F \in H_1^\omega$ такая, что мажоранта $M(F, \Lambda, \cdot)$ не интегрируема.

Хорошо известно [31], что для произвольной функции $f \in L([0, 2\pi))$ и для $0 < \varepsilon < 1$

$$\int_0^{2\pi} |S_n(f, x) - f(x)|^\varepsilon \, dx \to 0, \quad \int_0^{2\pi} |\tilde{S}_n(f, x) - \tilde{f}(x)|^\varepsilon \, dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Отсюда следует, что тригонометрический ряд Фурье произвольной функции $f \in L([0, 2\pi))$ сходится по мере. Значит, последовательность частичных сумм ряда Фурье любой интегрируемой функции имеет сходящуюся почти всюду подпоследовательность.

Однако, не существует такой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, чтобы для любой $f \in L([0, 2\pi))$ подпоследовательность $S_{n_k}(f, x)$ сходилась бы почти всюду: для любой возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ найдется функция $f \in L([0, 2\pi))$ такая, что $S_{n_k}(f, x)$ расходится почти всюду [25] (всюду [44]). Недавно С.В.Конягин [8] усилил результат В.Тотика [44], показав, что для любой возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и любой неубывающей функции $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, удовлетворяющей условию $\varphi(u) = o(u \ln \ln u)$, $u \to \infty$, найдется функция $F \in \varphi(L)$ такая, что подпоследовательность $S_{n_k}(F, x)$ неограниченно расходится всюду.

Поведение подпоследовательностей сумм Фурье, в частности, условия сходимости почти всюду подпоследовательностей сумм Фурье интегрируемых функций в терминах величин наилучших приближений этих функций тригонометрическими полиномами в пространстве $L([0, 2\pi))$, изучались К.И.Осколковым [11]. Пусть $E_n(f)$ — величина наилучшего приближения функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве $L([0, 2\pi))$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $\psi(u)$ — положительная невозрастающая на $(0, 1]$ функция такая, что

$$\int_0^1 \frac{du}{u\psi(u)} < \infty. \tag{9}$$

Тогда [11, теорема 2] для любой $f \in L([0, 2\pi))$ при почти всех $x \in [0, 2\pi)$

$$S_{n_k}(f, x) - f(x) = o\left(E_{n_k}(f)\psi\left(E_{n_k}(f)\right)\ln k\right).$$

В частности, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_{n_k}(f)}{k} < \infty,$$

то подпоследовательность $S_{n_k}(f, x)$ сходится почти всюду, а если f — произвольная функция из $L([0, 2\pi))$, то

$$S_{n_k}(f, x) = o(\ln k) \quad \text{п.в.} \tag{10}$$

Из сформулированных результатов работы [11] с помощью неравенства Джексона $E_n(f) \leq C\omega(f, 1/n)_1$ непосредственно вытекают следующие утверждения.

A) Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $\psi(u)$ — положительная функция, невозрастающая на $[0,1]$ и удовлетворяющая условию (9), $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности. Тогда для любой функции $f \in H_1^{\omega}$

$$S_{n_k}(f,x) - f(x) = o\left(\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\psi\left(\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\right)\ln k\right) \quad \text{п.в.}$$

B) Пусть возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и модуль непрерывности ω удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)}{k} < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in H_1^{\omega}$ подпоследовательность $S_{n_k}(f,x)$ сходится почти всюду.

Отметим, что утверждение B) и оценка (10) в частном случае $n_k = k$ превращаются соответственно в приводившийся выше результат Зигмунда [5, гл. XIII, теорема (3.10)] и классическую оценку Харди (3).

В настоящей диссертации (во второй главе) рассматривается задача о границах возможного усиления утверждений A) и B) в случае, когда последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ растет достаточно быстро, в частности, когда она лакунарная: существует $p > 1$ такое, что $n_{k+1}/n_k \geq p$, $k \in \mathbb{N}$. В этой же главе при некоторых условиях на функцию $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ и модуль непрерывности ω построен пример функции с расходящимся почти всюду тригонометрическим рядом Фурье и принадлежащей классам $\varphi(L)$ и H_1^{ω} одновременно (теорема 2.6). Это утверждение является усилением упоминавшегося выше результата С.В.Конягина [8].

Перейдем теперь к рассмотрению многомерного случая, точнее, к обзору результатов, касающихся поведения на множестве полной меры кратных тригонометрических рядов Фурье. Будем в основном придерживаться обозначений, принятых в [4].

Пусть d — натуральное число, $\mathbb{Z}^d$ - целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{kx} = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$, f — определенная на $\mathbb{R}^d$, 2π-периодическая по каждой переменной и интегрируемая по Лебегу на $[0,2\pi)^d$ функция,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tag{11}$$

— кратный тригонометрический ряд Фурье функции f.

