УДК 519.633

# О ПОСТРОЕНИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА РАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ[1)]

**Л.П. ШИШКИНА**

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург*
*E-mail Lida@convex.ru*

# ON CONSTRUCTING DIFFERENCE SCHEMES OF HIGHER ACCURACY ORDER ON UNIFORM GRIDS FOR A SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC REACTION-DIFFUSION EQUATION

**L.P. SHISHKINA**

*Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Ekaterinburg*

**Аннотация**

Для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии рассматривается построение $\varepsilon$-равномерно сходящихся в равномерной норме разностных схем высокого порядка точности на основе метода декомпозиции решения с использованием техники экстраполяции Ричардсона. Компоненты декомпозиции решения вычисляются на равномерных сетках.

**Ключевые слова:** параболическое уравнение реакции-диффузии, возмущающий параметр $\varepsilon$, метод декомпозиции решения, равномерные сетки, экстраполяция Ричардсона, разностная схема высокого порядка точности, $\varepsilon$-равномерная сходимость, равномерная норма.

**Summary**

For a singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equation, we consider constructing $\varepsilon$-uniformly convergent in the maximum norm difference schemes of high accuracy order based on the solution decomposition method and using the Richardson extrapolation technique. Components of the solution decomposition are computed on uniform grids.

**Key words:** parabolic reaction-diffusion equation, perturbation parameter $\varepsilon$, solution decomposition method, uniform grids, Richardson extrapolation, higher order finite difference scheme, $\varepsilon$-uniform convergence, maximum norm.

## 1. Постановка задачи. Цель работы

На множестве $\overline{G}$

$$\overline{G} = G \cup S, \quad G = D \times (0, T], \quad D = (0, d), \tag{1}$$

рассмотрим краевую задачу для одномерного сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии[2)]

$$\begin{aligned} L_{(2)}\, u(x,t) \equiv \left\{ \varepsilon^2\, a(x,t)\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c(x,t) - p(x,t)\, \frac{\partial}{\partial t} \right\} u(x,t) &= f(x,t), \quad (x,t) \in G, \\ u(x,t) &= \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S. \end{aligned} \tag{2}$$

[1)] Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 13-01-00618)

[2)] Запись $L_{(j)}$ ($\overline{G}_{(j)}, M_{(j)}$) означает, что этот оператор (область, постоянная) введен в формуле $(j)$.

Функции $a(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$, $f(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{G}$ и $S$ соответственно, причем[3] $a(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t) > m$, $|f(x,t)| \leqslant M$, $(x,t) \in \overline{G}$; $|\varphi(x,t)| \leqslant M$, $(x,t) \in S$; параметр $\varepsilon$ принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. Здесь $S = S_0 \cup S^L$, $S_0$ и $S^L$ — нижняя и боковая части границы, $S^L = S_1^L \cup S_2^L$, $S_1^L$ и $S_2^L$ — левая и правая части боковой границы; $S_0 = \overline{S}_0$. Считаем, что данные задачи (2), (1) на множестве $S^* = S_0 \cap \overline{S}^L$ — множестве угловых точек, удовлетворяют условиям согласования, обеспечивающим требуемую по построениям гладкость решения на $\overline{G}$. При малых значениях параметра $\varepsilon$ в окрестности множества $S^L$ появляется параболический пограничный слой.

Наша **цель** — для начально-краевой задачи (2), (1) на основе метода декомпозиции сеточного решения, использующего только равномерные сетки, и техники экстраполяции Ричардсона построить разностную схему, сходящуюся $\varepsilon$-равномерно с высоким порядком точности (со вторым/третьим по $t$ и четвертым/шестым по $x$ с точностью до логарифмического сомножителя).

**2. Схема метода декомпозиции сеточного решения**

**2.1** Для решения $u(x,t)$ дифференциальной задачи (2), (1) строим следующие декомпозиции

$$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{3а}$$

где $U(x,t)$ и $V(x,t)$ — регулярная и сингулярная компоненты решения соответственно. Для регулярной компоненты используем следующее разложение из трех членов

$$U(x,t) = U_0(x,t) + \varepsilon^2 U_1(x,t) + v_U(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{3б}$$

а сингулярную компоненту $V(x,t)$ представим в виде суммы функций

$$V(x,t) = V_1(x,t) + V_2(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}. \tag{3в}$$

Для компонент из представления (3) строятся дифференциальные задачи (см., например, [1, 2]).

