

УДК 519.6

**РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КИЛЬВАТЕРНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ****А.А. КОНИК, Е.В. ЧИЖОНКОВ***Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
E-mail: nastasya-konik@yandex.ru; chizhonk@mech.math.msu.su***DIFFERENCE METHOD FOR MODELLING PLAZMA WAKEFIELD****A.A. KONIK, E.V. CHIZHONKOV***Lomonosov Moscow State University***Аннотация**

Для решения системы нелинейных уравнений в частных производных, описывающих трехмерную аксиально симметричную плазменную кильватерную волну, предложена и реализована схема метода конечных разностей. Проведено сравнение с результатами моделирования, полученными другими методами. В работе представлены результаты расчетов динамики кильватерной волны вплоть до опрокидывания, выполненные на СКИФ МГУ «Чебышев».

**Ключевые слова:** метод конечных разностей, плазменная кильватерная волна, нелинейные уравнения в частных производных

**Summary**

A finite difference method is proposed and implemented for solution of a system of nonlinear partial differential equations describing a three-dimensional axial symmetric plasma wakefield. Comparison with results of modelling by another methods is performed. This paper presents the results of calculations of the dynamics of the wakefield until breaking obtained with the help of «Tchebyshev» MSU supercomputer complex.

**Key words:** finite difference method, plasma wakefield, nonlinear partial differential equations.

**Введение**

Распространяясь в плазме, ультракороткий мощный лазерный импульс возбуждает сзади за собой колебания плотности электронов, так называемую кильватерную волну. Предсказанный первоначально теоретически в конце 70-х годов прошлого века, этот эффект впоследствии получил подтверждение в ряде натуральных экспериментов. В электрическом поле кильватерной волны, возникающем из-за разделения зарядов электронов и ионов плазмы, возможно эффективное ускорение электронов до высоких энергий. Однако по мере удаления от импульса возмущения электронной плотности изменяют свою форму и на некотором расстоянии могут разрушаться (опрокидываться). В результате размер области, где амплитуда регулярной кильватерной волны достаточно велика и волна может быть использована для ускорения инжектируемых в нее частиц, оказывается ограниченным. Именно эта характеристика области и представляет основной интерес в прикладном аспекте. Так как изучению подлежит процесс разрушения волн, то целесообразно иметь принципиально различные методы их расчета. Ранее были известны неявный конечно-разностный и спектральный алгоритмы для расчета кильватерных волн на длинных промежутках за импульсом [1]. В настоящей работе предложена и реализована явная схема метода конечных разностей, предназначенная для решения той же задачи. Результаты расчетов были анонсированы в [2], ниже излагается идейная конструкция расчетного алгоритма.

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему дифференциально – алгебраических уравнений с частными производными

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(\rho, \eta) = (q, \varphi, \psi, \gamma)^T$  — вектор неизвестных,  $\mathbf{y} = (0, 0, 0, |a|^2/4)$  — заданная правая часть,  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$  — нелинейный оператор:

$$f_1 = q + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \eta} + q\varphi, \quad f_2 = \varphi - \psi + \Delta \psi - \varphi\psi, \quad f_3 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial q}{\partial \eta} - \Delta \gamma + \varphi + \gamma + \varphi\gamma, \quad f_4 = \gamma - \gamma\psi + \frac{1}{2} [\psi^2 + q^2].$$

Здесь использовано обозначение  $\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$  для радиальной части оператора Лапласа.

Система (1) описывает в безразмерном виде распространение аксиально – симметричной кильватерной волны в холодной, идеальной, релятивистской электронной жидкости (плазме), инициированной лазерным импульсом с заданной амплитудой (так называемой огибающей)

$$a(\rho, \eta) = a_* \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{\rho_*^2} - \frac{\eta^2}{l_*^2} \right\}. \quad (2)$$

Параметры импульса  $a_*$ ,  $\rho_*$ ,  $l_*$  фактически определяют геометрические размеры области, в которой рассматривается решение начально – краевой задачи для уравнений (1). Эти уравнения записаны в координатах, связанных с импульсом (см., например, [3]), поэтому интегрирование по переменной  $\eta$  ведется в направлении ее убывания; центр импульса считается неподвижным и зафиксирован в начале координат ( $\rho = \eta = 0$ ).