Для целочисленного вектора $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$ с неотрицательными координатами n_j, $1 \le j \le d$, сумму

$$S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_d):|k_j|\le n_j, 1\le j\le d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}}$$

будем называть $\mathbf{n}$-ой прямоугольной частичной суммой ряда (11) или $\mathbf{n}$-ой прямоугольной суммой Фурье.

Пусть B — некоторое непустое подмножество множества первых d натуральных чисел: $B = \{r_1, \ldots, r_l\} \subset \{1, \ldots, d\}$. Ряд

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^d} \prod_{j=1}^{l} (-i \operatorname{sign} k_{r_j}) a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tag{12}$$

называется сопряженным к ряду (11) по переменным, номера которых входят во множество B, или B-сопряженным, а $\mathbf{n}$-я прямоугольная частичная сумма $\tilde{S}_{\mathbf{n},B}(f,\mathbf{x})$ ряда (12) определяется аналогично $\mathbf{n}$-ой прямоугольной частичной сумме ряда (11). При $d=1$ ряды (11) и (12) совпадают соответственно с обычным одномерным тригонометрическим рядом Фурье (1) 2π-периодической функции и его сопряженным рядом (2). В случае, когда множество B пустое, будем считать, что ряд (12) совпадает с рядом (11).

Пусть $d \ge 2$. Ряд (11) (ряд (12)) называется сходящимся по кубам (в случае $d = 2$ — по квадратам) в точке $\mathbf{x} \in [0,2\pi)^d$, если последовательность кубических частичных сумм (то есть последовательность $S_n(f,\mathbf{x}) = S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})$ ($\tilde{S}_{n,B}(f,\mathbf{x}) = \tilde{S}_{\mathbf{n},B}(f,\mathbf{x})$), где $\mathbf{n} = (n, n, \ldots, n)$) имеет предел при $n \to \infty$.

Пусть $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим, как и в одномерном случае, через $\varphi(L)([0,2\pi)^d)$ множество всех определенных на множестве $[0,2\pi)^d$ и измеримых по Лебегу функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{[0,2\pi)^d} \varphi(|f(\mathbf{t})|)d\mathbf{t} < \infty.$$

Сходимость почти всюду по квадратам рядов Фурье функций $f \in L^2([0,2\pi)^2)$ была установлена Н.Р.Тевзадзе [13]. Ч.Фефферман [23] распространил этот результат на функции $f \in L^p([0,2\pi)^d)$, $p > 1$, $d \geq 2$, а затем П.Шёлин [41] доказал, что если функция f принадлежит классу $L(\ln^+ L)^d(\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi)^d)$, то ее ряд Фурье сходится по кубам почти всюду.

Наилучший на сегодня результат, касающийся расходимости по кубам на множестве положительной меры кратных рядов Фурье функций из $\varphi(L)([0,2\pi)^d)$, $d \geq 2$, также, как и в одномерном случае, принадлежит С.В.Конягину [34]: для любой функции $\varphi(u) = o(u(\ln u)^{d-1}\ln\ln u)$ при $u \to \infty$ существует функция $f \in \varphi(L)([0,2\pi)^d)$ с расходящимся всюду по кубам рядом Фурье.

В настоящей диссертации (в главе 3) рассматриваются последовательности частичных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье (кратных прямоугольных сумм Фурье) несколько более общего вида, чем кубические, а именно, последовательности $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ такие, что векторы $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ удовлетворяют условию

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leq j \leq d, \tag{13}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ — вектор с положительными координатами, а $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — бесконечно большая последовательность натуральных чисел. Доказана теорема, позволяющая переносить результаты о сходимости почти всюду одномерных рядов Фурье функций из классов $\varphi(L)([0,2\pi))$ на случай сходимости последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье вида (13) для функций из классов $\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$. Отсюда и из нашего результата [17] о сходимости почти всюду тригонометрического ряда Фурье любой функции из класса $L(\ln^+ L)(\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi))$ вытекает сходимость почти всюду последовательностей $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ с $\mathbf{n}_k$ вида (13) для функций из $L(\ln^+ L)^d(\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi)^d)$. В частном случае кубических частичных сумм это является усилением результата Шёлина [41].

