На правах рукописи

Плотн

ПЛОТНИКОВА Елена Александровна

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НА ГРУППАХ КАРНО

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2008

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Водопьянов Сергей Константинович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, доцент
Васильчик Михаил Юлианович

доктор физико-математических наук, доцент
Клячин Алексей Александрович

Ведущая организация:
Российский университет дружбы народов

Защита состоится 4 сентября 2008 года в 16 – 00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 1 августа 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. В 30-е годы прошлого века при решении уравнений с частными производными С. Л. Соболев заложил основы теории функций с обобщенными производными, разные аспекты которой отражены в его монографии [12], см. также [13]. Дальнейшее развитие этого направления было мотивированно применениями классов Соболева к теории уравнений с частными производными и другим областям, см., например, книги С. М. Никольского [8], Е. М. Стейна [14], О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1], В. М. Гольдштейна и Ю. Г. Решетняка [4], В. Г. Мазьи [6], Ю. Г. Решетняка [9], В. И. Буренкова [16] и других авторов.

Большое значение в теории функциональных пространств, теории дифференциальных уравнений с частными производными и других вопросах имеют интегральные представления функций, заданных в областях евклидовых пространств.

В работах последних лет интенсивно изучаются функции классов Соболева на неголономных многообразиях и более общих метрических структурах. Внимание к этим вопросам обусловлено многочисленными приложениями к исследованию свойств решений субэллиптических дифференциальных уравнений, см., например, работы Л. Хермандера [26], Д. Джерисона [27], Л. Ротшильд и Е. Стейна [29], А. Санчес-Калле [30], Л. Капоньи, Д. Даниелли и Н. Гарофало [18,19], Б. Франки и Е. Ланконелли [23], к изучению квазиконформного анализа, см. работы С. К. Водопьянова [2,31], Н. С. Даирбекова [20], Ю. Хейнонена и И. Холопайнена [25], и ко многим смежным вопросам.

Напомним, что пространства Карно — Каратеодори — это гладкие многообразия с выделенным касательным подрасслоением, удовлетворяющим некоторым алгебраическим условиям. Векторные поля упомянутого подрасслоения называют горизонтальными. Геометрия пространств Карно — Каратеодори локально моделируется геометрией подходящей группы Карно. Классы Соболева функций, заданных в областях пространств Карно — Каратеодори, определяются через производные вдоль векторных полей из выделенного подрасслоения.

В некоторых работах интегральными представлениями функций, определенных в пространствах Карно — Каратеодори, называют неравенства вида

$$|f(x) - C_1| \leqslant C_2 \int\limits_{B(z,C_3 r)} \frac{|\nabla_L f|(y)}{\rho(x,y)^{\nu-1}}\, dy, \tag{1}$$

где $x \in B(z,r)$, а C_2, C_3 не зависят от x, r и f, $\nabla_L f$ — вектор-функция, компоненты которой — всевозможные горизонтальные производные первого порядка компонент вектор-функции f, $\rho(x,y)$ — метрика Карно — Каратеодори, ν — размерность Хаусдорфа относительно этой метрики.

Интегральные представления вида (1) могут быть использованы при доказательстве неравенств Пуанкаре и Соболева, однако, доказательство многих результатов теории пространств Соболева требуют более точных соотношений. Примером таких результатов могут служить коэрцитивные оценки для дифференциальных операторов. Для вывода этих оценок необходимы интегральные представления типа Соболева, которые принято записывать в виде

$$f(x) = P(f) + K(\nabla f), \tag{2}$$

где $P(f)$ — некоторый полином, а K — интегральный оператор с контролируемой особенностью.

На группах Гейзенберга интегральные представления функций вида (2) получены в работе Н. Н. Романовского [10], который естественно обобщил подходы С. Л. Соболева и Ю. Г. Решетняка [9], изначально реализованные в евклидовом пространстве. В нашей работе мы выводим интегральные представления вида (2) на группах Карно.

