УДК 519.624

СТАНДАРТНАЯ СХЕМА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ТЕХНИКА[1)]

Г.И. ШИШКИН[1], А.Е. ПЕТРЕНКО[2], А.Р. АНСАРИ[3]

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,* [2] *Университет прикладных наук Метрополия, Хельсинки, Финляндия,* [3] *Научно-технический университет Залива, Кувейт*

E-mail: shishkin@imm.uran.ru, Ansari.a@gust.edu.kw

STANDARD SCHEME FOR A SINGULARLY PERTURBED CONVECTION-DIFFUSION EQUATION IN THE PRESENCE OF PERTURBATIONS. EXPERIMENTAL TECHNIQUE

G.I. SHISHKIN[1], A.E. PETRENKO[2], A.P. ANSARI[3]

[1] *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Ekaterinburg,* [2] *Helsinki Metropolia University of Applied Sciences, Finland,* [3] *Gulf University for Science and Technology, Kuwait*

Аннотация

В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения конвекции-диффузии, аппроксимируемая стандартной монотонной разностной схемой на равномерной сетке. Для этой задачи разрабатывается техника численного исследования сеточных решений при наличии компьютерных возмущений. Приводятся и обсуждаются результаты численных экспериментов, иллюстрирующие теоретические результаты.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная краевая задача, уравнение конвекции-диффузии, стандартная разностная схема, равномерная сетка, равномерная норма, возмущенная разностная схема, компьютерные возмущения, техника экспериментального исследования.

Summary

In this paper, a Dirichlet problem is considered for a singularly perturbed ordinary differential convection-diffusion equation approximated by the standard monotone finite difference scheme on a uniform grid. For this problem, a technique of numerical study of grid solutions in the presence of computer perturbations is developed. Results of numerical experiments illustrating the theoretical results are presented and discussed.

Key words: singularly perturbed boundary value problem, convection-diffusion equation, standard difference scheme, uniform grid, maximum norm, perturbed difference scheme, computer perturbations, technique of experimental study.

1. Постановка краевой задачи, стандартная разностная схема

1.1. На множестве $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$, $D = (0,1)$ рассмотрим задачу Дирихле для обыкновенного сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии[2)]

$$L_{(1)}u(x) \equiv \left\{\varepsilon a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} - c(x)\right\} u(x) = f(x),\ \ x \in D, \quad u(x) = \varphi(x),\ \ x \in \Gamma. \tag{1}$$

[1)] Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 13-01-00618)

[2)] Запись $L_{(j)}$ ($m_{(j)}$, $M_{(j)}$) означает, что эти операторы (постоянные) введены в формуле (j).

Здесь $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 и Γ_2 — левая и правая части границы Γ; функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{D}$, причем[3)]

$$m \leqslant a(x),\, b(x),\, c(x) \leqslant M, \quad |f(x)| \leqslant M, \quad x \in \overline{D}, \quad |\varphi(x)| \leqslant M, \quad x \in \Gamma,$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$. При малых значениях параметра ε в окрестности множества Γ_1 появляется пограничный слой.

1.2. Рассмотрим стандартную разностную схему на равномерной сетке $\overline{D}_h = \overline{D}_h^u$ с шагом $h = 1/N$, где $N+1$ — число узлов $x = x^i$ сетки $\overline{D}_h^u$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Задачу (1) аппроксимируем схемой [1]

$$\Lambda z(x) \equiv \{\varepsilon\, a(x)\, \delta_{\overline{x}\widehat{x}} + b(x)\, \delta_x - c(x)\} z(x) = f(x), \;\; x \in D_h, \quad z(x) = \varphi(x), \;\; x \in \Gamma_h; \tag{2}$$

здесь $D_h = D \cap \overline{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \overline{D}_h$, $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\, z(x)$ и $\delta_x\, z(x)$ – вторая (центральная) и первая (вперед) разностные производные. Для ошибки сеточного решения справедлива оценка (подобная оценке (3.3) из [2])

$$\|u - z\| \leqslant M\, \left(\varepsilon + N^{-1}\right)^{-1} N^{-1}, \tag{3а}$$

эквивалентная оценке

$$\|u - z\| \leqslant M\, \delta; \quad \delta = \delta(\varepsilon, N) = \varepsilon^{-1} N^{-1}. \tag{3б}$$

Справедлива следующая теорема о сходимости схемы (2) (подобная Теореме 1 из [2]).

