На правах рукописи

ЕГОРОВ Дмитрий Владимирович

Тэта-функции на косых произведениях двумерных торов

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2009

Работа выполнена в НИИ математики
при Якутском государственном университете.

Научный руководитель:
чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н.,
профессор Тайманов Искандер Асанович

Официальные оппоненты:
д. ф.-м. н. Бабич Михаил Васильевич,
д. ф.-м. н., профессор Чуешев Виктор Васильевич

Ведущая организация:
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 1 октября 2009 года в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу:
630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 3 августа 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Гладкое многообразие M размерности $2n$ называется симплектическим, если на нем существует невырожденная 2-форма ω, являющаяся замкнутой ($d\omega = 0$). Форма невырождена если $\omega^n \neq 0$ всюду на M, то есть ω^n пропорциональна форме объема.

Исторически первыми примерами симплектических многообразий являлись кэлеровы многообразия. Компактное комплексное многообразие называется кэлеровым, если на нем существует эрмитова метрика $h_{ij}dz^i d\bar{z}^j$ такая, что ассоциированная с ней форма

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \cdot h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

замкнута.

Классическая теорема Кодаиры (см. например[1]) утверждает, что кэлерово многообразие можно вложить в комплексное проективное пространство тогда и только тогда, когда оно ходжево. Данное условие означает, что интегралы 2-формы, ассоциированной с кэлеровой метрикой, по всем 2-циклам являются целыми числами.

Для комплексных торов, удовлетворяющих условию ходжевости (абелевых многообразий), строятся канонические вложения в комплексное проективное пространство, которые описываются классической теоремой Лефшеца (см. например[2]). Отображение вложения составлено из сечений специального линейного расслоения над вкладываемым тором. Данные сечения это в точности классические тэта-функции Римана.

В симплектической категории аналогом ходжева многообразия является замкнутое многообразие с целочисленной симплектической формой. Здесь мы отказываемся от интегрируемости по-

---

[1] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982. 496 с.

[2] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988. 448 с.

ти комплексной структуры, ассоциированной с симплектической формой.

Аналогом теоремы Кодаиры являются теоремы доказанные Громовым[3] и Тишлером[4] о том, что замкнутое симплектическое многообразие можно симплектически вложить в комплексное проективное пространство, если симплектическая форма целочисленная. Симплектическое вложение означает, что форма, ассоциированная с метрикой Фубини–Штуди на $\mathbb{C}P^k$, индуцирует симплектическую форму на вкладываемом многообразии.

Вышеуказанные доказательства однако не являются конструктивными. Мы заполняем этот пробел для некоторых расслоений торов — доказываем аналог теоремы Лефшеца.

Целью работы является построение канонических симплектических вложений замкнутых многообразий с целочисленной симплектической формой в комплексное проективное пространство.

Основные результаты.

- Построены канонические симплектические вложения косых произведений двумерных торов с нулевым классом Эйлера, а также многообразия Кодаиры – Терстона в комплексное проективное пространство.

- На вкладываемых многообразиях определены (неголоморфные) обобщения классических тэта-функций, являющиеся сечениями линейных комплексных расслоений, первый класс Чжэня которых, порожден симплектической формой.

Методы исследований. В работе использованы методы симплектической геометрии и элементы теории тэта-функций.

---

[3]Gromov M. L. A topological technique for the construction of the solutions of differential equations and inequalities // Actes Cõngres Intern. Math. (Nice, 1970). V. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 221–225.

[4]Tischler D. Closed 2-forms and an embedding theorem for symplectic manifolds // J. Diff. Geom. 1977. V. 12, N 2. P. 229–235.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность.

Результаты являются новыми и носят теоретический характер. Построенные вложения и обобщенные тэта-функции могут быть использованы в дальнейшем для изучения геометрии косых произведений двумерных торов. Результаты и методы работы могут быть использованы специалистами по дифференциальной и в том числе симплектической геометрии.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством чл.-корр. РАН И. А. Тайманова,
- на семинаре отдела анализа и геометрии ИМ СО РАН под руководством академика РАН Ю. Г. Решетняка,
- на V международной конференции по математическому моделированию, проходившей летом 2007 г в г. Якутске.

Публикации. Результаты диссертации изложены в следующих работах автора [1, 2].

