УДК 519.6

ОДНА ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ [1)]

М.И. ДРОБОТЕНКО, А.А. СВИДЛОВ, И.А. ГОРБУНОВ

Кубанский государственный университет

E-mail: mdrobotenko@mail.ru; svidlov@mail.ru

AN INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM

M.I. DROBOTENKO, A.A. SVIDLOV, I.A. GORBUNOV

Kuban State University

Аннотация

Рассмотрена задача об определения плотности тепловых источников по дополнительной информации о решении уравнения теплопроводности. На основе исследования прямой задачи получена теорема о разрешимости обратной задачи. Обсуждены результаты численных экспериментов.

Ключевые слов : обратная задача, уравнение теплопроводности, плотность тепловых источников.

Summary

The problem of determining the density of heat sources is considered. Based on a study of the direct problem we obtain a theorem on the solvability of the inverse problem. Discussed the results of numerical experiments.

Key words: inverse problem, heat equation, heat sources density.

Один из классов обратных задач для уранения теплопроводности образуют задачи определения плотности тепловых источников по дополнительной информации о решении уравнения. Подобные задачи рассматривались в работах [1–3].

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу об определении плотности источников, обеспечивающего заданное значение при $t = T$ решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности: найти такие функции $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ и $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, что

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f, \\ u(0) = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(T) = u_T, \end{cases} \tag{1}$$

где u_T — заданная функция. Эта задача относится к коэффициентным обратным задачам теплообмена [1].

Вначале установим свойства прямой задачи, необходимые для исследования задачи (1).

2. Прямая задача

Пусть Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с C^2-гладкой границей, $W^2_{2,0}$ — замыкание в норме $W^2_2(\Omega)$ множества $C^2_0(\bar{\Omega})$, $T \in (0, +\infty)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Рассмотрим задачу

$$u_t = \Delta u + f \text{ в } Q_T, \tag{2}$$

[1)] Работ выполнена при поддержке РФФИ (РФФИ-Юг 13/96)

$$u(0) = u_0, \tag{3}$$

$$u|_{S_T} = 0, \tag{4}$$

где $f \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in W^1_{2,0}(\Omega)$.

При исследовании задачи (2)-(4) будем следовать работе [4], преобразовав необходимые понятия и результаты в удобную для дальнейшего использования форму.

Определение 1. *Пространством $W^{1,2}_{2,0}(Q_T)$ будем называть замыкание множества функций из $C^2(\bar{Q}_T)$, обращающихся в нуль на S_T, в норме*

$$\|u\|_{W^{1,2}_{2,0}(Q_T)} = \left(\int\limits_{Q_T} \left(u_t^2 + (\Delta u)^2\right) dxdt \right)^{1/2}.$$

Имеют место следующие непрерывные вложения:

$$W^{1,2}_{2,0}(Q_T) \subset W^{1,2}_2(Q_T)$$

и

$$W^{1,2}_{2,0}(Q_T) \subset C([0,T]; W^1_{2,0}(\Omega)).$$

Определение 2. *Пространтсво $W^{1,2}_{2,0}(Q_T)$ с нормой*

$$\|u\|_{S(Q_T)} = \sup_{t\in[0,T]} \left(\int\limits_{Q_t} \left(u_t^2 + (\Delta u)^2\right) dxdt + \|u(t)\|^2_{W^1_{2,0}(\Omega)} \right)^{1/2},$$

которая эквивалентна норме $W^{1,2}_{2,0}(Q_T)$, будем обозначать через $S(Q_T)$.

Определение 3. *Обобщенным решением задачи (2)-(4) будем называть такую функцию $u \in S(Q_T)$, что уравнение (2) выполнено п.в. в Q_T, и справедливо равенство (3).*

Рассмотрим опереатор $A : S(Q_T) \to I(Q_T)$, где пространство $I(Q_T) = L_2(Q_T) \times W^1_{2,0}(\Omega)$, заданный следующим образом:

$$Au = (u_t - \Delta u, u(0)).$$

Определим в пространстве $I(Q_T)$ скалярное произведение

$$((\xi', \eta'), (\xi'', \eta''))_{I(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} \xi'\xi'' dxdt + \int\limits_{\Omega} \eta'_x \eta''_x dx,$$

которое превращает его в гильбертово пространство. Для доказательства однозначной разрешимости задачи (2)-(4) достаточно доказать, что оператор A обратим.