В третьей главе диссертации также рассматривается задача о скорости роста на множестве полной меры последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье. Г.А.Карагулян [6, следствие 4] получил следующий аналог оценки Осколкова (10) для двумерного случая: для любой последовательности $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2)$ и для каждой функции $f \in L\ln^+ L\left([0,2\pi)^2\right)$

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = o(\ln^2 k) \quad \text{п.в.} \tag{14}$$

Нами показано, что в случае, когда отношения координат векторов $\mathbf{n}_k$ близки к постоянным по k, точнее, когда последовательность $\mathbf{n}_k$ удовлетворяет (13), оценка (14) может быть улучшена: для любой функции $f \in L(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$, $d \in \mathbb{N}$,

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = o(\ln k) \quad \text{п.в.}$$

Цель работы. Получение новых достаточных условий сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье и рядов Фурье–Уолша в терминах принадлежности порождающих эти ряды функций к классам $\varphi(L)$. Изучение поведения последовательностей частичных сумм тригонометрических рядов Фурье и подпоследовательностей этих последовательностей для функций из классов H_1^ω. Получение новых результатов о сходимости почти всюду и оценок скорости роста на множестве полной меры последовательностей прямоугольных частичных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа и теории функций, в частности, теории тригонометрических рядов Фурье и теории приближений.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты состоят в следующем.

1. Доказано, что если $f \in L(\ln^+ L)(\ln^+\ln^+\ln^+ L)$ на $[0,2\pi)$ или на $[0,1]$, то тригонометрический ряд Фурье либо, соответственно, ряд Фурье – Уолша функции f сходится почти всюду.

2. Найдено неулучшаемое условие интегрируемости мажорант частичных сумм тригонометрических рядов Фурье в терминах принадлежности порождающих их функций к классам H_1^ω.

3. При некоторых условиях на функцию $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, модуль непрерывности ω и последовательность $\{n_k\}$ построен пример функции $F \in \varphi(L) \cap H_1^\omega$ с расходящейся почти всюду подпоследовательностью $S_{n_k}(F,x)$.

4. Доказана теорема, позволяющая переносить результаты о сходимости почти всюду одномерных рядов Фурье функций из классов $\varphi(L)([0,2\pi))$ на случай сходимости последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье с почти постоянным отношением сторон прямоугольников для функций из $\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты и предложенные идеи доказательств могут быть использованы для дальнейшего изучения поведения частичных сумм тригонометрических рядов Фурье, а также рядов Фурье по другим ортогональным системам.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы автором в работах [46] – [52].

Апробация. Результаты диссертации докладывались на совместном семинаре отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений Института математики и механики УрО РАН под рук. чл.-корр. РАН Ю.Н.Субботина и проф. Н.И.Черных (многократно), на семинаре под. рук. проф. В.В.Арестова в УрГУ (неоднократно), на Научно-исследовательском семинаре по теории функций в МГУ под рук. чл.-корр. РАН Б.С.Кашина, проф. Б.И.Голубова, проф. М.И.Дьяченко и проф. С.В.Конягина, на семинаре "Ортогональные ряды" в МГУ (рук. – чл.-корр. РАН Б.С.Кашин и проф. С.В.Конягин), на семинаре под рук. проф. Ван Куньяна и проф. Лю Йонпина в Пекинском нормальном университете, на Международной конференции "Теория приближения функций и операторов", посвященной 80-летию со дня рождения С.Б.Стечкина (Екатеринбург, 2000), на Международной конференции "Гармонический анализ и приближения, II" (Ереван, 2001), на Международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященной столетию со дня рождения С.М.Никольского (Москва, 2005), на традиционной Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики" (Тула, 2005, 2006), на IV Международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения" (Новороссийск, 2006), на Шестой и Восьмой международных Казанских летних научных школах-конференциях (Казань, 2003, 2007), на 11-ой, 13-ой и 14-ой Саратовских зимних школах "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2002, 2006, 2008), на 31-ой, на 32-ой, на 34-ой, на 36-ой, на 38-ой Региональных молодежных конференциях "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2000, 2001, 2003, 2005, 2007), на традиционной ежегодной Международной летней Школе С.Б.Стечкина по теории функций (Миасс, 1999–2006, 2008; Алексин, 2007).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Общий объем работы — 162 страницы. Список литературы содержит 62 наименования.

Основное содержание работы

Глава 1 посвящена изучению условий конечности мажорант последовательностей операторов. Первый параграф является вводным. Здесь кратко повторяется история вопроса, а также формулируются используемые в главе не принадлежащие автору результаты.