Как было отмечено ранее, теория пространств Соболева на неголономных многообразиях имеет приложение к теории субэллиптических уравнений, представляющих собой важный подкласс гипоэллиптических уравнений, см. [26]. Кроме того, они возникают в квазиконформном анализе, в финансовой математике и нейробиологии и т. д. Исследование свойств регулярности субэллиптических уравнений начато в работах [18, 19, 23, 26, 27, 29].

Этим исследованиям предшествовало обширное развитие теории эллиптических уравнений. А именно, в 50-е годы были изучены линейные уравнения, исследован класс квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью, частным случаем которых является уравнение Эйлера вариационной задачи для функционала

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u, u_x)\, dx.$$

В конце 60-х годов Н. Н. Уральцева [15] исследовала регулярность решения вариационной задачи для квазирегулярного функционала

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p\, dx.$$

В нашей работе рассматривается один класс квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью, которые являются уравнениями Эйлера для функционала вида $I(u)$ на группе Гейзенберга. Более конкретно, исследуется вопрос регулярности слабого решения $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ уравнения

$$-\sum_{i=1}^{2n} X_i A_i(q, u, X_1 u, \ldots, X_{2n} u) = f(q, u, X_1 u, \ldots, X_{2n} u). \tag{3}$$

В линейном случае, когда $A_i(q, u, \xi) = \xi_i$, уравнение (3) является сублапласианом, изучением которого занимались многие авторы, см., например, [21, 28].

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Цель работы состоит в том, чтобы

1) вывести интегральные представления Соболева вида (2) для функций, определенных в областях групп Карно;

2) исследовать вопрос о регулярности слабых решений квазилинейных субэллиптических уравнений вида (3) на группах Гейзенберга.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ. В диссертационной работе используются методы теории пространств Соболева, эллиптических и субэллиптических уравнений, а также классические методы анализа.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и снабжены строгими доказательствами.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Результаты работы имеют теоретическое значение. Методы и результаты работы могут быть применены в теории пространств Соболева на неголономных многообразиях, теории субэллиптических дифференциальных уравнений, в квазиконформном анализе и др.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации докладывались на XLI –XLII, XLIV – XLV Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2003, 2004, 2006, 2007 гг; Диплом третьей степени в 2003 г.); на Международной школе-конференции, посвященной 75-летию академика Ю. Г. Решетняка (Новосибирск, 23 августа – 3 сентября 2004 г.); на Международной конференции, посвященной 100-летию академика С. М. Никольского (Москва, 23 – 29 мая 2005 г.); на Российской конференции, посвященной 50-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН «Математика в современном мире» (Новосибирск, 17 – 23 сентября 2007 г.); на десятой и одиннадцатой Региональных конференциях по математике «МАК» (Барнаул, 2007, 2008 гг.); на семинаре «Геометрический анализ» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством д.ф.-м.н. С. К. Водопьянова; на семинаре отдела анализа и геометрии Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством академика РАН Ю. Г. Решетняка.

По результатам работы получена вторая премия на конкурсе им. М. А. Лаврентьева (2005 г.), диплом на Открытом конкурсе на лучшую научную работу студентов по естественным, техническим и гуманитарным наукам в вузах Российской Федерации (2005 г.) и стипендия Сибирского математического журнала (2007 г.).

ПУБЛИКАЦИИ. Результаты диссертации опубликованы в [32–42].

ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИССЕРТАЦИИ. Диссертация изложена на 82 страницах, состоит из введения, пяти глав и списка литературы из 69 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ. Во введении дается краткий обзор истории по теме диссертации и приводится краткое изложение результатов диссертации.

В первой главе диссертации приводятся основные определения и обозначения, а также ссылки на известные результаты, которые будут использоваться в работе. Основным является понятие группы Карно.

Определение 1.1. *Группой Карно* $\mathbb{G}$ *глубины* m *называется связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли* V *которой градуирована так, что* $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, *где* $[V_1, V_j] = V_{j+1}$, $j < m$, $[V_1, V_m] = 0$.