Уравнения (1) – (2) рассматриваются в области  $\Omega = \{(\rho, \eta) : 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, \eta \leq \eta_{\max}\}$ , где величины  $\rho_{\max}$  и  $\eta_{\max}$  определяют границу невозмущенной плазмы. Например, если кильватерная волна определяется функцией вида (2), достаточно положить  $\rho_{\max} = 4 \operatorname{div} 4.5\rho_*$ ,  $\eta_{\max} = 4 \operatorname{div} 4.5l_*$ . Исходные уравнения (1) содержат частные производные, поэтому должны быть снабжены начальными и краевыми условиями:

при  $\eta = \eta_{\max}$  задано состояние покоя, т.е. невозмущенная плазма

$$q = \varphi = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \gamma = 0 \quad \forall 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}; \quad (3)$$

при  $\rho = 0$  заданы условия аксиальной симметрии

$$q = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = 0 \quad \forall \eta \leq \eta_{\max}; \quad (4)$$

при  $\rho = \rho_{\max}$  задана невозмущенная плазма

$$q = \varphi = \psi = \gamma = 0 \quad \forall \eta \leq \eta_{\max}. \quad (5)$$

Задача (1) – (5) обладает известной спецификой [3]: аксиально – симметричная кильватерная волна, возбуждаемая лазерным импульсом вида (2), рано или поздно опрокидывается. Этот эффект связан с пересечением траекторий электронов, колебания которых переносят энергию волны. Система (1) записана в эйлеровых переменных, поэтому опрокидывание наблюдается как обращение в бесконечность (сингулярность) возмущения электронной плотности

$$N(\rho, \eta) = 1 + \varphi + \gamma + \varphi\gamma. \quad (6)$$

### 2. Предварительные преобразования.

Проанализируем свойства оператора  $\mathbf{F}$  в системе (1). Сначала разделим линейную и нелинейную составляющие так, что (1) преобразуется к виду

$$\mathbf{F}^l \mathbf{x} + \mathbf{F}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \quad \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}^l + \mathbf{F}^n.$$

Здесь  $\mathbf{F}^n = (f_1^n, f_2^n, f_3^n, f_4^n)^T$  — нелинейная часть:

$$f_1^n = q\varphi, \quad f_2^n = -\varphi\psi, \quad f_3^n = \varphi\gamma, \quad f_4^n = -\gamma\psi + \frac{1}{2}[\psi^2 + q^2].$$

Затем проведем первую факторизацию линейной части. Справедливо

**Утверждение 1.** Оператор  $\mathbf{F}^l$  допускает представление в виде

$$\mathbf{F}^l = L R, \tag{7}$$

где  $L$  — нижнетреугольный, а  $R$  — верхнетреугольный операторы:

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \eta} & I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} I & 0 & \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \eta} & 0 \\ 0 & I & \Delta - I & 0 \\ 0 & 0 & (I - \Delta) \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + I \right) & I - \Delta \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Справедливость утверждения устанавливается непосредственной проверкой.

Из утверждения 1 следует возможность придать уравнениям (1) более удобную форму

$$R \mathbf{x} = L^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{F}^n(\mathbf{x})), \tag{8}$$

которая вытекает из обратимости невырожденного матричного оператора  $L$  по явным формулам.

Проведем вторую факторизацию линейной части задачи, т.е. оператора  $R$ . Справедливо

**Утверждение 2.** Оператор  $K R$  в (8) допускает представление в виде

$$R = D \tilde{R}, \tag{9}$$

где  $D$  — диагональный, а  $\tilde{R}$  — верхнетреугольный операторы:

$$D = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I - \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} I & 0 & \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \eta} & 0 \\ 0 & I & \Delta - I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + I & I \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Справедливость утверждения устанавливается непосредственной проверкой.