Теорема 1. *Пусть для решения $u(x)$ задачи (1) выполняется оценка $|d^k/dx^k\, u(x)| \leqslant M\,(1 + \varepsilon^{1-k} + \varepsilon^{-k} \exp^{-m\,\varepsilon^{-1} x})$, $x \in \overline{D}$, $k \leqslant K$, $K = 3$. Тогда решение стандартной разностной схемы (2) сходится к решению краевой задачи $u(x)$ с оценкой (3).*

2. Стандартная разностная схема при наличии компьютерных возмущений

Через $\triangle$ обозначим параметр, характеризующий “допустимые” возмущения, вносимые при компьютерных вычислениях. Пусть $z^*_\triangle(x), x \in \overline{D}_h$ есть решение разностной схемы при наличии компьютерных возмущений – решение разностной схемы в матричной записи при условии, что возмущения данных удовлетворяют условию (см. [2, 3])

$$|\delta a_i^j|,\; |\delta b_i^j|,\; |\delta c_i^i|,\; |\delta f(x_i)| \leqslant \triangle, \;\; 2 \leqslant i \leqslant N; \quad |\delta\varphi(x_i)| \leqslant \triangle, \;\; i = 1, N+1. \tag{4}$$

Для $z^*_\triangle(x) - z(x)$ – *возмущения сеточного решения* $z(x)$, вызванного *компьютерными возмущениями* (или короче, *компьютерного возмущения*), имеем оценку в переменных $\varepsilon, \delta, \triangle$

$$\|\, z^*_\triangle - z \,\|_{\overline{D}_h} \leqslant M\, \varepsilon^{-1}\, \delta^{-2}\; \triangle\,. \tag{5а}$$

Эта оценка эквивалентна следующей оценке в переменных $\varepsilon, N, \triangle$

$$\|\, z^*_\triangle - z \,\|_{\overline{D}_h} \leqslant M\, \varepsilon\, N^2\; \triangle\,. \tag{5б}$$

Для *ошибки компьютерного решения* $z^*_\triangle(x) - u(x)$ в силу оценки

$$\|\, u - z^*_\triangle \,\|_{\overline{D}_h} \leqslant \|\, u - z \,\|_{\overline{D}_h} + \|\, z^*_\triangle - z \,\|_{\overline{D}_h} \tag{6а}$$

с учетом оценок (3), (5) получаем оценку в переменных ε, δ, $\triangle$

$$\|\, u - z^*_\triangle \,\|_{\overline{D}_h} \leqslant M_1\, \delta + M_2\, \varepsilon^{-1}\, \delta^{-2}\; \triangle \leqslant M\, \left[\, \delta + \varepsilon^{-1}\, \delta^{-2}\; \triangle \,\right], \tag{6б}$$

где $M_1 = M_{(3)}$, $M_2 = M_{(5)}$. В переменных ε, N, $\triangle$ имеем оценку

$$\|\, u - z^*_\triangle \,\|_{\overline{D}_h} \leqslant M_1\, (\varepsilon + N^{-1})^{-1}\, N^{-1} + M_2\, \varepsilon\, N^2\; \triangle\,. \tag{6в}$$

Справедлива следующая теорема (подобная Теореме 5 из [2])

[3)] Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие Теоремы* 1. *Тогда для компьютерного возмущения* $z^*_\Delta(x) - z(x)$ *и ошибки компьютерного решения* $z^*_\Delta(x) - u(x)$ *справедливы оценки* (5) *и* (6) *соответственно.*

3. Численное исследование модельной краевой задачи

На примере модельной краевой задачи с использованием результатов численных экспериментов изучаются ошибки сеточного решения $z(x) - u(x)$ и компьютерные возмущения $z^*_\Delta(x) - z(x)$; результаты численных экспериментов сравниваются с теоретическими результатами.