Пусть $\dim V_i = n_i$, $N = n_1 + \cdots + n_m$, левоинвариантные векторные поля $X_1, \ldots, X_{n_1}$ образуют базис V_1, $X_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}, \ldots, X_{n_1+\cdots+n_i}$,

$1 < i \leqslant m$, — базис V_i, образованный некоторыми коммутаторами порядка $i-1$ полей пространства V_1. Векторные поля $X_1, \ldots, X_{n_1}$ будем называть *горизонтальными*. Размерность Хаусдорфа группы $\mathbb{G}$ относительно заданной метрики равна $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i n_i$.

Глава 1 состоит из пяти параграфов. В § 1.1 приведены определения двухступенчатых групп Карно и групп Гейзенберга, которые являются модельными случаями групп Карно. В § 1.2 определяются функциональные пространства Соболева и Гёльдера на группах Карно, а также формулируется теорема вложения. В следующем параграфе приведены известные интегральные неравенства Гёльдера и Минковского, которые используются при получении интегральных оценок.

В § 1.4 вводятся два типа областей, для которых будут доказаны основные результаты, кроме этого сформулирована лемма Уитни о декомпозиции, которая доказана в работе [22].

Определение 1.9. *Открытое множество $W \subset \mathbb{G}$ звездно в области $U \subset \mathbb{G}$ относительно некоторого шара $B \Subset U$, если для любых точек $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{y} \in B$ точка $\mathbf{x} \cdot \delta_t(\mathbf{x}^{-1} \cdot \mathbf{y})$ принадлежит области U для всякого $t \in (0,1]$.*

Определение 1.10. *Область U называется областью Джона ($U \in J(\alpha, \beta), 0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$), если существует выделенная точка $\mathbf{p}_0 \in U$ такая, что для любой точки $\mathbf{p} \in U$ существует спрямляемая кривая $\psi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l \leqslant \beta$, для которой $\psi(0) = \mathbf{p}$, $\psi(l) = \mathbf{p}_0$ и $\operatorname{dist}[\psi(s), \partial U] \geqslant \frac{\alpha s}{l}$, для любого $s \in [0, l]$.*

В § 1.5 даются определения горизонтальных и однородных полиномов на группах Карно и приводятся два свойства этих полиномов, одно из которых следует из результатов работы С. К. Водопьянова и И. М. Пупышева [3], а второе доказано в диссертации. Кроме этого, вводится определение однородной функции на группах Карно.

Вторая глава посвящена интегральным представлениям типа Соболева функций, определенных в областях групп Карно [41, 42]. В евклидовом случае интегральные представления данного вида были получены Ю. Г. Решетняком [9], метод которого был распространен на группы Гейзенберга в статье Н. Н. Романовского [10]. Основные результаты главы — теоремы 2.1, 2.2 и 2.3.

Глава 2 состоит из четырех параграфов. В § 2.1 доказана теорема 2.1, в которой получены интегральные представления функций, заданных в звездных областях групп Карно, через первые производные. Кроме этого, в лемме 2.1 сформулировано свойство полученного ядра Г.

Пусть $U \subset \mathbb{G}$ ограниченная область, $U' \subset \mathbb{G}$ звездна в области U относительно шара $B(\mathbf{a}, R)$, функция $\varphi \in C_0^\infty(B(\mathbf{a}, R))$ удовлетворяет соотношению $\int\limits_{B(\mathbf{a},R)} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1$.

Теорема 2.1. *Если функция f принадлежит классу $C^\infty(U)$, то для точек $\mathbf{x}$ области U' справедливо следующее интегральное представление:*

$$f(\mathbf{x}) = \int\limits_U f(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int\limits_U \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \varphi)\Big(\sum_{i=1}^N P_i(\mathbf{x}^{-1} \cdot \mathbf{y}) X_i f(\mathbf{y})\Big)\, d\mathbf{y},$$

где $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \varphi) = -\int\limits_1^\infty \varphi(\mathbf{x} \cdot \delta_t(\mathbf{x}^{-1} \cdot \mathbf{y}))t^{\nu-1}\, dt$, *а* $P_i(\mathbf{x})$ *— однородный полином степени* d_i.