Следует отметить, что обращение оператора  $D$  существенно опирается на решение краевой задачи вида

$$(I - \Delta)u \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + u = g(\rho), \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0, \quad u(\rho_{\max}) = 0, \tag{10}$$

с некоторой заданной функцией  $g(\rho)$ , причем нулевой правой части в (10) соответствует только тривиальное решение.

На этом предварительные преобразования заканчиваются, так как факторизация (9) позволяет придать уравнениям (1) искомую форму

$$\tilde{R} \mathbf{x} = D^{-1} L^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{F}^n(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{y} - \mathbf{G}^n(\mathbf{x}), \tag{11}$$

где нелинейный оператор  $\mathbf{G}^n = (g_1, g_2, g_3, g_4)^T$  имеет вид:

$$g_1 = q\varphi, \quad g_2 = -\varphi\psi, \quad g_3 = (I - \Delta)^{-1} \left( \varphi\psi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \eta} q\varphi + \varphi\gamma \right), \quad g_4 = -\gamma\psi + \frac{1}{2}[\psi^2 + q^2].$$

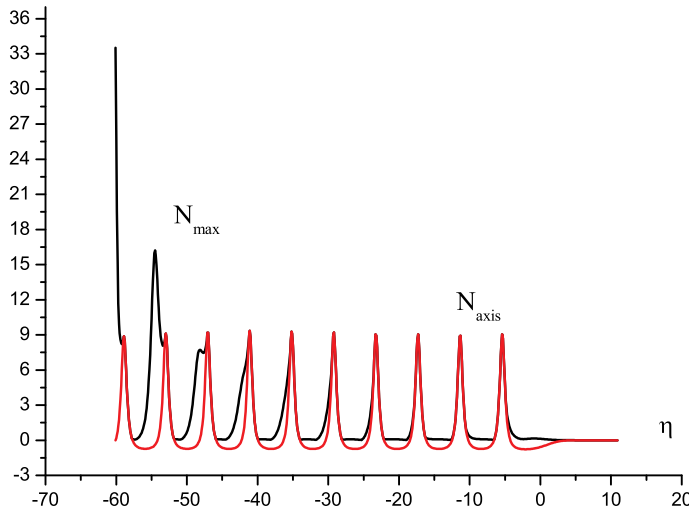


Рис. 1: Плотность электронов на оси и максимум по области

### 3. Разностный метод в линейном случае.

Изложим алгоритм решения уравнений (11) в предположении малости нелинейных слагаемых. Отметим, что в этом случае решать задачу (10) не требуется, поэтому зависимость искомых функций от  $\rho$  будем учитывать как зависимость от некоторого внешнего параметра.

Введем равномерную сетку по переменной  $\eta$  так, что  $\eta^j = \eta_{\max} + j\tau$ ,  $j = 0, -1, -2, \dots$ . Напомним, что переменная  $\eta$  изменяется в рассматриваемой задаче в сторону убывания.

Решение уравнения  $\tilde{R}\mathbf{x} = \mathbf{y}$  реализуется в три этапа:

- 1) вычисление  $\gamma^j(\rho) = |a^j(\rho)|^2/4$ ;
- 2) интегрирование задачи Коши для линейного уравнения  $\psi'' + \psi + \gamma = 0$ , которое следует проводить по схеме

$$\frac{\psi^{j+1}(\rho) - \psi^j(\rho)}{\tau} - \beta^{j+1}(\rho) = 0, \quad \frac{\beta^{j+1}(\rho) - \beta^j(\rho)}{\tau} + \psi^j(\rho) + \gamma^j(\rho) = 0, \quad (12)$$

основанной на сведениях к двум уравнениям первого порядка, так как это существенно уменьшает влияние вычислительной погрешности;

- 3) вычисление при необходимости (например, для периодического контроля за электронной плотностью) по явным формулам величин

$$q^j(\rho) = -\frac{\partial \beta^j(\rho)}{\partial \rho}, \quad \varphi^j(\rho) = \psi^j(\rho) - \Delta \psi^j(\rho).$$

Схема (12) эквивалентна стандартной схеме второго порядка точности относительно  $\tau$ , а к особенности реализации алгоритма в целом следует отнести возможность на каждом шаге сначала вычислять  $\psi^j(\rho)$ , а только затем последовательно  $\gamma^j(\rho)$  и  $\beta^j(\rho)$ .