3.1. Рассмотрим краевую задачу

$$L_{(1)}u(x) \equiv \left\{\varepsilon a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx}\right\}u(x) = f(x), \ \ x \in D, \quad u(x) = \varphi(x), \ \ x \in \Gamma. \tag{7}$$

Здесь $\overline{D} = [0,1]$, $a(x) = 1$, $b(x) = 2$, $f(x) = -2$, $\varphi(x) = 0$. Решение задачи выписывается в явном виде: $u(x) = (1 - e^{-2\,\varepsilon^{-1}})^{-1}\,(1 - e^{-2\,\varepsilon^{-1}\,x}) - x$, $x \in \overline{D}$. Задачу (7) аппроксимируем стандартной схемой

$$\Lambda z(x) \equiv \{\varepsilon\,\delta_{\overline{x}\widehat{x}} + 2\,\delta_x\}z(x) = -2, \ \ x \in D_h, \quad z(x) = 0, \ \ x \in \Gamma_h. \tag{8}$$

Разностной схеме (8) в случае возмущения ее данных соответствует возмущенная разностная схема

$$\Lambda^*\,z^*(x) \equiv \{\varepsilon\,a^*(x)\,\delta_{\overline{x}\widehat{x}} + b^*(x)\,\delta_x\}\ z^*(x) = f^*(x),\ x \in D_h, \ \ z^*(x) = \varphi^*(x),\ x \in \Gamma_h. \tag{9а}$$

В схеме (9) возмущенные данные определим соотношениями

$$\begin{aligned} &a^*(x) = a_{(7)}(x) + \delta a^i_{i+1}, \quad b^*(x) = b_{(7)}(x) = 2, \\ &f^*(x) = f_{(7)}(x) = -2, \qquad x = x^i,\ \ x^i \in \overline{D}_h; \qquad \varphi^*(x) = \varphi_{(7)}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h, \end{aligned} \tag{9б}$$

т.е., возмущается только коэффициент при второй производной, причем лишь в левом узле трехточечного шаблона (см., например, [3]). В численных экспериментах полагаем

$$\delta a^i_{i+1} = -\delta a, \quad \delta a = 10^{-8}; \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, N, \tag{9в}$$

что соответствует *разностной схеме при наличии компьютерных возмущений* в случае условия (4), где $\delta a = \Delta$, $\Delta = 10^{-8}$. Таким образом, имеем $z^*_\Delta(x) = z^*_{(9)}(x)$.

3.2. Нас интересует поведение *ошибки решения* стандартной *разностной схемы* (8)

$$\delta_u = \delta_u(\varepsilon, N) = \parallel u - z \parallel_{\overline{D}_h} . \tag{10а}$$

и *возмущения решения компьютерной разностной схемы* (9)

$$\delta_z = \delta_z(\varepsilon, N; \Delta) = \parallel z^*_\Delta - z \parallel_{\overline{D}_h} \tag{11а}$$

в зависимости от параметра ε, числа сеточных интервалов N и величины Δ, а также сравнение экспериментальных результатов с теоретическими. Техника исследования $\delta_u = \delta_u(\varepsilon, N)$ хорошо известна (см., например, [4], гл. 2 для задачи конвекции-диффузии). Подобным образом проводится исследование $\delta_z = \delta_z(\varepsilon, N; \Delta)$ (см., например, [5], гл. 12). Таблицы *ошибок решения разностной схемы* и *возмущений решения компьютерной схемы* в переменных ε и N носят достаточно сложный характер, что затрудняет анализ компьютерной разностной схемы. Получаемые результаты *качественно согласуются* с оценкой (3) из Теоремы 1 и оценкой (5б) из Теоремы 2.