В §§ 2.2–2.3 рассматривается случай двухступенчатых групп Карно, на которых первые вертикальные производные представляются в виде линейной комбинации горизонтальных производных второго порядка. Тем самым, на двухступенчатых группах Карно в интегральном представлении, полученном в теореме 2.1, можно "перекинуть" одну горизонтальную производную на ядро (это позволяет сделать более тонкое, чем в лемме 2.1, свойство ядер, которое установлено в лемме 2.2). Таким образом, в теореме 2.2 получены интегральные представления только через первые горизонтальные производные. Далее, доказана теорема 2.3, в которой выведены интегральные представления функций, заданных в звездных областях двухступенчатых групп Карно, через горизонтальные производные произвольного порядка.

Теорема 2.2. *Для любой функции f класса $C^\infty(U)$ в области U' справедливо следующее интегральное представление:*

$$f(\mathbf{x}) = \int\limits_U f(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int\limits_U \sum_{i=1}^{n_1} K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) X_i f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in U',$$

где $K_i \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{x} = \mathbf{y}\})$, *функции* K_i *финитны по второму аргументу и удовлетворяют неравенству*

$$|X_\mathbf{x}^I X_\mathbf{y}^J K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant C|\mathbf{x}^{-1} \cdot \mathbf{y}|^{-(\nu-1+|I|_h+|J|_h)}.$$

Теорема 2.3. *Пусть функция f принадлежит классу $C^\infty(U)$, k – любое натуральное число. Тогда в области U' справедливо следующее интегральное представление:*

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) = \int\limits_U & P_k(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0) f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \\
&+ \int\limits_U \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n_1} K_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0) X_{i_1}\ldots X_{i_k} f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},
\end{aligned} \tag{4}
$$

где $\mathbf{x} \in U'$; $P_k(\cdot,\mathbf{y};\varphi_0)$ – горизонтальный полином порядка $k-1$, $\operatorname{supp} P_k(\mathbf{x},\cdot;\varphi_0) \subset B$, $|P_k(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0)| \leqslant C_k(r,R,\varphi_0)$; $K_{i_1\ldots i_k} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2} \times \mathbb{R}^{n_1+n_2} \setminus \{\mathbf{x}=\mathbf{y}\})$, функции $K_{i_1\ldots i_k}$ финитны по второму аргументу и удовлетворяют неравенству

$$
|X_{\mathbf{x}}^I X_{\mathbf{y}}^J K_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leqslant C|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^{-(\nu-k+|I|_h+|J|_h)}. \tag{5}
$$

В § 2.4 сформулирована теорема 2.4 [11], позволяющая дифференцировать выведенные интегральные представления вдоль горизонтальных векторных полей. В евклидовом случае этот результат доказан С. Г. Михлиным [7]. Кроме этого, доказана лемма 2.4, показывающая, что ядра интегральных представлений действительно удовлетворяют условиям теоремы 2.4.

Третья глава посвящена доказательству неравенств Пуанкаре. В параграфе 3.1.1 с помощью интегральных представлений через первые производные получены неравенства Пуанкаре на общих группах Карно (теорема 3.1). Далее, в § 3.1.2, используя интегральные представления через горизонтальные производные высших порядков на двухступенчатых группах Карно, доказано неравенство более общего вида, которое принято называть слабым неравенством Пуанкаре:

Теорема 3.2. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда для всякого $k \in \mathbb{N}$ найдется проекционный оператор P^k, переводящий функции класса $W_p^k(U)$ в горизонтальные полиномы степени не выше $k-1$, такой, что справедливо неравенство*

$$
\|X^I(f - P_k f)\|_{L_p(B)} \leqslant C r^{k-|I|_h} \Big\| \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1,1}\ldots X_{i_k,1} f \Big\|_{L_p(\kappa_1 B)},
$$

где I – мультииндекс, $|I|_h \leqslant k$, константа C зависит от r,ν,p и выполнено соотношение $k - |I|_h > \frac{\nu}{p}$.

