УДК 519.6

РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СОСТОЯНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЯВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ[1)]

А.В. ЛАПИН, А.А. ПЛАТОНОВ, А.Д. РОМАНЕНКО

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: avlapine@mail.ru

SOLVING A PARABOLIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH STATE CONSTRAINTS BY USING EXPLICIT APPROXIMATION OF THE STATE EQUATION

A.V. LAPIN, A.A. PLATONOV, A.D. ROMANENKO

Kazan Federal University

Аннотация

Решается параболическая задача оптимального управления с поточечными ограничениями на управление и состояние. Уравнение аппроксимируется явной разностной схемой. Строятся и исследуются итерационные методы решения сеточных задач оптимального управления. Реализация этих методов осуществляется полностью по явным формулам.

Ключевые слова: Оптимальное управление, параболическая задача, ограничение на состояние, явная аппроксимация, итерационный метод.

Summary

A parabolic optimal control problem with point-wise constraints for the control and state is solved. The state equation is approximated by explicit in time finite-difference scheme. Iterative solution methods for the grid optimal control problems are constructed and investigated. The implementation of these iterative methods is carried out only by explicit formulas.

Key words: Optimal control, parabolic problem, state constraint, explicit approximation, iterative method.

Введение

Рассматривается задача оптимального управления системой, описываемой уравнением теплопроводности. Управление — распределенное в области, а наблюдение либо распределенное, либо финальное. В задаче присутствуют ограничения как на управление, так и на состояние системы. Мы аппроксимируем задачу конечно-разностной схемой, в том числе, используем явную по времени аппроксимацию уравнения состояния. Для построенной дискретной задачи оптимального управления предлагаются итерационные методы, реализация которых осуществляется полностью по явным формулам. Приведены результаты о сходимости итерационных методов.

1. Формулировка задачи и ее аппроксимация.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 1,$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. Задача Дирихле для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f + u && \text{в } Q_T = \Omega \times (0,T]; \\ &y = 0 && \text{на } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T]; \\ &y = y_0 && \text{при } t = 0,\ x \in \Omega \end{aligned} \tag{1}$$

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00368)

будет выступать в качестве задачи состояния.

Здесь f и y_0 – заданные функции, $y(x,t)$ и $u(x,t)$ – искомые функции состояния и управления, соответственно. Для $f, u \in L_2(Q_T)$ и $y_0 \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $y \in W(0,T) = \{y \in L_2(0,T; H_0^1(\Omega)) : \dfrac{\partial y}{\partial t} \in L_2(0,T; H^{-1}(\Omega))\}$ задачи (1). Зададим целевой функционал:

$$J(y,u) = \frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_T}(y(x,t)-y_d(x,t))^2 dxdt + \frac{\beta}{2}\int\limits_{\Omega}(y(x,T)-z_d(x))^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} u^2 dxdt, \qquad (2)$$

где $y_d \in L_2(Q)$, $z_d \in L_2(\Omega)$, а постоянные α и β неотрицательны и $\alpha+\beta > 0$. Наконец, определим множества "поточечных"ограничений на управление и состояние:

$$\begin{gathered} U_{ad} = \{u \in L_2(Q_T) : |u(x,t)| \leqslant u_{\max} \text{ для п. вс. } (x,t) \in Q_T\}; \\ Y_{ad} = \{u \in L_2(Q_T) : y_{\min} \leqslant y(x,t) \leqslant y_{\max} \text{ для п. вс. } (x,t) \in Q_T\}. \end{gathered} \qquad (3)$$

Будем решать задачу оптимального управления

$$\begin{gathered} \min_{(y,u)\in K} J(y,u), \\ K = \{(y,u) \in Y_{ad} \times U_{ad} : \text{ выполнено уравнение состояния (1)}\}. \end{gathered} \qquad (4)$$

Теорема 1. *Пусть $K \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение задачи* (4).