Структура диссертации. Диссертация изложена на 66 страницах и состоит из трех глав, где первая глава является вводной. Каждая глава разбита на пункты. Библиография содержит 24 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе, являющейся вводной, дается постановка задачи и излагаются необходимые предварительные сведения. В частности, мы напоминаем, что $\theta(z,\tau)$ — это целая функция, заданная условиями периодичности

$$\begin{aligned} \theta(z+1,\tau) &= -\theta(z,\tau), \\ \theta(z+\tau,\tau) &= -\exp(-2\pi i z - \pi i \tau)\cdot\theta(z,\tau). \end{aligned}$$

С геометрической точки зрения тэта-функция является сечением линейного голоморфного расслоения L над комплексным тором. Сечения расслоения $L^{\otimes d}$ образуют линейное пространство размерности d. Мы будем называть их тэта-функциями степени d.

Во второй главе мы рассматриваем многообразие Кодаиры — Терстона (M_{KT}), которое является фактор-многообразием $\mathbb{R}^4$ по действию дискретной группы, которая задается следующими образующими:

$$\begin{array}{lcll} (x,y,z,t) & \to & (x+1, y, z+ky, t), & k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0 \\ (x,y,z,t) & \to & (x, y+1, z, t) & \\ (x,y,z,t) & \to & (x, y, z+1, t) & \\ (x,y,z,t) & \to & (x, y, z, t+1) & \end{array}$$

Мы определяем тэта-функцию на многообразии Кодаиры — Терстона следующим образом:

$$\theta_{KT}(x,y,z,t) = \theta(z+ix, ky+i)\cdot\theta(y+it, i),$$

где $\theta(z,\tau)$ - это классическая тэта-функция. Аналогичным образом мы определяем тэта-функции степени d на M_{KT}, которые образуют линейное пространство размерности d^2.

Перенумеруем базисные тэта-функции степени d: $\{s_i\}_{i=1}^{d^2}$. Тогда отображение

$$\varphi_d = (s_1, s_2, \ldots, s_{d^2})$$

будет отображением многообразия M_{KT} в $\mathbb{CP}^{d^2-1}$.

Основным результатом второй главы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Отображение φ_d корректно определено и является вложением при $d \geqslant 3$.*

Многообразие Кодаиры — Терстона является симплектическим многообразием, где симплектическая форма может быть к примеру задана следующей левоинвариантной 2-формой:

$$\omega_{KT} = (dz - kxdy)\wedge dx + dy\wedge dt.$$

Теорема 2. *1. При $d \geqslant 3$ отображение φ_d индуцирует симплектическую структуру на многообразии M_{KT}.*

2. Индуцированная симплектическая форма когомологична $d \cdot \omega_{KT}$.

Структура Главы 2 следующая: в п. 2.1 мы напоминаем свойства классической тэта-функции, используемые при доказательстве теоремы 1, в п. 2.2 мы определяем тэта-функцию на многообразии Кодаиры — Терстона и доказываем корректность определения, в п. 2.3 доказываем теорему 1 и в п. 2.4 теорему 2.

В третьей главе мы рассматриваем класс ориентируемых косых произведений двумерных торов с нулевым классом Эйлера. Расслоение из данного класса можно определить в виде в виде фактор-многообразия $\mathbb{R}^4$ по действию группы со следующими образующими:

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) &\to (x+1, y, \alpha z + \beta t, \gamma z + \delta t),\\
(x,y,z,t) &\to (x, y+1, \alpha' z + \beta' t, \gamma' z + \delta' t),\\
(x,y,z,t) &\to (x, y, z+1, t),\\
(x,y,z,t) &\to (x, y, z, t+1),
\end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}.$$

принадлежат группе $SL(2, \mathbb{Z})$. Классификация данных многообразий была проведена в работе[5]. Приведем результаты данного исследования с точностью до диффеоморфизма пространства расслоения в следующей таблице. I обозначает единичную матрицу.

[5]Sakamoto K., Fukuhara S. Classification of T^2-bundles over T^2 // Tokyo J. Math. 1983. V. 6, N 2. P. 311–327.