В § 3.2 доказывается обобщенное неравенство Пуанкаре для функций, определенных в областях Джона общих группах Карно, при условии выполнения слабого неравенства. Следовательно, принимая во внимание результаты § 3.1.2, обобщенное неравенство Пуанкаре на двухступенчатых группах Карно имеет место без дополнительных условий. В этом параграфе используется метод работы [24], который основывается на лемме Уитни о декомпозиции.

Условие 1. *Предположим, что для фиксированного $1 < p < \infty$ и для любой функции $f \in W_p^k(\mathbb{G})$ выполняется слабое неравенство Пуанкаре*

$$\|X^I(f - P_B f)\|_{L_p(B)} \leqslant C r^{k-|I|_h} \Big\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1} \dots X_{i_k} f \Big\|_{L_p(\kappa_1 B)},$$

где B — некоторый шар, I — мультииндекс, $|I|_h \leqslant k$, константа C зависит от r, ν, p и $P_B f$ — горизонтальный полином степени $k-1$.

Основным результатом главы 3 является следующая

Теорема 3.3. *Пусть выполняется условие 1, и $U \in J(\alpha, \beta)$. Тогда для всякого $k \in \mathbb{N}$ найдется проекционный оператор P, переводящий функции класса $W_p^k(U)$ в горизонтальные полиномы степени не выше $k-1$, такой, что справедливо неравенство*

$$\|X^I(f - Pf)\|_{L_p(U)} \leqslant C(\operatorname{diam} U)^{k-|I|_h} \Big\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1} \dots X_{i_k} f \Big\|_{L_p(U)},$$

где I — мультииндекс, $|I|_h \leqslant k$, константа C зависит от $\nu, p, \alpha, \beta, \kappa$ и выполнено соотношение $k - |I|_h > \frac{\nu}{p}$.

В четвертой главе на группах Гейзенберга исследуется вопрос о регулярности слабых решений линейных субэллиптических уравнений вида

$$-\sum_{i,j=1}^{2n} X_i[a_{ij} X_j w + a_i w] + \sum_{i=1}^{2n} b_i X_i w + a w = g + \sum_{i=1}^{2n} X_i g_i.$$

Полученные результаты обобщают результаты О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой [5].

В § 4.1 формулируются и частично доказываются вспомогательные утверждения. В § 4.2 вводится класс функций $\mathfrak{B}(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \frac{1}{s})$ и доказывается, что функции данного класса удовлетворяют условию Гёльдера (теорема 4.2).

Определение 4.1. *Функция $w(q)$ принадлежит классу $\mathfrak{B}(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \frac{1}{s})$, если $w(q) \in W^{1,2}(\Omega)$, $\sup\limits_{\Omega}|w| \leqslant M$ и функции $v(q) = \pm w(q)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\int\limits_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} |Xv|^2\,dq \leqslant \left\{\gamma\sigma^{-2}\rho^{-2(1-\nu/s)}\max_{A_{k,\rho}}(v(q)-k)^2 + \gamma_1\right\}(\operatorname{mes} A_{k,\rho})^{1-2/s},$$

где $A_{k,\rho} = \{q \in B(\rho) : v(q) > k\}$, $\sigma \in (0,1)$, $B(\rho) \subset \Omega$ и $B(\rho - \sigma\rho)$ — произвольные концентрические шары, k — произвольное число такое, что $k \geqslant \sup\limits_{B(\rho)} v(q) - 2M$, $s > \nu, M, \gamma, \gamma_1$ — фиксированные положительные числа.

Теорема 4.2. *Пусть $w(q) \in \mathfrak{B}(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \frac{1}{s})$ и шар $B(\rho_0) \subset \Omega$. Тогда существует $\alpha > 0$, что для любого концентрического с $B(\rho_0)$ шара $B(\rho), \rho \leqslant \rho_0$, выполняется неравенство*

$$\operatorname{osc}\{w; B(\rho)\} \leqslant C(\rho/\rho_0)^\alpha,$$

где $C = C(\nu, \rho_0, \gamma, \gamma_0, t, M, s)$. То есть класс $\mathfrak{B}(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \frac{1}{s})$ вкладывается в $C^\alpha(\Omega)$.