Теорема 1. *Начально-краевая задача (2)-(4) для уравнения теплопроводности однозначно разрешима для любых $f \in L_2(Q_T)$ и $u_0 \in W^1_{2,0}(\Omega)$. Причем, решение непрерывно зависит от f и u_0. Более того, оператор A является изоморфизмом нормированных пространств $S(Q_T)$ и $I(Q_T)$.*

3. Обратная задача

Рассмотрим следующую обратную задачу для уравнения теплопроводности: для функции $u_T \in W^1_{2,0}(\Omega)$ найти такую функцию $f \in L_2(\Omega)$ (f не зависит от t), что обобщенное решение задачи

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f \text{ в } Q_T, \\ u(0) = 0, \\ u|_{S_T} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

удовлетворяет равенству

$$u(T) = u_T. \tag{6}$$

Пусть $B : L_2(\Omega) \to W^1_{2,0}(\Omega)$ — линейный оператор, который отображает $f \in L_2(\Omega)$ в $u(T)$, где u — обобщенное решение задачи (5). Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Оператор B является непрерывным.*

Очевидно, что обратная задача (5),(6) эквивалентна уравнению

$$Bf = u_T. \tag{7}$$

Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \ldots$ — ортонормальный базис пространства $L_2(\Omega)$, состоящий из собственных функций задачи Дирихле для уравнения Пуассона, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots$ — соответствующие собственные числа. Без ограничения общности можно считать, что последовательность собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots$ монотонно стремится к $-\infty$.

Определим в пространстве $W^2_{2,0}(\Omega)$ скалярное произведение следующим образом:

$$(u, v)_{W^2_{2,0}(\Omega)} = (\Delta u, \Delta v)_{L_2(\Omega)}.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *[5] Собственные функции $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \ldots$ образуют ортогональный базис в пространстве $W^2_{2,0}(\Omega)$.*

Разрешимость обратной задачи (5),(6) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда $u_T \in W^2_{2,0}(\Omega)$. Причем, решение уравнения (7) непрерывно зависит от u_T в норме пространства $W^2_{2,0}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $u_T = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \eta_i$ (сумма в $L_2(\Omega)$) и $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i$ (сумма в $L_2(\Omega)$) и уравнение (7) выполнено. Тогда для всех $i \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$c_i = u_i \lambda_i \left(\exp(\lambda_i T) - 1\right).$$

Эти равенства устанавливают взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между пространствами коэффициентов Фурье функций из пространств $W^2_{2,0}(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ по ортогональному базису $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \ldots$, следовательно, и между самими пространствами $W^2_{2,0}(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Теорема доказана.

4. Результаты численного решения

На практике значение функции u_T известно с погрешностью δ, норма которой мала в пространстве $L_2(\Omega)$ и велика в пространстве $W^2_{2,0}(\Omega)$. По этой причине приближенное значение $f_\delta = B^{-1}(u_T + \delta)$ сильно отличается от точного f, и обратная задача должна ставиться как задача получения устойчивого решения в малой (в норме $L_2(\Omega)$) окрестности функции $u_T + \delta$.

Наиболее простой регуляризирующий алгоритм для этого можно получить, если известны собственные функции оператора Δ [3]. Численное исследование одномерной задачи на основе этого алгоритма показало его устойчивость при использовании собственных функций оператора Лапласа и неустойчивость, если выбиралась другая система функций.

На основе изложенных в работе результатов могут быть построены регуляризирующие алгоритмы, не требующих знания собственных функций оператора Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 784 с.
2. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Численные методы решения обратных задач математической физики. — М.: Издательство ЛКИ, 2009. — 478 с.
3. **Денисов А.М.** Введение в теорию обратных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 208 с.
4. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математичкской физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
5. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976. — 392 с.

REFERENCES

1. **Vabishchevich P.N., Samarskii A.A.** Computational Heat Transfer. V. 1, Mathematical Modelling. V. 2, The Finite Difference Methodology. — New York: Wiley, 1995.
2. **Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.** Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. — Walter de Gruyter, 2007. — 438 p.
3. **Denisov A.M.** Elements of the Theory of Inverse Problems. — Walter De Gruyter Incorporated, 1999. — 272 p.
4. **Ladyzhenskaya O.A.** The boundary value problems of mathematical physics. — New York: Springer-Verlag, 1985. — 322 p.
5. **Mikhailov V.P.** Partial Differential Equations. — Moscow: Mir Publishers, 1978. — 398 p.