В §1.2 доказана нижеследующая основная теорема этой главы. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ — произвольный отрезок на $\mathbb{R}$, $\{U_n(f,x) : n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность операторов такого вида:

$$U_n(f,x) = \int\limits_{\Delta} Q_n(x,t) f(t)dt, \quad f \in L(\Delta),$$

где ядра $Q_n(x,t) : \Delta^2 \to \mathbb{R}$ — интегрируемые по Лебегу на Δ^2 функции. Обозначим

$$U^*(f,x) = \sup_{n \geq 1} |U_n(f,x)|.$$

Теорема 1.1. *Пусть непрерывная, неубывающая и неограниченная функция* $\psi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\psi(u^2) \leq K\psi(u)$$

для некоторой постоянной $K > 1$. *Предположим, что найдутся константы* $C_0, y_0 > 0$, *такие что для характеристической функции* χ_F *произвольного измеримого множества* $F \subset \Delta$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{mes}\{x \in \Delta : U^*(\chi_F, x) > y\} \leq C_0 \frac{1}{y} \psi\left(\frac{1}{y}\right) \operatorname{mes} F, \quad 0 < y < y_0.$$

Тогда для любой $f \in L\psi(L) \ln^+ \ln^+ \psi(L)$ *почти всюду выполнено неравенство*

$$U^*(f, x) < +\infty.$$

Более того, для функции распределения мажоранты $U^*(f, x)$ *справедлива следующая оценка:*

$$\operatorname{mes}\{x \in \Delta : U^*(f, x) > z\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\bar{C} \int\limits_{\Delta} |f(x)| \psi(|f(x)|) \ln^+ \ln^+ \psi(|f(x)|) dx + \bar{C} \right),$$

$z > z_0 > 0$.

В §3 главы 1 с помощью оценки (7) и теоремы 1.1 получены следующие утверждения.

Теорема 1.2. *Если функция* f *принадлежит классу*

$$L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0, 2\pi)),$$

то тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится почти всюду.

Теорема 1.3. *Если функция* f *принадлежит классу*

$$L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0, 1]),$$

то ряд Фурье Уолша этой функции сходится почти всюду.

Отметим, что теорема 1.2 ранее была опубликована в [17] как самостоятельный результат и была включена в нашу кандидатскую диссертацию.

Доказательство теорем 1.2 и 1.3 проводится одновременно.

В §4 главы 1 мы, используя (3), (7) и теорему 1.1, получаем оценки скорости роста частичных сумм тригонометрических рядов Фурье функций из классов, промежуточных между классами $L([0,2\pi))$ и $L(\ln^+ L)(\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi))$.

Теорема 1.4. *Пусть* $A \geq 4$ *, непрерывная функция* $\psi : [A,+\infty) \to [0,+\infty)$ *такая, что*
1) $\psi(u)$ *не убывает на* $[A,+\infty)$ *;*
2) функция $(\ln u)/(\psi(u))$ *не убывает на* $[A,+\infty)$ *;*
3) $\psi(u) = o(\ln u)$ *при* $u \to +\infty$ *.*
Тогда для каждой функции $f \in L\psi(L)\ln^+\ln^+\psi(L)$ *почти всюду справедлива оценка*

$$S_n(f,x) = o\left(\frac{\ln n}{\psi(n)}\right).$$

Вторая глава диссертации посвящена поведению последовательностей частичных сумм тригонометрических рядов Фурье и подпоследовательностей этих последовательностей для функций, принадлежащих классам H_1^ω.

В первом параграфе второй главы приведены используемые в этой главе обозначения, а также формулируются применяемые здесь в доказательствах известные утверждения.

В §2.2 получено следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Существует функция* $F \in L([0,2\pi))$ *с расходящимся почти всюду тригонометрическим рядом Фурье и интегральным модулем непрерывности, удовлетворяющим условию*

$$\omega(F,\delta)_1 = O\left(\sqrt{\frac{\ln\ln(1/\delta)}{\ln(1/\delta)}}\right).$$

Доказательство теоремы 2.1 основано на следующих двух леммах (С.В.Конягина и нашей).

Лемма 2.A. (С.В.Конягин, [7, лемма (3.5)]). *Пусть* n *– достаточно большое натуральное число,* $N = 2^n$ *,* $M = 2Nn^{2n}$ *. Тогда существует такой неотрицательный тригонометрический полином* T_n *степени не* *выше* M^2 *, что*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_n(x)dx = 1,$$

и для любого $x \in [0, 2\pi)$ *найдется такое* $m \geq Nn$ *, что*

$$S_m(T_n, x) \geq 0.0002\sqrt{n}.$$

Лемма 2.1. *Предположим, что существуют последовательности*

а) функций $\{f_n\}_{n=n_0}^{\infty} \subset L$ *,*

б) 2π *-периодических множеств* $\{E_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ *,*

в) номеров $\{q_n\}_{n=n_0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *,*

г) положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=n_0}^{\infty}$

такие, что

1) $\|f_n\|_1 = 1$ *,*

2) $\operatorname{mes} E_n \geq \gamma > 0$ *,*

3) последовательности $\{\lambda_n\}$ *,* $\{q_n\}$ *,* $\{q_n^2/\lambda_n\}$ *не убывают,*

4) $\lambda_n = O(\lambda_{n-1})$ *,* $\{\lambda_n\}$ *не ограничена,*

5) для любого $x \in E_n$

$$\max_{1\leq k\leq q_n} |S_k(f_n, x)| \geq c\lambda_n.$$

Пусть модуль непрерывности ω *удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{\lambda_n} = O\left(\omega\left(\frac{1}{q_n^2}\right)\right).$$

Тогда существует функция F *из класса* H_1^{ω} *с расходящимся почти всюду рядом Фурье.*

В §2.3 рассматривается задача о наиболее общих условиях на модуль непрерывности ω, достаточных для того, чтобы для всех $f \in H_1^{\omega}$ мажоранта $M(f, \Lambda, \cdot)$ была интегрируемой. Получены следующие утверждения.

Теорема 2.2. *Пусть для модуля непрерывности* ω *и последовательности положительных чисел* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *выполнены условия*

1) последовательности $\{\lambda_n\}$ *и* $\{n/\lambda_n\}$ *не убывают;*

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(1/k)}{k\lambda_k}$ *сходится.*

Тогда для любой $f \in H_1^\omega$ *мажоранта* $M(f, \Lambda, \cdot)$ *интегрируема, и*

$$\|M(f,\Lambda,\cdot)\|_1 \le 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega(f,\pi/k)_1}{k\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_1}\|f\|_1.$$

Теорема 2.3. *Пусть модуль непрерывности* ω *и неубывающая последовательность положительных чисел* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega(1/k)}{k\lambda_k} = \infty.$$

Тогда существует функция $F \in H_1^\omega$ *такая, что мажоранта* $M(F, \Lambda, \cdot)$ *не интегрируема.*

В §2.4 доказаны леммы, необходимые для получения в последующих двух параграфах результатов о расходимости подпоследовательностей последовательности сумм Фурье. Ключевое место здесь занимает

Лемма 2.6. *Пусть последовательность* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *удовлетворяет условию* $n_{k+1}/n_k \ge 18$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого натурального числа* $m > e^{800}$ *существует функция* $f_m \in L([0, 2\pi))$ *такая, что*

1) f_m *непрерывна, имеет ограниченную вариацию на периоде* $[0, 2\pi)$,

и $\|f_m\|_1 = 1$;

2) для всех $x \in [0, 2\pi)$ $0 \le f_m(x) \le 18^{2m}$;

3) для любого $\delta > 0$

$$\omega(f_m, \delta)_1 \le 36 n_{3m}\delta;$$

4) для множества

$$G_m = \left\{x \in [0, 2\pi) : \max_{m+1 \le k \le 3m} |S_{n_k}(f_m, x)| > \frac{\ln m}{100}\right\} \setminus \operatorname{supp} f_m,$$

где $\operatorname{supp} f_m = \{x \in [0, 2\pi) : f_m(x) \ne 0\}$ *— носитель функции* f_m,

$$\operatorname{mes} G_m \ge \pi/36.$$

В §2.5 рассматриваются подпоследовательности сумм Фурье $S_{n_k}(f,x)$, у которых последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастают и существуют числа $p>1$ и $\gamma\in\mathbb{N}$ такие, что

$$\frac{n_{(k+1)^\gamma}}{n_{k^\gamma}}\geq p,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{15}$$

Для последовательностей вида (15) рассматривается задача о границах возможного усиления сформулированных выше утверждений А) и В). Получены следующие утверждения.

Теорема 2.4. *Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (15), ω — некоторый модуль непрерывности, и последовательность $\omega(1/n_k)\ln k$ не убывает и неограничена. Тогда существует функция $F\in H_1^\omega$ такая, что для почти всех $x\in[0,2\pi)$*

$$S_{n_k}(F,x)\neq o\left(\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\ln k\right).$$

Теорема 2.5. *Пусть для удовлетворяющей условию (15) последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и модуля непрерывности ω последовательность $(\omega(1/n_k)\ln k)^{-1}$ ограничена. Тогда существует функция $F\in H_1^\omega$ такая, что подпоследовательность $S_{n_k}(F,x)$ расходится почти всюду.*

Обозначим через $[x]$ целую часть числа x. Следующие утверждения как частные случаи непосредственно вытекают из теорем 2.4 и 2.5, а также из утверждений А) и В) (см. с.20).