Далее в §4.3 показывается, что в области Джона Ω слабое решение $w \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ линейного уравнения принадлежит $\mathfrak{B}(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \frac{1}{s})$, а, следовательно, $C^\alpha(\Omega)$ для некоторого $\alpha > 0$. Основным результатом главы 4 является следующая

Теорема 4.3. *Пусть Ω — область Джона, $w \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ — слабое решение уравнения*

$$-\sum_{i,j=1}^{2n} X_i[a_{ij}X_jw + a_iw] + \sum_{i=1}^{2n} b_iX_iw + aw = g + \sum_{i=1}^{2n} X_ig_i,$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям: существуют константы $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ такие, что для $s > \nu$ верны соотношения:

$$\mu_1\xi^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{2n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu_2\xi^2,$$

$$\Big\|\sum_{i=1}^{2n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{2n} b_i^2 + |a|\Big\|_{s/2,\,\Omega} \leqslant \mu_3, \quad \Big\|g\Big\|_{s/2,\,\Omega} \leqslant \mu_3, \quad \Big\|\sum_{i=1}^{2n} g_i^2\Big\|_{s,\,\Omega} \leqslant \mu_3.$$

Тогда $w \in C^\alpha_{\text{loc}}(\Omega)$.

В пятой главе исследуются слабые решения $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ квазилинейного субэллиптического уравнения

$$-\sum_{i=1}^{2n} X_i A_i(q, u, X_1 u, \ldots, X_{2n} u) = f(q, u, X_1 u, \ldots, X_{2n} u), \tag{6}$$

где коэффициенты удовлетворяют некоторым специальным условиям.

Полученные результаты обобщают теоремы Л. Капоньи [17], в работе которого на группах Гейзенберга исследуются свойства регулярности решений уравнения

$$-\sum_{i=1}^{2n} X_i A_i(q, X_1 u, \ldots, X_{2n} u) = f(q).$$

Глава состоит из трех параграфов. В § 5.1 приведены вспомогательные утверждения. В § 5.2 введено определение разностного частного и доказана теорема 5.1, позволяющая "дифференцировать" основное уравнение вдоль левоинвариантных векторных полей. Кроме этого, в теоремах 5.2 и 5.3 устанавливается, что вертикальная и горизонтальные производные слабого решения уравнения (6) принадлежат пространству $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и являются слабыми решениями линейных уравнений вида

$$-\sum_{i,j=1}^{2n} X_i[a_{ij} X_j w + a_i w] + \sum_{i=1}^{2n} b_i X_i w + a w = g + \sum_{i=1}^{2n} X_i g_i.$$

В § 5.3, основываясь на полученных результатах и результатах 4 главы, доказывается гёльдеровость риманова градиента слабого решения уравнения (6). Основным результатом пятой главы является

Теорема 5.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ — область Джона, $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — слабое решение уравнения*

$$-\sum_{i=1}^{2n} X_i A_i(q, u, X_1 u, \ldots, X_{2n} u) = f(q, u, X_1 u, \ldots, X_{2n} u),$$

где $A_i(q, u, \xi) : \mathbb{H}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ — дифференцирумая функция. Кроме этого, выполняются следующие условия на коэффициенты: существуют константы $C_1 > 0, C_2 > 0, C_3 > 0$ такие, что

$$C_1^{-1} |\eta|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} A_i(q, u, \xi) \eta_i \eta_j \leqslant C_1 |\eta|^2,$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{2n}\Big|\frac{\partial}{\partial u}A_i(q,u,\xi)\Big|^2\Big)^{1/2}\leqslant C_2(1+|\xi|)$$

и

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{2n}\Big|\frac{\partial}{\partial q_j}A_i(q,u,\xi)\Big|^2\Big)^{1/2}\leqslant C_3(1+|\xi|);$$