Для завершения описания линейной схемы следует определить дискретизацию по переменной  $\rho$ : основная сетка —  $\rho_m = mh$ ,  $0 \leq m \leq M$ ,  $Mh = \rho_{\max}$ ; все функции, кроме  $q$ , определены в узлах основной сетки, а функцию  $q$  определена в смещенных на  $-0.5h$  узлах, что будем отмечать дробными по  $m$  индексами. Краевое условие  $q(0) = 0 \forall \eta^j$  определим в виде  $q_{-1/2}^j + q_{1/2}^j = 0 \forall j \leq 0$ . Для радиальной части

оператора Лапласа во внутреннем узле  $\rho_m$  ( $0 < m < M$ ) будем применять обычную аппроксимацию

$$\Delta^h f_m = \frac{1}{\rho_m} \frac{1}{h_r} \left( \rho_{m+1/2} \frac{f_{m+1} - f_m}{h_r} - \rho_{m-1/2} \frac{f_m - f_{m-1}}{h_r} \right),$$

а на оси симметрии при  $\rho_0 = 0$  — ее предел для четных функций  $\Delta^h f_0 = \frac{4}{h^2} (f_1 - f_0)$ .

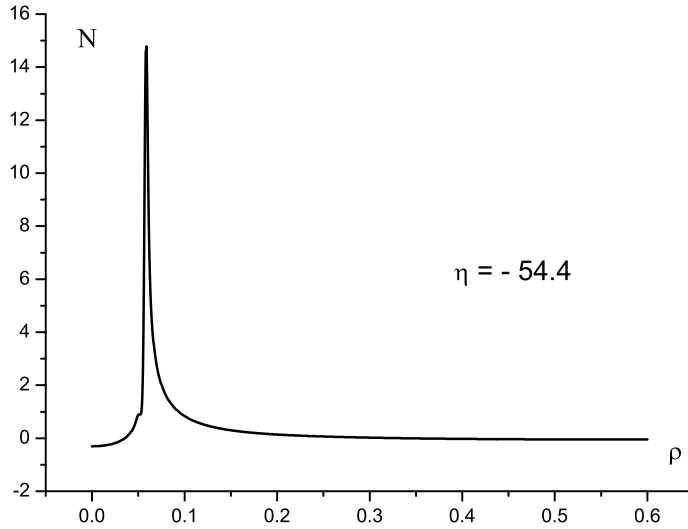


Рис. 2: Радиальное распределение плотности — второй внеосевой максимум

#### 4. Разностный метод в нелинейном случае.

Новый алгоритм базируется на соотношениях (11) – (12) и может быть представлен в виде

$$\tilde{R} \mathbf{x}^j = \mathbf{y}^j - \mathbf{G}^n(\hat{\mathbf{x}}^j), \tag{13}$$

где  $\hat{\mathbf{x}}^j = (q^{j+1}, \varphi^j, \psi^j, \gamma^j)^T$ . Эта запись означает, что для представления нелинейных слагаемых с известного, т.е. посчитанного ранее, слоя по переменной  $\eta$  используется только функция  $q^{j+1}$ . Все остальные неизвестные входят в (13) с временного слоя  $j$ , что делает схему "почти" полностью неявной. Конечно, это понижает формальный порядок аппроксимации по переменной  $\tau$  до первого и, возможно, накладывает ограничение на устойчивость. Зато все вычисления на шаге с номером  $j$  проводятся по явным формулам за исключением однократного решения задачи вида (10).