Следствие 2.1. *Пусть $\alpha\geq1$, $\beta>0$, $n_k=[\exp(\exp((\ln k)^\alpha))]$, $k\in\mathbb{N}$, $\omega(\delta)=(\ln\ln(1/\delta))^{-\beta}$, $0<\delta\leq e^{-e}$. Тогда, если $\beta>1/\alpha$, то для любой $f\in H_1^\omega$ подпоследовательность $S_{n_k}(f,x)$ сходится почти всюду, а если $\beta\leq1/\alpha$, то найдется $F\in H_1^\omega$ такая, что $S_{n_k}(F,x)$ расходится почти всюду. Далее, если $0<\beta<1/\alpha$, $\varepsilon>0$, то для всех $f\in H_1^\omega$*

$$S_{n_k}(f,x)=o\left((\ln\ln n_k)^{\frac{1}{\alpha}-\beta+\varepsilon}\right)\quad\text{п.в.};$$

в то же время, существует функция $F\in H_1^\omega$ такая, что

$$S_{n_k}(F,x)\neq o\left((\ln\ln n_k)^{\frac{1}{\alpha}-\beta}\right)\quad\text{п.в.}$$

Пусть $\gamma \in \mathbb{N}$. Определим функции $\exp_\gamma(x)$ и $\ln_\gamma(x)$ следующим образом: $\exp_1(x) = e^x$, $\exp_\gamma(x) = e^{\exp_{\gamma-1}(x)}$, $\gamma \geq 2$; $\ln_1(x) = \ln x, \ln_\gamma(x) = \ln(\ln_{\gamma-1}(x))$, $\gamma \geq 2$.

Следствие 2.2. *Пусть $\gamma \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$. $n_k = [\exp_\gamma(k)]$, $k \in \mathbb{N}$, $\omega(\delta) = (\ln_{\gamma+1}(1/\delta))^{-\beta}$. $0 < \delta \leq 1/\exp_{\gamma+1}(1)$. Тогда, если $\beta > 1$, то для любой $f \in H_1^\omega$ подпоследовательность $S_{n_k}(f,x)$ сходится почти всюду, а если $\beta \leq 1$, то найдется $F \in H_1^\omega$ такая, что $S_{n_k}(F,x)$ расходится почти всюду. Далее, если $0 < \beta < 1$, $\varepsilon > 0$, то для всех $f \in H_1^\omega$*

$$S_{n_k}(f,x) = o\left((\ln_{\gamma+1}(n_k))^{1-\beta+\varepsilon}\right) \quad \text{п.в.};$$

в то же время, существует функция $F \in H_1^\omega$ такая, что

$$S_{n_k}(F,x) \neq o\left((\ln_{\gamma+1}(n_k))^{1-\beta}\right) \quad \text{п.в.}$$

В последнем параграфе второй главы (§2.6) доказана следующая теорема, объединяющая теорему 2.5 и результат работы С.В.Конягина [8].

Теорема 2.6. *Пусть для последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ выполняется условие (15), $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — неубывающая функция такая, что $\varphi(u) = o(u \ln\ln u)$ при $u \to \infty$, ω — модуль непрерывности, связанный с последовательностью $\{n_k\}$ соотношением*

$$\frac{1}{\ln k} = O\left(\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\right).$$

Тогда существует функция $F \in \varphi(L) \cap H_1^\omega$, у которой подпоследовательность $S_{n_k}(F,x)$ расходится почти всюду.

Отметим, что в работе [8] доказательство основано на методе Ш.В.Хеладзе [15], предусматривающем построение примера с помощью тригонометрических полиномов. В доказательстве теоремы 2.6 конструкция примера базируется на использовании кусочно-линейных функций.

Третья глава посвящена получению утверждений о сходимости и оценках скорости роста последовательностей кратных тригонометрических сумм Фурье.

В §3.1 мы напоминаем определения и обозначения в нужной для данной главы интерпретации. Отметим, что в этой главе мы, в соответствии с нашей схемой доказательства, рассматриваем в том числе и функции, определенные на $\mathbb{R}^d$ и принадлежащие различным классам $\varphi(L)(\mathbb{R}^d)$.

