УДК 517.9: 539.3

НАДЕЖНЫЙ АПОСТЕРИОРНЫЙ КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИН РЕЙССНЕРА–МИНДЛИНА[1)]

М.Е. ФРОЛОВ

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
E-mail frolov_me@spbstu.ru

RELIABLE A POSTERIORI ERROR CONTROL FOR SOLUTIONS TO PROBLEMS OF REISSNER–MINDLIN PLATES BENDING

M.E. FROLOV

St.Petersburg Polytechnic University

Аннотация

Предложена функциональная апостериорная оценка для контроля точности решений задач об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина, применимая для любого конформного приближенного решения и нескольких типов краевых условий. В качестве частного случая мажоранта включает функционалы, полученные ранее в соавторстве с С.И. Репиным и П. Нейттаанмяки. Основные преимущества нового результата заключаются в ослаблении ограничений на класс допустимых свободных полей и единообразии типов аппроксимаций, которые могут быть использованы для вычисления оценок погрешности.

Ключевые слова: апостериорные оценки погрешности, пластины Рейсснера–Миндлина

Summary

A functional type a posteriori error estimate for control of accuracy of solutions for Reissner–Mindlin plates is proposed. This result is applicable to any conforming approximate solution and several types of boundary conditions. As a particular case, the majorant involves functionals, previously obtained with S. Repin and P. Neittaanmäki. The main advantages of the new result consist in a less restrictive set of admissible fields and the uniformity of types of approximations, which can be used in computations of error estimates.

Key words: a posteriori error estimates, Reissner–Mindlin plates

Введение

Работа связана с исследованиями, начатыми в [1] и [2], где методами теории двойственности вариационного исчисления и прямыми преобразованиями обобщенной постановки задачи получены явно вычисляемые мажоранты, обеспечивающие оценки точности решения задач о пластине Рейсснера–Миндлина при жесткой заделке.

В настоящее время модель Рейсснера–Миндлина является одной из популярных моделей, описывающих деформацию пластин малой и средней толщины и уточняющих классическую теорию тонких пластин Кирхгоффа–Лява, функциональные апостериорные оценки для которой были впервые предложены в статье [3]. В последние десятилетия модель обсуждается как математиками и механиками, так и инженерами. Основная часть публикаций в области численного анализа для данной задачи посвящена проблеме разработки методов конечных элементов, позволяющих эффективно строить приближенное решение в

1) Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-31273-мол_а)

случае уменьшения толщины пластины, когда возникают различные вычислительные эффекты. Мы не будем подробно останавливаться на проблемах, связанных с построением методов конечных элементов для рассматриваемой модели. Соответствующие результаты и литературу можно найти, например, в монографиях [4] и [5]. Проблеме построения методов контроля точности вычисленных аппроксимаций посвящено относительно небольшое количество публикаций, поэтому ее исследование актуально в настоящее время. Апостериорные оценки погрешности для задачи о пластине Рейсснера–Миндлина в рамках классических подходов были предложены несколькими авторами (см. [6] – [10] и цитируемую там литературу).

Использованный здесь подход к построению функциональных апостериорных оценок погрешности основан на привлечении обобщенной постановки рассматриваемой задачи. Поскольку он позволяет оценить точность любой конформной аппроксимации, оценка остается справедливой вне зависимости от того, каким методом было получено приближенное решение. Это может оказаться особенно важным при контроле точности решений, полученных с помощью коммерческих пакетов. В них реализованы вычислительные процедуры, направленные на борьбу с «эффектом зажимания» или «локинга» (в англоязычной литературе – locking, shear locking), который проявляется в большой неточности расчета приближенных значений прогиба тонкостенных конструкций. Одним из средств преодоления эффекта является применение более грубой (редуцированной) схемы интегрирования на части элементов сетки. Как следствие, приближенное решение не является более галеркинской аппроксимацией, поэтому к нему не могут быть применены классические подходы к контролю точности или их необходимо модифицировать. Отметим, что теоретические аспекты функционального подхода подробно описаны в монографии [11].

