УДК 519.624

СХЕМЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РОБЕНА В СЛУЧАЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ[1)]

И.В. ЦЕЛИЩЕВА

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
E-mail tsi@imm.uran.ru

DOMAIN DECOMPOSITION SCHEMES FOR THE ROBIN PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED REACTION-DIFFUSION EQUATION

I.V. TSELISHCHEVA

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Ekaterinburg

Аннотация

Рассматриваются аппроксимации краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии с условиями III рода на границе, допускающими условия Дирихле и Неймана; старшие производные уравнения содержат возмущающий параметр ε^2, где ε принимает произвольные значения из (0,1]. На примере ОДУ строятся и исследуются континуальные и разностные (на кусочно-равномерных сетках, сгущающихся в пограничных слоях) схемы метода декомпозиции области. Приводятся условия, обеспечивающие ε-равномерную сходимость решений с ростом числа итераций. Проведен сравнительный анализ эффективности схем декомпозиции для последовательных и параллельных вычислений. Получены оценки снизу и сверху для погрешности и числа итераций. Показано (в отличие от рассмотренного ранее параболического уравнения конвекции-диффузии), что увеличение числа решателей в параллельных схемах приводит к ускорению параллельного метода по сравнению с последовательным без потери точности решения декомпозируемой схемы. Результаты обобщаются на случай сингулярно возмущенного эллиптического уравнения на прямоугольнике.

Ключевые слова: Сингулярно возмущенная задача реакции-диффузии, малый параметр, краевые условия III рода, ε-равномерная сходимость, метод декомпозиции области

Summary

We consider approximations to the boundary value problem for a singularly perturbed reaction-diffusion equation with the third-kind boundary conditions admitting both Dirichlet and Neumann conditions. The highest derivatives of the equation are multiplied by the perturbation parameter ε^2, where ε takes any values in (0,1]. With an example of ODE, we construct and study continual and difference (on piecewise uniform grids condensing in the boundary layers) schemes based on an overlapping domain decomposition method. We give conditions that ensure the ε-uniform convergence of solutions with increasing the number of iterations. A comparative analysis of the efficiency of the decomposition schemes for sequential and parallel computations is made. Lower and upper bounds for the error and for the number of iterations are obtained. It is shown (in contrast to the parabolic convection-diffusion case considered earlier) that the growth in the number of solvers in the parallel schemes leads to the acceleration of the parallel method in comparison with the sequential one, without loss in the accuracy of the solution of the decomposed scheme. The results can be generalized to the case of a singularly perturbed elliptic equation on a rectangle.

Key words: Singularly perturbed reaction-diffusion problem, small parameter, third-kind boundary conditions, ε-uniform convergence, domain decomposition method

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00618).

1. Постановка задачи. Цель работы

На множестве $\overline{D} = D \cup \Gamma$, $D = (0, d)$, рассмотрим краевую задачу для уравнения реакции-диффузии

$$Lu(x) \equiv \left\{\varepsilon^2 a(x)\frac{d^2}{dx^2} - c(x)\right\} u(x) = f(x), \qquad x \in D, \tag{1а}$$

$$lu(x) \equiv \left\{\varepsilon\alpha\frac{d}{dn} + (1-\alpha)\right\} u(x) = \varphi(x), \qquad x \in \Gamma. \tag{1б}$$

(1в)

Здесь $\varepsilon \in (0,1]$ – малый параметр, a, c, f – достаточно гладкие и ограниченные функции на $\overline{D}$, $a_0 \leqslant a(x) \leqslant a^0$, $c_0 \leqslant c(x) \leqslant c^0$, $a_0, c_0 > 0$, $|f(x)| \leqslant M$, $x \in \overline{D}$; $|\varphi(x)| \leqslant M$, $x \in \Gamma$; $\alpha \in [0,1]$. При $\alpha = 0$ имеем задачу Дирихле, а при $\alpha = 1$ – задачу Неймана.

При $\varepsilon \to 0$ появляется пограничный слой в окрестности обоих концов отрезка $\overline{D}$.

Рассмотрим разностную схему для задачи (1). На множестве $\overline{D}$ введем сетку

$$\overline{D}_h = \overline{\omega}, \tag{2}$$

где $\overline{\omega}$ – сетка на $\overline{D}$, вообще говоря, неравномерная. Полагаем $h^i = x^{i+1} - x^i$; x^i, $x^{i+1} \in \overline{\omega}$, $h = \max_i h^i$; $N+1$ – число узлов сетки $\overline{\omega}$, $h \leqslant MN^{-1}$.