Приведем алгоритм реализации предложенной схемы по шагам:

1. вычисление  $\psi_m^j$  и  $\varphi_m^j$ :

$$\frac{\psi_m^{j+1} - \psi_m^j}{\tau} - \beta_m^{j+1} = 0, \quad \varphi_m^j = \frac{\psi_m^j - \Delta \psi_m^j}{1 - \psi_m^j};$$

2. вычисление  $\gamma_m^j$ :

$$\gamma_m^j = \left( \frac{|a_m^j|^2}{4} + \frac{1}{2} \left[ (\psi_m^j)^2 + \left( \frac{q_{m-1/2}^{j+1} + q_{m+1/2}^{j+1}}{2} \right)^2 \right] \right) \frac{1}{1 - \psi_m^j};$$

3. вычисление правой части для задачи (10):

$$g_m = \varphi_m^j \psi_m^j + \varphi_m^j \gamma_m^j - \frac{1}{\rho_m h} \left( \rho_{m+1/2} \frac{q_{m+1/2}^{j+1} - q_{m+1/2}^j}{\tau} - \rho_{m-1/2} \frac{q_{m-1/2}^{j+1} - q_{m-1/2}^j}{\tau} \right);$$

4. решение сеточной задачи (10) — определение вспомогательной функции  $\sigma_m$ :

$$(I - \Delta^h)\sigma_m = g_m;$$

5. вычисление  $\beta_m^j$ :

$$\frac{\beta_m^{j+1} - \beta_m^j}{\tau} + \gamma_m^j + \sigma_m = 0;$$

6. вычисление на сдвинутой сетке  $q_{m-1/2}^j$ :

$$q_{m-1/2}^j + \frac{\beta_m^j - \beta_{m-1}^j}{h} + q_{m-1/2}^{j+1} \frac{\varphi_m^j + \varphi_{m-1}^j}{2} = 0.$$

Все вычисления для временного слоя с номером  $j$  завершены. При необходимости увеличить формальный порядок аппроксимации по переменной  $\eta$  с первого до второго, следует повторить шаги 2 – 6.

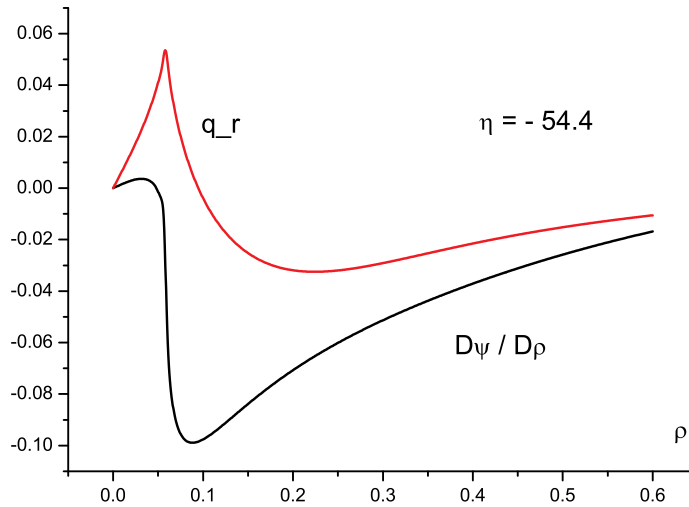


Рис. 3: Радиальное распределение импульса и градиента потенциала — второй внеосевой максимум

## 5. Результаты расчетов.

Зафиксируем параметры иллюстративного варианта:  $a_* = 0.352$ ,  $\rho_* = 0.6$ ,  $\rho_{\max} = 2.7$ ,  $l_* = 3.5$ ,  $\eta_{\max} = 11$  и сеточные характеристики  $h = 1/3200$ ,  $\tau = 1/64000$ , при которых были получены приводимые ниже графики. Вычисления проводились на СКИФ МГУ „Чебышев“.