1. Классическая и обобщенная постановка задачи

Модель Рейсснера–Миндлина описывает линейно-упругую деформацию пластины толщины t в терминах двух переменных: скалярной функции $u = u(x)$ и векторной функции $\theta = \theta(x)$, которые представляют собой прогиб срединной плоскости пластины и поворот вектора нормали к ней при деформировании, соответственно. Предполагается, что срединная плоскость изначально занимает ограниченную связную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой границей Γ. Уравнения, входящие в классическую постановку рассматриваемой задачи, имеют следующий вид: найти такую пару (u, θ) и соответствующее этой паре векторное поле $\gamma = \gamma(x)$, что

$$\begin{cases} -\mathbf{Div}\,(\mathrm{C}\varepsilon(\theta)) = \gamma & \text{в } \Omega, \\ -\mathbf{div}\gamma = g & \text{в } \Omega, \\ \gamma = \lambda t^{-2}(\nabla u - \theta) & \text{в } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda = \dfrac{Ek}{2(1+\nu)}, \varepsilon(\theta) = \dfrac{1}{2}(\nabla\theta + (\nabla\theta)^T)$; функция gt^3 соответствует распределенной поперечной нагрузке, действующей на пластину; тензор C – тензор четвертого ранга, определяемый ниже; E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно; k – корректировочный коэффициент (часто 5/6). В дальнейших рассуждениях предполагается, что $g \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, тензор C обладает свойством симметрии и существуют такие положительные константы ξ_1 и ξ_2, что

$$\xi_1|\varkappa|^2 \leqslant \mathrm{C}\varkappa : \varkappa \leqslant \xi_2|\varkappa|^2 \quad \forall \varkappa \in \mathbb{M}^{2\times2}_{sym}, \quad |\varkappa|^2 = \varkappa : \varkappa,$$

где $\mathbb{M}^{2\times2}_{sym}$ обозначает пространство симметричных тензоров второго ранга размерности 2. В частном случае, когда пластина сделана из однородного изотропного материала, имеем

$$\mathrm{C}\varkappa = \frac{E}{12(1-\nu^2)}\left((1-\nu)\varkappa + \nu\,\mathrm{tr}\varkappa\mathbb{I} \right),$$

где $\mathbb{I}$ – единичный тензор второго ранга. В работах [1] и [2] обсуждается случай однородных граничных условий – $u = 0, \theta = 0$ на Γ, соответствующий жесткому закреплению (заделке) края пластины. Рассмотрим пластину, лишь часть границы которой заделана, а остальная граница свободна. В этом случае система соотношений (1) сохраняется. Предположим, что Γ состоит из двух непересекающихся частей — $\Gamma_{\rm D}$ и $\Gamma_{\rm S}$, где $\Gamma_{\rm D}$ — жестко закрепленная часть. Тогда обобщенная постановка задачи об изгибе пластины Рейсснера–Миндлина имеет вид: найти тройку элементов $(u,\theta,\gamma)\in U\times\Theta\times Q$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega \mathrm{C}\varepsilon(\theta):\varepsilon(\varphi)\,d\Omega - \int\limits_\Omega \gamma\cdot\varphi\,d\Omega = 0, & \forall\varphi\in\Theta, \\ \int\limits_\Omega \gamma\cdot\nabla w\,d\Omega = \int\limits_\Omega gw\,d\Omega, & \forall w\in U, \\ \int\limits_\Omega \left(\lambda^{-1}t^2\gamma-(\nabla u-\theta)\right)\cdot\tau\,d\Omega = 0, & \forall\tau\in Q, \end{cases} \tag{2}$$

где $U=\left\{w\in\mathbb{W}_2^1(\Omega)\mid w=0 \text{ на } \Gamma_{\rm D}\right\}$, $\Theta=\left\{\varphi\in\mathbb{W}_2^1(\Omega,\mathbb{R}^2)\mid \varphi=0 \text{ на } \Gamma_{\rm D}\right\}$, $Q=\mathbb{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^2)$. Известно, что функционал энергии в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathcal{J}(w,\varphi)=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{2}\mathrm{C}\varepsilon(\varphi):\varepsilon(\varphi)+\frac{1}{2}\lambda t^{-2}|\nabla w-\varphi|^2-gw\right)d\Omega.$$

Соответствующая задача минимизации ставится на паре пространств $S:=U\times\Theta$. Из второго соотношения обобщенной постановки (2) при условии повышенной гладкости решения получаем

$$\int\limits_\Omega \gamma\cdot\nabla w\,d\Omega=-\int\limits_\Omega \mathbf{div}\gamma\; w\,d\Omega+\int\limits_{\Gamma_{\rm S}}\gamma\cdot n\;w\,d\Gamma=\int\limits_\Omega gw\,d\Omega.$$