существует константа $\mu>0$, *что для* $r>\nu$ *и любого* $1\leqslant i_0\leqslant 2n$

$$\Big\|\sum_{i=1}^{2n}\Big(\frac{\partial}{\partial u}A_i(q,u,Xu)\Big)^2+\sum_{j=1}^{2n}\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_j}f(q,u,Xu)\Big)^2$$
$$+\Big|\frac{\partial}{\partial u}f(q,u,Xu)\Big|\Big\|_{r/2,\Omega}\leqslant\mu,$$
$$\Big\|\frac{\partial}{\partial q_{2n+1}}f(q,u,Xu)\Big\|_{r/2,\Omega}\leqslant\mu,$$
$$\Big\|\sum_{i=1}^{2n}\Big(\frac{\partial}{\partial q_{2n+1}}A_i(q,u,Xu)\Big)^2\Big\|_{r,\Omega}\leqslant\mu,$$
$$\Big\|\frac{\partial}{\partial q_{i_0}}f(q,u,Xu)+\frac{\partial}{\partial \xi_{j_0}}f(q,u,Xu)Tu+\sum_{i,j=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial \xi_j}A_i(q,u,Xu)X_jTu$$
$$+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial u}A_i(q,u,Xu)Tu+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial q_{2n+1}}A_i(q,u,Xu)\Big\|_{r/2,\Omega}\leqslant\mu,$$
$$\Big\|\sum_{i=1}^{2n}\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_{j_0}}A_i(q,u,Xu)Tu+\frac{\partial}{\partial q_{i_0}}A_i(q,u,Xu)\Big)^2\Big\|_{r,\Omega}\leqslant\mu,$$

где $j_0=i_0+n$, *при* $1\leqslant i_0\leqslant n$, *и* $j_0=i_0-n$, *при* $n+1\leqslant i_0\leqslant 2n$.

Тогда существует риманов градиент $\nabla u\in C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *где* $\alpha\in(0,1)$ — *некоторое число.*

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д. ф.-м. н. С. К. Водопьянову за постановку задачи, постоянное внимание и неоценимую помощь в работе.

Список литературы

[1] *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

[2] *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.

[3] *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Теорема типа Уитни о продолжении функций на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 731–752.

[4] *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.

[5] *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

[6] *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд–во Ленингр. гос. ун–та, 1985.

[7] *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.

[8] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

[9] *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд–во Ин–та математики СО РАН, 1996.

[10] *Романовский Н. Н.* Интегральные представления и теоремы вложения для функций, заданных на группах Гейзенберга // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 4. С. 456–459.

[11] *Романовский Н. Н.* О проблеме Михлина на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 193–206.

[12] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа, в математической физике. М.: Наука, 1988.

[13] *Соболев С. Л.* Избранные труды. Новосибирск: Изд–во Ин–та математики СО РАН, 2006. Т. II.

[14] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Мир, 1973.

[15] *Уральцева Н. Н.* Вырождающиеся квазилинейные эллиптические системы // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 184–222.

[16] *Burenkov V. I.* Sobolev spaces on domains. Teubner–Texte zur Mathematik. Stuttgard-Leipzig. B.137. 1998.

[17] *Capogna L.* Regularity of quasilinear equations in Heisenberg group // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. P. 867–889.

[18] *Capogna L., Danielli D., Garofalo N.* An embedding theorem and the Harnack inequality fjr njnlinear subelliptic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1993. V. 18. P. 1765–1794.

[19] *Capogna L., Danielli D., Garofalo N.* Capacitary estimates and the local behavior of solutions to nonlinear subelliptic equations // Amer. J. Math. 1996. V. 118. P. 1153–1196.

[20] *Dairbekov N. S.* Mappings with Bounded Distortion of Two-Step Carnot Groups // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд–во Ин–та математики СО РАН, 2000. P. 122–155.

[21] *Folland G. B., Stein I.* Estimates for the complex and analysis on the Heisenberg group, spaces on homogeneous groups // Comm. Pure Appl. Math. 1974. V. 27. P. 459–522.