На рисунке 1 приведены две зависимости функции электронной плотности от продольной переменной  $\eta$ :  $N_{\text{axis}}$  — на оси симметрии (при  $\rho = 0$ ) и  $N_{\text{max}}$  — максимальное значение по радиальной переменной. Сначала, на протяжении примерно 8 периодов, (напомним, что переменная  $\eta$  изменяется в сторону убывания) максимальные значения электронной плотности располагаются строго на оси симметрии. Затем помимо регулярных осевых формируется последовательность внеосевых максимумов плотности, рост которых сильно нелинеен и приводит к опрокидыванию.

На рисунках 2 и 3 приведены характерные радиальные распределения для плотности, импульса и градиента потенциала. Они взяты в  $\eta \approx -54.4$ , что соответствует второму внеосевому максимуму электронной плотности. Отметим, что в окрестности точки максимума градиент потенциала стремится к ступенчатой функции, а импульс — к излому производной. Это означает, что опрокидывание колебаний по типу разрушения решения соответствует „градиентной катастрофе“, так как сами функции (импульс, потенциал, релятивистский фактор) остаются ограниченными, а их производные имеют сингулярность.

## 6. Заключение.

Основным результатом работы является построение и реализация нового разностного метода для расчета аксиально — симметричных кильватерных волн в плазме.

От известных ранее алгоритмов его отличает:

- 1) Расчеты можно производить вплоть до опрокидывания. Ранее алгоритмы останавливались, в лучшем случае, после формирования в решении первого внеосевого максимума электронной плотности.
- 2) По эффективности он превосходит лучший из ранее применявшихся методов примерно на порядок. Приведенный выше вариант рассчитывался на СКИФ МГУ „Чебышев“ примерно 2 часа.
- 3) Имеется возможность для распараллеливания вычислений.
- 4) За счет увеличения объема вычислений примерно в 1,6 раза возможно изменить порядок точности с  $O(\tau)$  до  $O(\tau^2)$ .

При использовании нового метода для численного исследования становятся доступными более сложные задачи, например, учет эффектов движения ионов и отличия скорости движения лазерного импульса от скорости света при инициализации кильватерной волны. Также представляется перспективным переход к пространственно двумерным постановкам задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Chizhonkov E.V., Gorbunov L.M.** Calculation of a 3D axial symmetric nonlinear wakefield // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2007. — V. 22, № 6. — P. 531–541.
2. **Милютин С.В., Фролов А.А., Чи́жонков Е.В.** Опрокидывание кильватерных волн в плазме // Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности. Альманах / Под редакцией акад. В.А.Садовниченко, акад. Г.И.Савина, чл.-корр. РАН Вл.В.Воеводина. — М.: Издательство Московского университета, 2012. — С. 143–150.
3. **Фролов А.А., Чи́жонков Е.В.** Опрокидывание кильватерной волны, возбуждаемой в разреженной плазме узким лазерным импульсом // Физика плазмы. — 2011. — Т. 17, № 8. — С. 711–728.

## REFERENCES

1. **Chizhonkov E.V., Gorbunov L.M.** Calculation of a 3D axial symmetric nonlinear wakefield // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2007. — V. 22, № 6. — P. 531–541.
2. **Milutin S.V., Frolov A.A., Chizhonkov E.V.** Breaking of a wake wave in a plasma [Oprokidyvanie kil'vaternykh voln v plazme] // Supercomputer technology in science, education and industry. Almanac [Superkompyuternye tekhnologii v nauke, obrazovanii i promyshlennosti. Al'manakh] /Eds. acad. V.A. Sadovnichii, acad. G.I. Savin, member of RAS V.I. Voevodin. — Moscow: Izdatel'stvo Moscovskogo Universiteta, 2012. — P. 143–150. (in Russian)
3. **Frolov A.A., Chizhonkov E.V.** Breaking of a wake wave excited by a narrow laser pulse in a low-density plasma // Plasma physics reports. — 2011. — V. 17, № 8. — P. 663–679.