На сетке $\overline{D}_h$ аппроксимируем краевую задачу разностной схемой [1]

$$\begin{aligned} \Lambda z(x) &\equiv \{\varepsilon^2 a(x)\delta_{\overline{x}\widehat{x}} - c(x)\}z(x) = f(x), \qquad x \in D_h, \\ \lambda^* z(x) &\equiv \varepsilon\alpha\left\{\begin{array}{l} -\delta_x z(x),\ x = 0 \\ \ \ \delta_{\overline{x}}\, z(x),\ x = d \end{array}\right\} + (1-\alpha)z(x) + 2^{-1}\varepsilon^{-1}\alpha h^* a^{-1}(x)c(x)z(x) = \varphi^*(x) \equiv \\ &\equiv \varphi(x) - 2^{-1}\varepsilon^{-1}\alpha h^* a^{-1}(x) f(x), \ \ x \in \Gamma_h. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $D = D \cap \overline{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \overline{D}_h$, $\delta_{\overline{x}\widehat{x}} z(x)$ и $\delta_x z(x)$, $\delta_{\overline{x}} z(x)$ – вторая и первые (вперед и назад) разностные производные: $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\, z(x) = 2(h^i + h^{i-1})^{-1}\left[\,\delta_x z(x) - \delta_{\overline{x}}\, z(x)\,\right]$, $x = x^i$, $x \in D_h$; $h^* = h^0$ при $x = x^0 = 0$, $h^* = h^{N-1}$ при $x = x^N = d$.

Схема (3), (2) монотонна ε-равномерно. С учетом априорных оценок решения, с использованием техники мажорантных функций устанавливается оценка

$$|u(x) - z(x)| \leqslant M(\varepsilon + N^{-1})^{-1} N^{-1}, \qquad x \in \overline{D}_h. \tag{4}$$

На равномерной сетке

$$\overline{D}_h = \overline{D}_h^{\,u} \tag{5}$$

имеем

$$|u(x) - z(x)| \leqslant M(\varepsilon + N^{-1})^{-2} N^{-2}, \quad x \in \overline{D}_h. \tag{6}$$

Оценки (4) и (6) неулучшаемы по N, ε. Схема (3) на сетках (2), (5) сходится при условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon). \tag{7}$$

Построим кусочно-равномерную сетку, сгущающуюся в окрестности погранслоев [2]

$$\overline{D}_h = \overline{D}_h^{\,c}, \tag{8}$$

равномерную на каждом из трех интервалов $[0, \sigma]$, $[d - \sigma, d]$ и $[\sigma, d - \sigma]$ с шагом $h^{(1)} = 4\sigma N^{-1}$ и $h^{(2)} = 2(d - 2\sigma)N^{-1}$, соответственно. Параметр σ зависит от ε и N: $\sigma = \min[d/4, \varepsilon m^{-1} \ln N]$, где m – произвольное число из $(0, m^0)$, $m_0 = \min_{\overline{D}}[a^{-1/2}(x)c^{1/2}(x)]$.

На кусочно-равномерной сетке (8) схема (3) сходится ε-равномерно

$$|u(x) - z(x)| \leqslant MN^{-2}\ln^2 N, \qquad x \in \overline{D}_h. \tag{9}$$

Теорема 1. *Разностная схема* (3), (8) *сходится ε-равномерно; на сетках* (2) *и* (5) *схема сходится при условии* (7). *Для сеточных решений справедливы оценки* (4), (6) *и* (9).

Наша цель — построить последовательные и параллельные схемы метода декомпозиции и исследовать в сравнении затраты и время на решение задачи, а также порождаемые ошибки.

2. Континуальные схемы метода декомпозиции области.

Опишем метод Шварца, использующий последовательные вычисления. Пусть множество открытых подобластей

$$D^1,\ D^2,\ \ldots,\ D^K \tag{10}$$

с границами Γ^k, $\Gamma^k = \Gamma(D^k) = \overline{D}^k \setminus D^k$, образует покрытие области D: $D = \bigcup_{k=1}^{K} D^k$. Через δ^k обозначим минимальную ширину перекрытия множеств D^k и $D^{[k]}$ — объединения подобластей, не содержащих D^k: $D^{[k]} = \bigcup_{i=1,\ i\neq k}^{K} D^i$, а через δ — наименьшее значение δ^k, $k = 1, \ldots, K$; δ — минимальное перекрытие подобластей из (10). Вообще говоря, $\delta = \delta_{(10)}(\varepsilon)$.