[22] *Folland G. B., Stein I.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton, NJ: Amer. Math. Soc., 1982.

[23] *Franchi B., Lanconelli E.* Hölder regularity theorem for a class of non uniformly elliptic operators with measurable coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. 1983. V. 10, № 4. P. 523–541.

[24] *Garofalo N., Nhieu D. M.* Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces // Commun. Pure Appl. Math. 1996. V. 49, № 10. P. 1081–1144.

[25] *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular maps on Carnot groups // J. Geom. Anal. 1997. V. 7, № 1. P. 109–148.

[26] *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.

[27] *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hormander's condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, № 2. P. 503–523.

[28] *Kohn J. J.* Pseudo–differential operators and hypoellipticity //Proc. Symp. Pure Math, 23, Amer. Math. Soc., 1973.

[29] *Rotschild G. B., Stein I.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.

[30] *Sánches-Calle A.* Fundamental solutions and geometry of sums of squares of vector fields // Invent.Math. 1984. V. 78. P. 143–160.

[31] *Vodopyanov S. K.* Foundations of the Theory of Mappings with Bounded Distortion on Carnot Groups // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. 2007. V. 424. P. 303–344.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[32] *Саженкова Е. А.* (Плотникова Е. А.) Об интегральных представлениях на группах Карно // Материалы XLI Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск: Изд–во НГУ, 2003. С. 38–39. **III место**

[33] *Саженкова Е. А.* (Плотникова Е. А.) Интегральные представления на общих группах Карно // Материалы XLII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск: Изд–во НГУ, 2004. С. 78–79. стр.

[34] *Саженкова Е. А.* (Плотникова Е. А.) Теоремы вложения на двухступенчатых группах Карно // Тезисы Международной школы-конференции по анализу и геометрии, посвященной 75-летию академика Ю. Г. Решетняка, 23 августа – 2 сентября 2004 г. Новосибирск: Изд-во Ин–та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2004. С. 227.

[35] *Саженкова Е. А.* (Плотникова Е. А.) Интегральные представления на двухступенчатых группах Карно // Тезисы Международной конференции, посвященной 100-летию академика С. М. Никольского, 23 – 29 мая 2005 г. М.: Изд-во Математического института им. В. А. Стеклова РАН, 2005. С. 196.

[36] *Плотникова Е. А.* Регулярность решений квазилинейных уравнений субэллиптического типа // Материалы XLIV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск: Изд–во НГУ, 2006. С. 51–52.

[37] *Плотникова Е.А.* Обобщенное неравенство Пуанкаре на областях Джона двухступенчатых групп Карно // Материалы XLV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск: Изд–во НГУ, 2007. С. 104–105.

[38] *Плотникова Е.А.* Обобщенное неравенство Пуанкаре на областях Джона общих групп Карно // Материалы десятой Региональной конференции по математике «МАК-2007». Барнаул: Изд–во АлтГУ, 2007. С. 28–30.

[39] *Плотникова Е.А.* Регулярность решений квазилинейных уравнений субэллиптического типа // Материалы Российской конференции «Математика в современном мире», посвященной 50-летию Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН, 17 – 23 сентября 2007 г. С. 87.
http://math.nsc.ru/conference/conf50/Abstracts.pdf

[40] *Плотникова Е.А.* Регулярность решений квазилинейных уравнений субэллиптического типа на группах Гейзенберга // Материалы одиннадцатой Региональной конференции по математике «МАК-2008». Барнаул: Изд–во АлтГУ, 2008. С. 21–23.

[41] *Плотникова Е. А.* Интегральные представления и обобщенное неравенство Пуанкаре на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. № 2. С. 421–437.

[42] *Плотникова Е. А.* Интегральные представления функций класса Соболева на областях групп Карно // Математические труды. 2008. Т. 11. № 1. С. 113–131.

Плотникова Елена Александровна

Пространства Соболева и субэллиптические уравнения на группах Карно

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 25.07.08 г. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 1. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 100 экз. Заказ № 283

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.