Второй параграф третьей главы содержит вспомогательные утверждения. Основные леммы сосредоточены в §3.3. В §3.4 и §3.5 получены следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть непрерывная функция* $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *представима в виде* $\varphi(u) = u\psi(u)$, *где функция* $\psi(u)$ *дифференцируема при* $u \geq A \geq 0$, $\psi(u)$ *и* $u\psi'(u)$ *не убывают на* $[A,+\infty)$, *а* $\psi(u)u^{-\frac{1}{2}}$ *и* $\psi'(u)$ *не возрастают на* $[A,+\infty)$. *Предположим, что тригонометрический ряд Фурье любой функции* $g \in \varphi(L)([0,2\pi))$ *сходится почти всюду. Тогда для любого* $d \in \mathbb{N}$, *для всех* $f \in \varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$, *каждого* $B \subset \{1,2,\ldots,d\}$ *и последовательности* $\mathbf{n_k}$, *удовлетворяющей условию* (13), *последовательность* $\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})$ *сходится почти всюду.*

Из теоремы 3.1 и теоремы 1.2 о сходимости почти всюду тригонометрического ряда Фурье любой функции из класса $L(\ln^+ L)(\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi))$ вытекает

Теорема 3.2 *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $B \subset \{1,2,\ldots,d\}$, *последовательность* $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ *удовлетворяет условию* (13). *Тогда, если* $f \in L(\ln^+ L)^d(\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi)^d)$, *то последовательность* $\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})$ *сходится почти всюду на* $[0,2\pi)^d$.

Теорема 3.3. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $B \subset \{1,2,\ldots,d\}$, *последовательность* $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ *удовлетворяет условию* (13). *Тогда для любой функции* $f \in L(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$ *при почти всех* $\mathbf{x} \in [0,2\pi)^d$ *справедлива оценка*

$$\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x}) = o(\ln k).$$

В частности,

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = o(\ln k) \quad \text{п.в.}$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту профессору Николаю Ивановичу Черных за ценные замечания, полезные обсуждения и внимание к работе.

Литература

[1] *Бочкарев С.В.* О проблеме гладкости функций, ряды Фурье–Уолша которых расходятся почти всюду // Доклады РАН. 2000. Т.371, № 6. С.730–733.

[2] *Бочкарев С.В.* Всюду расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша и мультипликативным системам // Успехи мат. наук. 2004. Т.59, №1. С.103–124.

[3] *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука. 1987. 344 с.

[4] *Дьяченко М.И.* Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов // Успехи мат. наук. 1992. Т.47, №5. С.97–162.

[5] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды; в 2 т. М.: Мир. 1965. Т.1. 616 с. Т.2. 538 с.

[6] *Карагулян Г.А.* Преобразование Гильберта и экспоненциальные интегральные оценки прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье // Мат. сборник. 1996. Т.187, № 3. С.55–74.

[7] *Конягин С.В.* О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье // Мат. сборник. 2000. Т. 191, № 1. С. 103–126.

[8] *Конягин С.В.* О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье // Труды ИММ УрО РАН. 2005. Т.11, № 2. С. 112–119.

[9] *Лукашенко Т.П.* Сходимость почти всюду рядов Фурье функций, суммируемых с квадратом. М.: изд-во МГУ, 1978. 109 с.

[10] *Лузин Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М.–Л.: Гос. издво технико-теоретической литературы. 1951. 550 с.

[11] *Осколков К.И.* Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Труды МИАН. Т. 167. 1985. С. 239–260.

[12] *Прохоренко В.И.* О расходящихся рядах Фурье // Мат. сборник. 1968. Т. 75 (117), № 2. С. 185–198.

[13] *Тевзадзе Н.Р.* О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом // Сообщ. АН ГССР. 1970. Т. 58, № 2. С. 277–279.

[14] *Ульянов П.Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.

[15] *Хеладзе Ш.В.* О расходимости всюду рядов Фурье функций из класса $L\varphi(L)$ // Труды Тбилисского математического института. Т. 89. 1988. С.51–59.

[16] *Черных Н.И.* О поведении частичных сумм тригонометрических рядов Фурье // Успехи мат. наук. 1968. Т.23, №6. С.3–50.

[17] *Antonov N.Yu.* Convergence of Fourier series // East Journal on Approximations. 1996. V.2, № 2. P.187–196.

[18] *Billard P.* Sur la covergence presque partout des séries de Fourier Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0,1)$. Studia Math. 1967. V.28. P. 363–388.

[19] *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta math. 1966. V.116, № 1-2. P.135-157.

[20] *Chen Y.M.* An almost ewerywhere divergent Fourier series of class $L(\log^+\log^+ L)^{1-\epsilon}$ // J. London Math. Soc. 1969. V. 44. P. 643–654.

[21] *Du Bois-Reymond P.* Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformen // Abhandl. Akad. Wissensch., München. 1876, V.12. P.1–103.

[22] *Fatou P.* Séries trigonométriques et séries de Taylor // Acta. Math. 1906. V.30. P.335–400.

[23] *Fefferman C.* On the convergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, № 5. P. 744–745.