3.3. Обсудим поведение ошибки решения стандартной схемы и компьютерного возмущения сеточного решения с учетом их теоретических оценок (3) и (5б).

3.3.1. Рассмотрим ошибку решения стандартной схемы, используя переменные ε и β, где $\beta = \varepsilon\,N$ — автомодельная переменная в случае стандартной разностной схемы.

В Таблице 1 приводятся ошибки сеточного решения $\overline{\delta}_u = \overline{\delta}_u(\varepsilon, \beta)$ для различных значений ε и β, где $\beta = \beta(\varepsilon,\, N) = \varepsilon\, N$. Здесь также даются величины $\{\beta \max\limits_{\varepsilon} \overline{\delta}_u(\varepsilon,\, \beta)\}$ для различных значений β. Заметим, что $\overline{\delta}_u = \overline{\delta}_u(\varepsilon, \beta) = \overline{\delta}_u(\varepsilon, \beta(\varepsilon,\, N)) = \delta_{u\,(10)}(\varepsilon,\, N)$.

Из численных экспериментов следует, что при фиксированном β значения $\overline{\delta}_u(\varepsilon, \beta)$ достаточно слабо зависят от значений параметра ε и быстро стабилизируются с уменьшением ε. Величины $\{\beta \max\limits_{\varepsilon} \overline{\delta}_u(\varepsilon,\, \beta)\}$ слабо зависят от β и с ростом β быстро стабилизируются; максимум этих величин не превосходит значения 0.369.

Таким образом, в случае модельной задачи для ошибки сеточного решения $\delta_{u\,(10)}(\varepsilon,\, N)$ с использованием результатов Таблицы 1 получаем экспериментальную оценку

$$\delta_u(\varepsilon,\, N) \leqslant M_1\, \varepsilon^{-1}\, N^{-1}, \tag{10b}$$

где (в соответствии с Таблицей 1) $M_1 = \max\limits_{\beta} \{\beta \max\limits_{\varepsilon} \overline{\delta}_u(\varepsilon,\, \beta)\} = 0.369$. Оценка (10) ошибки решения стандартной схемы полностью согласуется с оценкой (3) из Теоремы 1.

Табл. 1: Ошибки сеточного решения $\overline{\delta}_u = \overline{\delta}_u(\varepsilon, \beta)$ для различных значений ε и β, а также величины $\{\beta \max\limits_{\varepsilon} \overline{\delta}_u(\varepsilon, \beta)\}$ для различных значений β

$\varepsilon \setminus \beta$	2^0	2^2	2^4	2^6	2^8	2^{10}
1		$3.96e^{-2}$	$1.27e^{-2}$	$3.37e^{-3}$	$8.54e^{-4}$	$2.14e^{-4}$
2^{-2}	$1.90e^{-1}$	$7.59e^{-2}$	$2.17e^{-2}$	$5.64e^{-3}$	$1.42e^{-3}$	$3.57e^{-4}$
2^{-4}	$1.98e^{-1}$	$7.65e^{-2}$	$2.18e^{-2}$	$5.67e^{-3}$	$1.43e^{-3}$	$3.59e^{-4}$
2^{-6}	$1.98e^{-1}$	$7.65e^{-2}$	$2.18e^{-2}$	$5.67e^{-3}$	$1.43e^{-3}$	$3.59e^{-4}$
2^{-8}	$1.98e^{-1}$	$7.65e^{-2}$	$2.18e^{-2}$	$5.67e^{-3}$	$1.43e^{-3}$	$3.59e^{-4}$
2^{-10}	$1.98e^{-1}$	$7.65e^{-2}$	$2.18e^{-2}$	$5.67e^{-3}$	$1.43e^{-3}$	$3.59e^{-4}$
$\{\beta \max\limits_{\varepsilon} \overline{\boldsymbol{\delta}}_u(\varepsilon, \beta)\}$	**0.198**	**0.306**	**0.358**	**0.366**	**0.368**	**0.369**

3.3.2. Рассмотрим компьютерные возмущения, используя переменные ε и γ, где $\gamma = \varepsilon\, N^2$ — автомодельная переменная в случае компьютерной разностной схемы.