Пусть функция $u^r(x)$, $x \in \overline{D}$, $r = 1, 2, \ldots$ — решение последовательного метода Шварца

$$L_{(11)}(u^{r+k/K}(x)) \equiv L_{(1)}u^{r+k/K}(x) - f(x) = 0, \quad x \in D^k, \tag{11}$$

$$\lambda^* u^{r+k/K}(x) = \varphi^*(x), \quad x \in \overline{D}^k \cap \Gamma,$$

$$u^{r+k/K}(x) = u^{r+(k-1)/K}(x), \quad x \in \overline{D} \setminus D^k, \quad k = 1, \ldots, K,$$

$$u^{r+1}(x) = u^{r+K/K}(x), \quad x \in \overline{D}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $u^0(x)$, $x \in \overline{D}$ — начальная функция.

При условии

$$\delta = \delta(\varepsilon) \geqslant m_{(12)}\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, 1], \tag{12}$$

решение последовательного метода Шварца (11), (10) при $r \to \infty$ сходится ε-равномерно:

$$|\, u(x) - u^r(x)\,| \leqslant M q^r, \quad x \in \overline{D}, \quad \text{где} \ \ q \leqslant 1 - m. \tag{13}$$

Приведем параллельный метод Шварца. На множестве $\overline{D}$ введем разбиение

$$D^k = \bigcup_{p=1}^{P} D^k_p, \quad k = 1, \ldots, K, \quad \overline{D}^k_i \bigcap \overline{D}^k_j = \emptyset, \ \ i \neq j; \tag{14}$$

Пусть $D^{[k\times p]}$ — объединение подобластей $D^1_p, \ldots, D^K_p$ из (14), не содержащих D^k_p. Через $\delta^{k\times p}$ обозначим минимум ширины перекрытий множеств $\overline{D}^k_p$ и $\overline{D}^{[k\times p]}$, δ есть минимум $\delta^{k\times p}$.

Пусть $u^r(x)$, $x \in \overline{D}$, $r = 1, 2, \ldots,$ — решение параллельного метода Шварца

$$\left.\begin{array}{r} L_{(11)}(u^{r+k/K}_p(x)) = 0, \quad x \in D^k_p, \\ u^{r+k/K}_p(x) = u^{r+(k-1)/K}(x), \quad x \in \Gamma^k_p \setminus \Gamma, \\ \lambda^* u^{r+k/K}_p(x) = \varphi^*(x), \quad x \in \Gamma^k_p \cap \Gamma \end{array}\right\}, \quad x \in \overline{D}^k_p, \ \ p = 1, \ldots, P; \tag{15}$$

$$u^{r+\frac{k}{K}}(x) = \left\{ \begin{array}{c} u^{r+k/K}_p(x), \quad x \in \overline{D}^k_p, \ \ p = 1, \ldots, P, \\ u^{r+(k-1)/K}(x), \quad x \in \overline{D} \setminus \overline{D}^k \end{array} \right\}, \ \ x \in \overline{D}, \quad k = 1, \ldots, K;$$

$$u^{r+1}(x) = u^{r+k/K}(x), \quad r = 0, 1, 2, \ldots, \quad u^0(x) = u^0_{(11)}(x).$$

При условии (12), где $\delta = \delta_{(14)}(\varepsilon)$, параллельный метод (15), (14) сходится при $r \to \infty$ ε-равномерно с оценкой, подобной (13):

$$|\, u(x) - u^r(x) \,| \leqslant M q^r, \;\; x \in \overline{D},$$

где q удовлетворяет той же самой оценке: $q \leqslant 1 - m$.

При некотором условии на минимальную ширину d^* множеств декомпозиции $\overline{D}^{(k)}$ в (10) и $\overline{D}_p^{(k)}$ в (14), $d^* \geqslant m_{d^*} d$, $\delta \leqslant 2^{-1} d^*$, где m_{d^*} — достаточно малая постоянная, зависящая от K (для последовательного метода) и KP (для параллельного метода), получены оценки сверху и снизу для величины q. В силу оценок для q, получены оценки снизу и сверху и для числа итераций.

3. Сравнение последовательных и параллельных схем декомпозиции.

Сравним эффективность схем декомпозиции для последовательных и параллельных вычислений (будем говорить, S*-схем* и P*-схем*), предполагая, что общее число подобластей, покрывающих D, одинаково. Будем рассматривать схемы, для которых выполняется условие

$$KP = K_0, \qquad P \geqslant 1; \tag{16}$$

общее число K_0 покрывающих подобластей, как и величины K, P, может быть большим.