Учитывая уравнение равновесия внутри области и последнее соотношение слабой постановки, которое по лемме Дюбуа-Реймона можно трактовать как следующее равенство двух элементов в пространстве $\mathbb{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^2)$: $\gamma=\lambda t^{-2}(\nabla u-\theta)$, приходим к естественному граничному условию $\partial u/\partial n=\theta\cdot n$ на $\Gamma_{\rm S}$. Второе естественное условие получается аналогично и выглядит следующим образом: $\mathrm{C}\varepsilon(\theta)n=0$ на $\Gamma_{\rm S}$. Отметим, что другие варианты существенных и естественных граничных условий приведены, например, в работе [12].

2. Апостериорная оценка функционального типа

Теперь предположим, не конкретизируя метод, что рассматриваемая задача решена приближенно, то есть имеется некоторая произвольная пара конформных аппроксимаций $(\tilde u,\tilde\theta)$ точного решения задачи (u,θ) в S. Тогда элемент $\gamma=\lambda t^{-2}(\nabla u-\theta)$ аппроксимируется в Q элементом $\tilde\gamma=\lambda t^{-2}(\nabla\tilde u-\tilde\theta)$. Определяя соответствующие погрешности, то есть отклонения от точных значений, $e_{\tilde u}=u-\tilde u$, $e_{\tilde\theta}=\theta-\tilde\theta$, $e_{\tilde\gamma}=\gamma-\tilde\gamma$, а также квадрат ошибки $\epsilon^2=\mathcal{J}(\tilde u,\tilde\theta)-\mathcal{J}(u,\theta)$, измеряемый в терминах функционала энергии, можно доказать, что для произвольной аппроксимации $(\tilde u,\tilde\theta)\in S$ имеет место соотношение (например, см. [1])

$$\epsilon^2=\frac{1}{2}\left(\|e_{\tilde\theta}\|^2+\lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde\gamma}\|^2_\Omega\right),\ \text{ где }\ \|e_{\tilde\gamma}\|^2_\Omega=\int\limits_\Omega|e_{\tilde\gamma}|^2\,d\Omega,\ \ \|e_{\tilde\theta}\|^2=\int\limits_\Omega\mathrm{C}\varepsilon(e_{\tilde\theta}):\varepsilon(e_{\tilde\theta})\,d\Omega. \tag{3}$$

Введем свободные элементы — вектор $\tilde{\tilde y}$ и несимметричный тензор $\tilde{\tilde\varkappa}$, разделив его на две векторные составляющие $\tilde{\tilde\varkappa}=[\tilde{\tilde\varkappa}^1,\ \tilde{\tilde\varkappa}^2]$, где

$$\tilde{\tilde y},\ \ \tilde{\tilde\varkappa}^1,\ \ \tilde{\tilde\varkappa}^2\ \ \in\ \ \mathbb{H}(\Omega,\mathbf{div}):=\left\{y\in\mathbb{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^2)\mid \mathbf{div}y\in\mathbb{L}_2(\Omega)\right\}.$$

Подробнее такое преобразование рассмотрено в статье [13], где оно было использовано для задачи о плоской деформации при реализации вычисления «несимметричной» функциональной мажоранты из монографии [11]. Опираясь на приведенное выше представление, можно записать следующее соотношение, выделив симметрическую и кососимметрическую части тензора:

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{sym}(\tilde{\tilde{\varkappa}}) : \varepsilon(\varphi)\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} (\mathbf{div}\tilde{\tilde{\varkappa}}^1\ \varphi_1 + \mathbf{div}\tilde{\tilde{\varkappa}}^2\ \varphi_2)\, d\Omega + \\ + \int\limits_{\Omega} \mathbf{skew}(\tilde{\tilde{\varkappa}}) : \nabla\varphi\, d\Omega = \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} (\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \cdot n\ \varphi_1 + \tilde{\tilde{\varkappa}}^2 \cdot n\ \varphi_2)\, d\Gamma.$$