[24] *Fefferman C.* Pointwise convergence of Fourier series // Ann. Math. 1973. V.98. P.551–571.

[25] *Gosselin R.P.* On the divergence of Fourier series // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V.9, № 2. P. 278–282.

[26] *Hardy G.H.* On the summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc.. 1913. V.12. P.365–372.

[27] *Hobson E.W.* On the convergence of series of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc. 1913. V.12. P.297–308.

[28] *Hunt R.A.* On the convergence of Fourier series // Orthogonal expansions and their continuous analogues. SIU Press, Carbondale, Illinois. 1968. P.235–255.

[29] *Hunt R.A.* Almost everywhere convergence of Walsh–Fourier series of L^2 functions // Actes Congr. int. mathematiciens, 2, 1970. Paris. 1971. P.655–661.

[30] *Kolmogoroff A.* Une série de Fourier – Lebesgue divergente preque partout // Fund. math. 1923. V. 4. P. 324–328.

[31] *Kolmogoroff A.* Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier // Fund. math. 1925 V.7. P.24–29.

[32] *Kolmogoroff A.* Une série de Fourier – Lebesgue divergente partout // C. r. Acad. sci. Paris. 1926. V. 183. P. 1327–1329.

[33] *Kolmogoroff A., Seliverstoff G.* Sur la convergence des séries de Fourier // Rend. Acad. Naz. Lincei. 1926. V.3. P.307–310.

[34] *Konyagin S.V.* On divergence of trigonometric Fourier series over cubes // Acta Sci. Math. (Szeged). 1995. V.61. P.305–329.

[35] *Körner T.W.* Ewerywhere divergent Fourier series // Colloq. Math. 1981. V. 45, № 1. P. 103–118.

[36] *Lacey M., Thiele C.* A proof of boundedness of the Carleson operator // Mathematical Research Letters. 2000. V.7. P. 361–370.

[37] *Littlewood J.E., Paley R.E.A.C.* Theorems on Fourier series and power series // (I) Journal London Math. Soc.. 1931. V.6. P. 230–233. (II) Proc. London Math. Soc.. 1936. V.42. P.52–89, (III) Proc. London Math. Soc.. 1937. V.43. P.105–126.

[38] *Plancherel M.* Sur la convergence des séries de fonctions ortogonales // C. r. Acad. sci. Paris. 1913. V.157. P.539–541.

[39] *Plessner A.* Über Konvergenz von trigonometrischen Riehen // Journal für reine und angew. Math.. 1926. V.155. P.15–25.

[40] *Sjölin P.* An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series // Arkiv för mat. 1969. V.7. P.551–570.

[41] *Sjölin P.* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Arkiv för mat. 1971. V. 9, № 1. P. 65–90.

[42] *Sjölin P., Soria F.* Remarks on a theorem by N.Yu.Antonov // Studia math. 2003. V.158, № 1. P.79–96.

[43] *Tandori K.* Ein Divergenzsats für Fourierreihen // Acta Sci. math. 1969. V. 30. P. 43–48.

[44] *Totik V.* On the divergence of Fourier series// Publ. Math. (Debrecen). 1982. V.29, № 3–4. P. 251–264.

[45] *Weyl H.* Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunctionen fortschreiten // Math. Ann. 1909. V.67. P.225–245.

[46] *Antonov N.Yu.* Conditions for the finiteness of majorants for sequences of operators and convergence of Fourier series // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl.1. 2001. P. S1–S19.

[47] *Антонов Н.Ю.* О сходимости почти всюду по кубам кратных тригонометрических рядов Фурье // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68, № 2. С. 3–22.

[48] *Антонов Н.Ю.* Интегрируемость мажорант сумм Фурье и расходимость рядов Фурье функций с ограничениями на интегральный

модуль непрерывности // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 5. С.651–665.

[49] *Антонов Н.Ю.* О скорости роста последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Труды Института математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. Т. 11, № 2. С. 10–29.

[50] *Антонов Н.Ю.* О расходимости подпоследовательностей сумм Фурье функций с ограничениями на интегральный модуль непрерывности // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, № 1. С.12–26.

[51] *Антонов Н.Ю.* О сходимости почти всюду последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Труды Института математики и механики. 2008. Т.14, №3. С. 3–18.

[52] *Антонов Н.Ю.* Расходящиеся почти всюду подпоследовательности сумм Фурье функций из $\varphi(L) \cap H_1^\omega$ // Мат. заметки. 2009. Т.85, № 4 . С.502–515.

Подписано в печать 10.04.2009.
Формат 60x84 16. Объем 2 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 73
Размножение с готового оригинал-макета в типографии УрО РАН
620219, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18.