	$\{A, B\}$	Примечание
(a)	$\{I, I\} = T^2 \times T^2$	Произведение торов
(b)	(1) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, I\right\}$ (2) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I\right\}$ (3) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I\right\}$ (4) $\{-I, I\}$	Гиперэллиптические поверхности
(c)	$\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I\right\}$, $k \neq 0$	Многообразие Кодаиры — Терстона
(d)	$\left\{\begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I\right\}$, $k \neq 0$	
(e)	$\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -I\right\}$, $k \neq 0$	
(f)	$\{A, I\}$, $\lvert\operatorname{tr} A\rvert > 2$	
(g)	$\{A, -I\}$, $\operatorname{tr} A > 2$	

Здесь и далее через M будем обозначать пространство расслоения. Мы определяем тэта-функцию на косых произведениях двумерных торов с нулевым классом Эйлера следующим образом:

$$\theta_M(x, y, z, t) = \theta(z + \omega t, \omega) \cdot \theta(x + iy, i),$$

где функции ω приведены в следующей таблице.

	ω
b1, b3	$(-1 + \sqrt{-3})/2$
b2, b4	i
c, e	$-kx + i$
d	$kx + i$
f, g	$(\lambda^{-x}v^+ + i\lambda^x v^-)/(\lambda^{-x}u^+ + i\lambda^x u^-)$

Здесь λ, λ^{-1} собственные значения A, а $(u^+, v^+)^T, (u^-, v^-)^T$ собственные вектора транспонированной матрицы A:

$$A^T \begin{pmatrix} u^+ \\ v^+ \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u^+ \\ v^+ \end{pmatrix}, \quad A^T \begin{pmatrix} u^- \\ v^- \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} u^- \\ v^- \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущей главе мы аналогичным образом определяем тэта-функции степени d. Они образуют линейное пространство размерности d^2.

Перенумеруем базисные тэта-функции степени d: $\{z_i\}_{i=1}^{d^2}$. Тогда отображение

$$\varphi_d = (z_1, z_2, \ldots, z_{d^2})$$

будет отображением многообразия M в $\mathbb{CP}^{d^2-1}$.

Основным результатом третьей главы являются следующие две теоремы.

Теорема 3. *Отображение φ_d корректно определено и является вложением при:*

а) $d \geq 4$, *в случаях* b1, b2, b3, f, g;

б) $d \geq 3$, *в случаях* b4, c, d, e.

Для всех $\{A, B\}$ пространство расслоения M является симплектическим многообразием, где симплектическая форма может быть к примеру задана следующей 2-формой:

$$\omega_M = dx \wedge dy + ds \wedge dt.$$

Теорема 4. 1. *Если отображение φ_d является вложением, то оно индуцирует симплектическую структуру на многообразии M.*

2. *Индуцированная симплектическая форма когомологична $d \cdot \omega_M$.*

Структура Главы 3 следующая: в п. 3.1 мы приводим классификацию косых произведений двумерных торов, в п. 3.2 мы определяем тэта-функцию, доказываем корректность определения и некоторые свойства, в п. 3.3 доказываем теорему 3 и в п. 3.4 теорему 4, в п. 3.5 мы показываем связь с другим обобщениям и тэта-функций Кирвина и Урибе[6].

Заметим, что они использовали подход, использующий теорию представлений, для определения аналога тэта-функции на многообразии Кодаиры — Терстона. Данное многообразие представляется в виде косого произведения торов двумя неизоморфными способами, с нулевым и ненулевым классом Эйлера. Соответственно мы рассмотрели его в двух главах, и построенные нами тэта-функции различны. Тэта-функции Кирвина и Урибе совпадают с нашими тэта-функциями на многообразии Кодаиры — Терстона, определенными в третьей главе. Заметим, что в этой главе мы строим тэта-функции на целом классе косых произведений торов.

[6]Kirwin W. D., Uribe A. Theta-functions on the Kodaira — Thurston manifold // ARXIV.ORG: сб. электр. препринтов. 2007. 24 дек. URL: http://arxiv.org/abs/0712.4016. (дата обращения: 21.02.2009).

Список литературы

[1] Егоров Д. В. Тэта-функции на многообразии Кодаиры — Терстона // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 2. С. 320–328.

[2] Егоров Д. В. Тэта-функции на косых произведениях двумерных торов с нулевым классом Эйлера // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 4. С. 818–830.

Егоров Дмитрий Владимирович

Тэта-функции на косых произведениях
двумерных торов

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 30.07.2009.	Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 0,9	Печать RISO.
Тираж 60 экз.	Заказ № 124

Отпечатано в центре оперативной печати
«Оригинал 2», ИП Плужникова О. Ф.
633010, г. Бердск, ул. Кошевого, 6

10 ~