Добавляя свободные элементы в соотношение (3), группируя слагаемые и оценивая их сверху, имеем

$$\|e_{\tilde{\theta}}\|^2 + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|^2_{\Omega} \leqslant \|\mathbf{skew}(\tilde{\tilde{\varkappa}})\|_{\Omega}\ \|\nabla e_{\tilde{\theta}}\|_{\Omega} + \|\mathrm{C}^{-1}\mathbf{sym}(\tilde{\tilde{\varkappa}}) - \varepsilon(\tilde{\theta})\|\ \|e_{\tilde{\theta}}\|\ +\ \lambda^{-1}t^2\|\tilde{\tilde{y}} - \tilde{\gamma}\|_{\Omega}\ \|e_{\tilde{\gamma}}\|_{\Omega} + \\ + \sqrt{|\Omega|}\ \|g + \mathbf{div}\tilde{\tilde{y}}\|_{\Omega}\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\ \|e_{\tilde{u}}\|_{\Omega}\ +\ \sqrt{|\Gamma_{\mathrm{S}}|}\ \|\tilde{\tilde{y}} \cdot n\|_{\Gamma_{\mathrm{S}}}\ \frac{1}{\sqrt{|\Gamma_{\mathrm{S}}|}}\|e_{\tilde{u}}\|_{\Gamma_{\mathrm{S}}} + \\ + \sqrt{|\Omega|}\ \|\tilde{\tilde{y}} + [\mathbf{div}\tilde{\tilde{\varkappa}}^1, \mathbf{div}\tilde{\tilde{\varkappa}}^2]\|_{\Omega}\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\ \|e_{\tilde{\theta}}\|_{\Omega}\ + \sqrt{|\Gamma_{\mathrm{S}}|}\ \|[\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \cdot n, \tilde{\tilde{\varkappa}}^2 \cdot n]\|_{\Gamma_{\mathrm{S}}}\ \frac{1}{\sqrt{|\Gamma_{\mathrm{S}}|}}\ \|e_{\tilde{\theta}}\|_{\Gamma_{\mathrm{S}}}.$$

Используем неравенства, являющиеся следствием известных результатов функционального анализа (в частности, неравенства Фридрихса и одного из неравенств Корна)

$$\|\nabla e_{\tilde{\theta}}\|_{\Omega} \leqslant \mathfrak{c}_I \|e_{\tilde{\theta}}\|, \quad \|e_{\tilde{\theta}}\|_{\Omega} \leqslant \mathfrak{c}_{II} \|e_{\tilde{\theta}}\|,$$

$$\frac{1}{|\Omega|}\|e_{\tilde{u}}\|^2_{\Omega} + \frac{1}{|\Gamma_{\mathrm{S}}|}\|e_{\tilde{u}}\|^2_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \leqslant \mathfrak{c}^2_{III}\|\nabla e_{\tilde{u}}\|^2_{\Omega}, \quad \frac{1}{|\Omega|}\|e_{\tilde{\theta}}\|^2_{\Omega} + \frac{1}{|\Gamma_{\mathrm{S}}|}\|e_{\tilde{\theta}}\|^2_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \leqslant \mathfrak{c}^2_{IV}\|e_{\tilde{\theta}}\|^2.$$

По неравенству Коши—Шварца, группируя слагаемые с одинаковыми компонентами погрешности, получаем оценку

$$\|e_{\tilde{\theta}}\|^2 + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|^2_{\Omega} \leqslant \hat{a}^2 + \lambda^{-1}t^2\hat{b}^2, \tag{4}$$

где

$$\hat{a} = \|\mathrm{C}^{-1}\mathbf{sym}(\tilde{\tilde{\varkappa}}) - \varepsilon(\tilde{\theta})\| + \mathfrak{c}_I\|\mathbf{skew}(\tilde{\tilde{\varkappa}})\|_{\Omega}\ +\ \mathfrak{c}_{II}\mathfrak{c}_{III}\sqrt{|\Omega|\ \ \|g + \mathbf{div}\tilde{\tilde{y}}\|^2_{\Omega}\ +\ |\Gamma_{\mathrm{S}}|\ \ \|\tilde{\tilde{y}} \cdot n\|^2_{\Gamma_{\mathrm{S}}}} + \\ + \mathfrak{c}_{IV}\sqrt{|\Omega|\ \ \|\tilde{\tilde{y}} + [\mathbf{div}\tilde{\tilde{\varkappa}}^1, \mathbf{div}\tilde{\tilde{\varkappa}}^2]\|^2_{\Omega}\ +\ |\Gamma_{\mathrm{S}}|\ \ \|[\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \cdot n, \tilde{\tilde{\varkappa}}^2 \cdot n]\|^2_{\Gamma_{\mathrm{S}}}},$$