Общие затраты R^S и R^P в относительных единицах (относительно затрат на решение задачи на отрезке длины d) определим соотношениями

$$R^S = r^S d^{-1} \sum_{k=1}^{K_0} (d^{kR} - d^{kL}), \qquad R^P = r^P d^{-1} \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} (d_p^{kR} - d_p^{kL}), \tag{17а}$$

при заданном числе итераций r^S и r^P в S- и P-схемах соответственно; $D^k = (d^{kL},\, d^{kR})$ при $P = 1$, and $D_p^k = (d_p^{kL},\, d_p^{kR})$ при $P \geqslant 2$. Все процессоры в параллельных схемах считают подзадачи на итерационном шаге одновременно. Тогда время решения задач в относительных единицах (один процессор решает задачу на отрезке относительной единичной длины за единицу времени) определяется

$$T^S = R^S, \qquad T^P = P^{-1} R^P. \tag{17б}$$

Через

$$R_\Delta^S, \;\; R_\Delta^P \;\text{ и }\; T_\Delta^S, \;\; T_\Delta^P \tag{17в}$$

обозначим затраты на решение S- и P-схем, имеющих ошибку решения Δ, и время решения таких схем.

Найдены условия, при которых P-схема при любом допустимом распределени подобластей $\{D_p^k\}$ решает задачу быстрее, чем S-схема при любом допустимом распределени подобластей $\{D^k\}$, причем ошибка P-схемы не выше ошибки S-схемы. Последовательный метод рассматривался при наилучшем распределении подобластей (относительно скорости сходимости), а параллельный метод — при наихудшем распределении подобластей.

Для времени решения схем находим ε-равномерную оценку

$$T_\Delta^S > M_1^{-1} P T_\Delta^P. \tag{18а}$$

Выполняется также оценка

$$T_\Delta^S < P T_\Delta^P. \tag{18б}$$

Таким образом, при условии

$$P \geqslant M_1$$

достигается ε-равномерное ускорение решения P-схемы в $M_1^{-1} P$ раз по сравнению с S-схемой.

Для эффективности схем по затратам выполняются оценки

$$\begin{gathered} R_\Delta^S < R_\Delta^P, \\ R_\Delta^S > M_1^{-1} R_\Delta^P. \end{gathered} \tag{19}$$

4. Заключение.

Построены и исследованы континуальные схемы декомпозиции области для последовательных и параллельных вычислений. Указаны условия, которые при увеличении числа итераций обеспечивают ε-равномерную сходимость решений схем декомпозиции. Получены оценки снизу и сверху для погрешности метода декомпозиции и для числа итераций. Показано, что оценки для величины q не отличаются в случае последовательных и параллельных схем.

Показано, что параллельный метод позволяет ускорить процесс решения задачи по сравнению с последовательным методом без потери точности решения декомпозируемой схемы (в отличие от случая параболического уравнения конвекции-диффузии, рассмотренного в [3]). На каждой подобласти автоматически происходит уменьшение ошибки, ошибка не накапливается.

- Найдены условия, при которых параллельная схема решает задачу быстрее последовательной, причем ошибка решения параллельной схемы не выше ошибки в случае последовательной схемы.
- Время решения задачи уменьшается практически в P раз, где P — число параллельных процессоров, а вычислительные затраты на решение последовательного и параллельного вариантов схем близки.

Подобные результаты верны и для разностных схем декомпозиции области на кусочно-равномерных сетках, сгущающихся в пограничных слоях.

Результаты исследования могут быть обобщены на случай краевой задачи на прямоугольнике для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии, подобного рассмотренному в [4].

Выражаю благодарность Шишкину Г.И. за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. — М: Наука, 1989. — 616 с.
2. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. — Екатеринбург: УрО РАН, 1992. — 232 с.
3. **Целищева И.В., Шишкин Г.И.** Последовательный и параллельный методы декомпозиции области для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии // Труды ИММ УрО РАН. — 2008. — Т. 14, № 1. — С. 202—220.
4. **Шишкин Г.И., Целищева И.В.** Параллельные методы решения сингулярно возмущенных краевых задач для эллиптических уравнений // Математическое моделирование. — 1996. — Т. 8, № 3. — С. 111-127.

REFERENCES

1. **Samarskii A.A.** The Theory of Difference Schemes. — New York: Marcel Dekker, 2001.
2. **Shishkin G.I.** Discrete Approximations of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations [Setochnye approksimatcii singuljarno vozmucshennykh ellipticheskikh i parabolicheskikh uravnenii]. — Ekaterinburg: UrO RAN, 1992 (in Russian).
3. **Tselishcheva I.V., Shishkin G.I.** Sequential and parallel domain decomposition methods for a singularly perturbed parabolic convection-diffusion equation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2008. — V. 261, Supplement Issue 1. — P. S206—S227.
4. **Shishkin G.I., Tselishcheva I.V.** Parallel methods of solving singularly perturbed boundary value problems for elliptic equations [Parallel'nye metody reshenija singuljarno vozmucshennykh kraevykh zadach dlja ellipticheskikh uravnenii]// Matem. Mod. — 1996. — V. 8, № 3. — P. 111—127 (in Russian).