Построим сеточную аппроксимацию (4). Для простоты будем считать, что $\Omega = (0,1)^n, n \geqslant 1$, и используем конечно-разностную аппроксимацию на равномерной сетке шага h по пространственным переменным. Пусть V_h – это пространство сеточных функций, равных нулю в граничных узлах сетки. В дальнейшем используем обозначения $y, u, ..$ для сеточных функций из V_h равно как и для векторов из $\mathbb{R}^{N_x}$ их узловых значений. Обозначим через $\|.\|_x$ евклидову норму в $\mathbb{R}^{N_x}$. Пусть далее A – симметричная и положительно определенная матрица сеточного оператора Лапласа со спектром на отрезке $[\mu_{\min}(A), \mu_{\max}(A)]$, где $\mu_{\max}(A)$ имеет порядок h^{-2}, а $\mu_{\min}(A) > 0$ ограничено снизу положительной постоянной, не зависящей от h. На отрезке $[0,T]$ строим сетку шага τ: $\{0, \tau, \dots M\tau = T\}$. Аппроксимируем краевую задачу состояния (1) явной разностной схемой

$$\frac{y^j - y^{j-1}}{\tau} + Ay^j = f^j + u^j, \ j = 1, 2, \dots, M, \ \ y^0 = y_0, \qquad (5)$$

считая выполненным условие $\tau \leqslant \dfrac{2}{\mu_{\max}(A)}$, обеспечивающее устойчивость схемы. Определим сеточную целевую функцию

$$I(y,u) = \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{M}\tau\|y^j - y_d^j\|_x^2 + \frac{\beta}{2}\|y^M - z_d\|_x^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\tau\|u^j\|_x^2 \qquad (6)$$

и множества ограничений

$$Y_{ad}^h = \{y \in V_h : y_{\min} \leqslant y \leqslant y_{\max}\}, \ U_{ad}^h = \{u \in V_h : |u| \leqslant u_{\max}\}. \qquad (7)$$

Сеточная задача оптимального управления имеет вид:

$$\begin{gathered} \min_{(y,u)\in K_h} I(y,u), \\ K_h = \{(y,u) \in Y_{ad}^h \times U_{ad}^h : \text{ выполнено уравнение состояния (5)}\}. \end{gathered} \qquad (8)$$

Теорема 2. *Пусть $K_h \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение задачи* (5).

Определим вектор $F \in \mathbb{R}^{MN_x}$ и матрицы $L, M \in \mathbb{R}^{MN_x \times MN_x}$:

$$\begin{gathered} F^j = \{\frac{y_0}{\tau} - Ay_0 + f^1 \text{ при } j = 1; \ f^j \text{ при } j = 2, \dots, M\}, \\ (Ly)^j = \{\frac{y^j - y^{j-1}}{\tau} + Ay^j \text{ при } j = 2, \dots, M; \ \frac{y^1}{\tau} \text{ при } j = 1\}, \\ (My)^j = \{0 \text{ при } j = 1, \dots, M-1; \ \frac{1}{\tau}E \text{ при } j = M\}. \end{gathered}$$

Пусть далее $E \in \mathbb{R}^{MN_x \times MN_x}$ — единичная матрица и $(.,.)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{MN_x}$.

Пусть θ и φ — индикаторные функции множеств Y_{ad}^h и U_{ad}^h, соответственно. Тогда сеточная задача оптимального управления (6) может быть записана в виде

$$\min_{Ly=F}\{I(y,u)+\theta(y)+\varphi(u)\}.$$

Строим для этой задачи функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(y,u,\lambda)=I(y,u)+\theta(y)+\varphi(u)+(\lambda, Ly-F),$$

седловая точка которой удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix}\alpha E+\beta M & 0 & L^T\\ 0 & E & -E\\ L & -E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ u\\ \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\partial\theta(y)\\ \partial\varphi(u)\\ 0\end{pmatrix}\ni\begin{pmatrix}\alpha y_d+\beta M z_d\\ 0\\ F\end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Лемма 1. *При* $\tau < \dfrac{2}{\mu_{\max}(A)}$ *матрица* L *положительно определена. При*

$$\tau \leqslant \frac{1}{\mu_{\max}(A)} \qquad (10)$$

справедливо неравенство $(Ly,y) \geqslant \dfrac{\mu_{\min}(A)}{2}(y,y)$.

Теорема 3. *Седловая задача* (9) *имеет решение* (y,u,λ) *с единственными компонентами* (y,u), *совпадающими с решением задачи* (8).