$$\hat{b} = \|\tilde{\tilde{y}} - \tilde{\gamma}\|_{\Omega} + \mathfrak{c}_{III}\sqrt{|\Omega|\ \ \|g + \mathbf{div}\tilde{\tilde{y}}\|^2_{\Omega}\ +\ |\Gamma_{\mathrm{S}}|\ \ \|\tilde{\tilde{y}} \cdot n\|^2_{\Gamma_{\mathrm{S}}}}.$$

Такая оценка точна (не имеет «зазора»), поскольку для $\tilde{\tilde{y}} = \gamma$ и $\tilde{\tilde{\varkappa}} = \mathrm{C}\varepsilon(\theta)$ правая часть неравенства совпадает с левой, и является гарантированной — при практическом применении неравенство не нарушается. Вводя дополнительные положительные параметры (как в неравенстве Коши с параметром), правую часть можно представить в виде квадратичного функционала, что может быть удобно при реализации вычислений, поскольку задача минимизации такого функционала при фиксированных значениях параметров сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей.

Те граничные условия, которые были естественными в исходной постановке, при оценке погрешности становятся существенными, что аналогично ситуации, наблюдаемой в двойственных смешанных методах конечных элементов (см., например, [14]). Если удовлетворить условиям точно, то граничные интегралы исчезают из апостериорной оценки. При этом мажоранта существенно упрощается, а интегралы по части границы Γ_{S} можно также исключить из определения констант $\mathfrak{c}_{III}$ и $\mathfrak{c}_{IV}$, что уменьшит их значение. Если край пластины не свободен, а находится на опоре, то вместо естественного условия $\partial u/\partial n = \theta{\cdot}n$ на Γ_{S}, на этой части границы возникает существенное условие $u = 0$ на Γ_{S}. Его необходимо учитывать при вычислении константы $\mathfrak{c}_{III}$. Оно также приводит к обращению в нуль интеграла $\int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \tilde{\tilde{y}} \cdot n\ e_{\tilde{u}}\, d\Gamma$ и исчезновению соответствующего слагаемого из мажоранты.

3. Заключение.

Получена новая апостериорная оценка функционального типа (4), не требующая при выводе дополнительного анализа свойств контролируемого приближенного решения и учета особенностей метода конечных элементов, который был использован для его расчета. Основные отличия представленной апостериорной оценки от уже известных заключаются в учете различных типов граничных условий, ослаблении ограничений на класс допустимых свободных элементов и удобном с практической точки зрения единообразии типов аппроксимаций, которые могут быть использованы для построения этих элементов. Подход является надежным, поскольку при практическом применении неравенство не будет нарушаться. Таким образом, оценки останутся гарантированными верхними оценками погрешности. Однако, в настоящее время открыт вопрос реализации методики и проверки ее эффективности посредством вычислительного эксперимента, что является одним из приоритетных направлений дальнейшего развития исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Репин С.И., Фролов М.Е.** Об оценке отклонений от точного решения задачи о пластине Рейсснера-Миндлина // Зап. научн. семинаров ПОМИ. – 2004. –Т. 310. – С. 145–157.
2. **Фролов М.Е., Нейттаанмяки П., Репин С.И.** Гарантированные функциональные оценки погрешности для задачи о пластине Рейсснера-Миндлина // Пробл. мат. анал. – 2005. – Вып.31. –С. 159–166.
3. **Neittaanmäki P., Repin S.I.** A posteriori error estimates for boundary-value problems related to the biharmonic operator // East-West J. Numer. Math. – 2001. – V. 9, № 2. – P. 157–178.
4. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** Finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. 5th ed. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
5. **Braess D.** Finite Elements. Theory, fast solvers and applications in solid mechanics. 3rd. ed. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.
6. **Beirão da Veiga L., Niiranen J., Stenberg R.** A posteriori error analysis for the postprocessed MITC plate elements // SIAM J. Numer. Anal. – 2013. – V. 51, № 1. – P. 1–23.
7. **Boisse P. et al.** Error estimation through the constitutive relation for Reissner–Mindlin plate bending finite elements // Comput. Struct. – 1999. – V. 73, № 6. – P. 615–627.
8. **Hu J., Huang Y.** A posteriori error analysis of finite element methods for Reissner-Mindlin plates // SIAM J. Numer. Anal. – 2010. – V. 47, № 6. – P. 4446–4472.
9. **Carstensen C., Xie X., Yu G., Zhou T.** A priori and a posteriori analysis for a locking-free low order quadrilateral hybrid finite element for Reissner-Mindlin plates // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2011. – V. 200, № 9-12. – P. 1161–1175.
10. **Castellazzi G., de Miranda S., Ubertini F.** Patch based stress recovery for plate structures // Comput. Mech. – 2011. – V. 47, N 4. – P. 379–394.
11. **Repin S.** A posteriori estimates for partial differential equations. Radon Series on Computational and Applied Mathematics 4. – Berlin: de Gruyter, 2008. – 316 p.
12. **Arnold D.N., Falk R.S.** Edge effects in the Reissner-Mindlin plate theory // In: Analytical and Computational Models for Shells. American Society of Mechanical Engineers. – 1989. – P. 71–90.
13. **Фролов М.Е.** Применение функциональных оценок погрешности со смешанными аппроксимациями к плоским задачам линейной теории упругости // ЖВМиМФ. – 2013. – Т. 53, № 7. – С. 1178–1191.
14. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and hybrid finite element methods. Springer Series in Computational Mathematics 15. – New York etc.: Springer-Verlag, 1991. – ix, 350 p.