В Таблице 2 приводятся компьютерные возмущения сеточных решений $\widetilde{\delta}_z = \widetilde{\delta}_z(\varepsilon,\, \gamma;\, \triangle)$ для различных значений ε и γ, где $\gamma = \gamma(\varepsilon,\, N) = \varepsilon\, N^2$. Здесь также даются величины $\{(\gamma\ \triangle)^{-1} \max\limits_{\varepsilon} \widetilde{\delta}_z(\varepsilon,\, \gamma;\, \triangle)\}$ для различных значений γ. Заметим, что $\widetilde{\delta}_z = \widetilde{\delta}_z(\varepsilon,\, \gamma;\, \triangle)$, $\widetilde{\delta}_z(\varepsilon,\, \gamma(\varepsilon,\, N);\, \triangle) = \delta_z(\varepsilon,\, N;\, \triangle)$.

Из Таблицы 2 следует, что компьютерные возмущения $\delta_z = \widetilde{\delta}_z(\varepsilon,\, \gamma;\, \triangle)$ при фиксированных значениях γ достаточно слабо зависят от параметра ε, причем быстро стабилизируются с уменьшением ε. При фиксированных значениях ε возмущения $\widetilde{\delta}_z(\varepsilon,\, \gamma;\, \triangle)$ с ростом γ изменяются значительно; эти возмущения нарастают с ростом γ со скоростью близкой к линейной для всех значений ε. Здесь же приводятся величины (отношения) $\{(\gamma\ \triangle)^{-1} \max\limits_{\varepsilon}(\widetilde{\delta}_z(\varepsilon,\, \gamma;\, \triangle))\}$ для различных значений γ. Эти величины слабо зависят от γ и с ростом γ быстро устанавливаются; максимум отношения не превосходит значения 0.250.

Таким образом, в случае модельной задачи для компьютерных возмущений $\delta_z(\varepsilon, N; \triangle)$ с использованием результатов Таблицы 2 получаем экспериментальную оценку в переменных $\{\varepsilon,\, N,\, \triangle\}$

$$\delta_z(\varepsilon, N; \triangle) \leqslant M_2\, \varepsilon\, N^2\, \triangle, \tag{11b}$$

где (в соответствии с Таблицей 2) $M_2 = \max\limits_{\gamma} \{(\gamma\ \triangle)^{-1} \max\limits_{\varepsilon}(\widetilde{\delta}_z(\varepsilon, \gamma; \triangle))\} = 0.250$. Оценка (11) полностью согласуется с оценкой (5б) из Теоремы 2.

Табл. 2: Возмущения сеточного решения $\widetilde{\delta}_z = \widetilde{\delta}_z(\varepsilon, \gamma; \triangle)$ для различных значений ε и γ, а также величины $\{(\gamma\ \triangle)^{-1} \max\limits_{\varepsilon}(\widetilde{\delta}_z(\varepsilon, \gamma; \triangle))\}$ для различных значений γ