Введем обозначение $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix}\alpha E+\beta M & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$ для "подматрицы" задачи (9). При $\alpha=0$ матрица $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ вырождена, поэтому проводим эквивалентное преобразование (9):

$$\begin{pmatrix}\alpha E+\beta M+rL & -rE & L^T\\ 0 & E & -E\\ L & -E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ u\\ \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\partial\theta(y)\\ \partial\varphi(u)\\ 0\end{pmatrix}\ni\begin{pmatrix}M z_d+rF\\ 0\\ F\end{pmatrix}. \qquad (11)$$

При подходящем выборе $r>0$ матрица $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^r=\begin{pmatrix}\alpha E+\beta M+rL & -rE\\ 0 & E\end{pmatrix}$ становится положительно определенной. Более точный результат для случая $\alpha=0$, $\beta=1$ приведен в следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (10). *Тогда при* $0<r<2\mu_{\min}(A)$ *матрица* $\mathcal{A}_{0,1}^r=\begin{pmatrix}M+rL & -rE\\ 0 & E\end{pmatrix}$ *положительно определена и энергетически эквивалентна блочно диагональной и симметричной матрице* $\mathcal{A}_0=\begin{pmatrix}M+L_s & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$, $L_s=0.5(L+L^T)$. *При* $r=\mu_{\min}(A)$

$$(\mathcal{A}_{0,1}^r z,z)\geqslant c_0(\mathcal{A}_0 z,z)\ \forall z=(y,u),\ c_0=\min\left\{1;\ \frac{\mu_{\min}(A)+1-\sqrt{\mu_{\min}^2(A)+1}}{2}\right\}.$$

2. Итерационный метод.

Задачу (11) будем решать итерационным методом

$$\begin{gathered}u^{k+1}+\partial\varphi(u^{k+1})\ni\lambda^k,\\ (\alpha E+\beta M+rL)y^{k+1}+\partial\theta(y^{k+1})\ni\alpha y_d+\beta M z_d+rF+ru^{k+1}-L^T\lambda^k,\\ D\frac{\lambda^{k+1}-\lambda^k}{\rho}+u^{k+1}-Ly^{k+1}=0.\end{gathered} \qquad (12)$$

Согласно [1] следует выбирать предобусловливатель $D = D^T > 0$ энергетически эквивалентным матрице $\mathcal{A}_{init} = \begin{pmatrix} L & -E \end{pmatrix} (\mathcal{A}^r_{\alpha,\beta})^{-1} \begin{pmatrix} L^T \\ -E \end{pmatrix}$.

Рассмотрим для простоты два частных случая: $\alpha = 1, \beta = 0$ и $\alpha = 0, \beta = 1$. В первом случае матрица $\mathcal{A}_{1,0}$ совпадает с единичной матрицей, поэтому можно решать исходную седловую задачу (9) методом (12) ($\alpha = 1, \beta = 0, r = 0$) и выбирать предобусловливатель $D = LL^T$.

В случае $\alpha = 0, \beta = 1$ возьмем для определенности $r = \mu_{\min}(A)$. Матрица $\mathcal{A}^r_{0,1}$ энергетически эквивалентна $\mathcal{A}_0$ (см. лемму 2), поэтому матрица A_{init} энергетически эквивалентна $D = L(M + L_s)^{-1} L^T$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (10): $\tau \leqslant \dfrac{1}{\mu_{\max}(A)}$.

a) *Пусть* $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $r = 0$. *Тогда итерационный метод* (12) *с предобусловливателем* $D = LL^T$ *для задачи* (9) *сходится при* $\rho \leqslant \dfrac{2\mu^2_{\min}(A)}{4 + \mu^2_{\min}(A)}$.

b) *Пусть* $\alpha = 0, \beta = 1, r = \mu_{\min}(A)$. *Тогда существует положительная постоянная* $c(\mu_{\min}(A))$ *такая, что итерационный метод* (12) *с предобусловливателем* $D = L(M + L_s)^{-1} L^T$ *для задачи* (11) *сходится при* $\rho \leqslant c(\mu_{\min}(A))$.

Алгоритм реализации метода (12) состоит из решения двух включений и системы уравнений с матрицей D. Из определения функций φ и θ как индикаторных функций множеств ограничений (7) и треугольного вида матрицы $(\alpha E + \beta M + rL)$ следует, что решение этих включений сводится к последовательному поточечному проектированию, т.е. решения находятся по явным формулам. Точно так же, решения систем уравнений с матрицами $D = LL^T$ и $D = L(M + L_s)^{-1} L^T$ вычисляются по явным формулам.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lapin A.** Preconditioned Uzawa-type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems // Lobachevskii J. Math. – 2010. – V. 31, № 4. – P. 309-322.

REFERENCES

1. **Lapin A.** Preconditioned Uzawa-type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems // Lobachevskii J. Math. – 2010. – V. 31, № 4. – P. 309-322.