REFERENCES

1. **Repin S., Frolov M.** Estimation of deviations from the exact solution for the Reissner-Mindlin plate problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2006. – V. 132, № 3. – P. 331–338 (translated from Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. – 2004. – V. 310. – P. 145–157)
2. **Frolov M., Neittaanmäki P., Repin S.** Guaranteed functional error estimates for the Reissner–Mindlin plate problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2006. – № 4. –P. 553–561 (translated from Problemy Matematicheskogo Analiza. – 2005. – № 31. – P. 159–166)
3. **Neittaanmäki P., Repin S.I.** A posteriori error estimates for boundary-value problems related to the biharmonic operator // East-West J. Numer. Math. – 2001. – V. 9, № 2. – P. 157–178.
4. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** Finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. 5th ed. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
5. **Braess D.** Finite Elements. Theory, fast solvers and applications in solid mechanics. 3rd. ed. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.
6. **Beirão da Veiga L., Niiranen J., Stenberg R.** A posteriori error analysis for the postprocessed MITC plate elements // SIAM J. Numer. Anal. – 2013. – V. 51, № 1. – P. 1–23.
7. **Boisse P. et al.** Error estimation through the constitutive relation for Reissner–Mindlin plate bending finite elements // Comput. Struct. – 1999. – V. 73, № 6. – P. 615–627.
8. **Hu J., Huang Y.** A posteriori error analysis of finite element methods for Reissner-Mindlin plates // SIAM J. Numer. Anal. – 2010. – V. 47, № 6. – P. 4446–4472.
9. **Carstensen C., Xie X., Yu G., Zhou T.** A priori and a posteriori analysis for a locking-free low order quadrilateral hybrid finite element for Reissner-Mindlin plates // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2011. – V. 200, № 9-12. – P. 1161–1175.
10. **Castellazzi G., de Miranda S., Ubertini F.** Patch based stress recovery for plate structures // Comput. Mech. – 2011. – V. 47, № 4. – P. 379–394.
11. **Repin S.** A posteriori estimates for partial differential equations. Radon Series on Computational and Applied Mathematics 4. – Berlin: de Gruyter, 2008. – 316 p.
12. **Arnold D.N., Falk R.S.** Edge effects in the Reissner-Mindlin plate theory // In: Analytical and Computational Models for Shells. American Society of Mechanical Engineers. – 1989. – P. 71–90.
13. **Frolov M.** Application of functional error estimates with mixed approximations to plane problems of linear elasticity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – V. 53, № 7. – P. 1000–1012.
14. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and hybrid finite element methods. – Springer Series in Computational Mathematics 15. – New York etc.: Springer-Verlag, 1991. – ix, 350 p.