$\varepsilon \backslash \gamma$	2^8	2^{10}	2^{12}	2^{14}	2^{16}	2^{18}
1	$5.35e^{-8}$	$2.24e^{-7}$	$9.18e^{-7}$	$3.71e^{-6}$	$1.49e^{-5}$	$5.98e^{-5}$
2^{-2}	$3.15e^{-7}$	$1.29e^{-6}$	$5.22e^{-6}$	$2.10e^{-5}$	$8.42e^{-5}$	$3.37e^{-4}$
2^{-4}	$5.16e^{-7}$	$2.07e^{-6}$	$8.32e^{-6}$	$3.33e^{-5}$	$1.33e^{-4}$	$5.34e^{-4}$
2^{-6}	$5.93e^{-7}$	$2.38e^{-6}$	$9.54e^{-6}$	$3.82e^{-5}$	$1.53e^{-4}$	$6.12e^{-4}$
2^{-8}	$6.22e^{-7}$	$2.49e^{-6}$	$9.99e^{-6}$	$4.00e^{-5}$	$1.60e^{-4}$	$6.41e^{-4}$
2^{-10}	$6.33e^{-7}$	$2.53e^{-6}$	$1.01e^{-5}$	$4.06e^{-5}$	$1.62e^{-4}$	$6.51e^{-4}$
$\{(\gamma\ \triangle)^{-1} \max\limits_{\varepsilon}(\widetilde{\delta}_z(\varepsilon, \gamma; \triangle))\}$	**0.247**	**0.249**	**0.249**	**0.249**	**0.249**	**0.250**

3.3.3. Экспериментальная оценка ошибки возмущенного компьютерного решения.

С учетом оценок (10), (11) для ошибки компьютерного решения $\delta^*_u = \delta^*_{u/\triangle} = \|u - z^*_\triangle\|$ получаем экспериментальную оценку в переменных $\{\varepsilon,\ N,\ \triangle\}$

$$\delta^*_u \leqslant M_1\,(\varepsilon + N^{-1})^{-1}\,N^{-1} + M_2\,\varepsilon\,N^2\ \ \triangle, \tag{12}$$

$M_1 = 0.369$, $M_2 = 0.250$. Оценка (12) полностью согласуется с оценкой (6в) из Теоремы 2.

Таким образом, результаты численных экспериментов, приведенные в Таблицах 1 и 2, хорошо согласуются с теоретическими результатами — с оценкой (3) из Теоремы 1, а также с оценками (5б) и (6в) из Теоремы 2.

4. Выводы

В случае задачи Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения конвекции-диффузии с возмущающим параметром ε ($\varepsilon \in (0,1]$) рассмотрена стандартная разностная схема (классическая схема на равномерной сетке) при наличии возмущений. Такая разностная схема не является ε-равномерно устойчивой к возмущениям данных разностной схемы и компьютерным возмущениям. Приводятся и обсуждаются техника экспериментальных исследований влияния компьютерных возмущений на возмущения сеточных решений, а также результаты численных экспериментов. Полученные экспериментальные результаты согласуются с теоретическими результатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
2. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Устойчивая стандартная разностная схема для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии при компьютерных возмущениях // Труды ИММ УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 1. — С. 322—333.
3. **Шишкин Г.И.** Устойчивость стандартной схемы для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 6. — С. 648—650.
4. **Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.** Robust computational techniques for boundary layers. Boca Raton: Chapman & HAll/CRC, 2000. — 254 p.
5. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** Difference Methods for Singular Perturbation Problems. Vol. 140 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — Boca Raton: CRC Press, 2009. — 408 p.

REFERENCES

1. **Samarskii A.A.** The theory of difference themes. — New York—Basel: Marcel Dekker, Inc, 2001. — 761 p.
2. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** A stable standard difference scheme for a singularly perturbed convection-diffusion equation in the presence of computer perturbations // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS . — 2014. — V. 20, № 1. — P. 322—333.
3. **Shishkin G.I.** Stability of a standard finite difference scheme for a singularly perturbed convection-diffusion equation // Doklady mathematics. — 2013. — V. 87, № 1 — P. 107—109.
4. **Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.** Robust computational techniques for boundary layers. Boca Raton: Chapman & HAll/CRC, 2000. — 254 p.
5. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** Difference Methods for Singular Perturbation Problems. Vol. 140 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — Boca Raton: CRC Press, 2009. — 408p.