**2.2** Для краевой задачи (2), (1) строим разностные схемы, аппроксимируя соответствующие задачи для компонент. При не слишком малых значениях параметра $\varepsilon$, а именно, при условии

$$\varepsilon \geqslant \varepsilon_0(N), \quad \varepsilon_0(N) = m\,\ell^{-1}\,d\,\ln^{-1} N, \tag{4}$$

где $m$ — произвольное число из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = \min_{\overline{G}}^{1/2}\left[a^{-1}(x,t)\,c(x,t)\right]$, $\ell = 2$, задачу (2), (1) аппроксимируем стандартной разностной схемой на равномерной сетке $\overline{G}_h$

$$\Lambda z(x,t) \equiv \{\varepsilon^2\, a(x,t)\,\delta_{x\overline{x}} - c(x,t) - p(x,t)\,\delta_{\overline{t}}\}z(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G_h, \tag{5}$$

$$z(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S_h.$$

$$\overline{G}_h = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0, \quad \overline{G}_h = G_h \cup S_h, \tag{6}$$

— равномерная сетка с числом узлов $N+1$ и $N_0+1$ в сетках $\overline{\omega}$ по $x$ и $\overline{\omega}_0$ по $t$ соответственно. По решению разностной схемы (5), (6) строим интерполянт

$$\overline{z}_u(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \ \textit{при условии} \ \ (4), \tag{7а}$$

— решение схемы {(5), (6); (4)}, аппроксимирующей дифференциальную задачу (2), (1) при условии (4).

Строим разностные схемы при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon$, а именно, при условии

$$\varepsilon < \varepsilon_0(N)_{(4)}. \tag{8}$$

[3] Через $M$ (через $m$) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра $\varepsilon$. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

Функцию $U(x,t)$ и ее компоненты из представления (3б) аппроксимируем на равномерной сетке (6). Находим решения соответствующих разностных схем (см., например, [1, 2]) и получаем функцию $z_U(x,t) = z_{U_0}(x,t) + \varepsilon^2 z_{U_1}(x,t) + z_{v_U}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$. По значениям $z_U(x,t)$ в узлах сетки $\overline{G}_h$ на элементарных разбиениях множества $\overline{G}$, порождаемых сеткой $\overline{G}_h$, строим билинейный интерполянт $\overline{z}_U(x,t), (x,t) \in \overline{G}$. Функцию $z_U(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, а также ее интерполянт $\overline{z}_U(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, назовем решениями разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные задачи для регулярных компонент при условии (8).

Сингулярные компоненты $V_j(x,t)$ из (3в) аппроксимируем на равномерных сетках, строящихся на подобластях $\overline{G}_j^{\,\sigma}$ из $\overline{G}$, примыкающих к границам $S_j^L$, $j = 1,2$:

$$\overline{G}_j^{\,\sigma} = G_j^\sigma \cup S_j^\sigma, \quad G_j^\sigma = D_j^\sigma \times (0,T], \quad j = 1,2, \quad D_1^\sigma = (0,\sigma), \quad D_2^\sigma = (d-\sigma, d), \tag{9}$$
$$\sigma = \sigma(\varepsilon,\, N,\, \ell) = \min\left[d,\, m^{-1}\,\ell\,\varepsilon\,\ln N\right].$$

Решая сеточные задачи на равномерных сетках $\overline{G}_{j\,h}^{\,\sigma} = \overline{\omega}_j^{\,\sigma} \times \overline{\omega}_0$, $\overline{G}_{j\,h}^{\,\sigma} = G_{j\,h}^\sigma \cup S_{j\,h}^\sigma$, $j = 1,2$, где $\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_{0\,(6)}$, $\overline{\omega}_j^{\,\sigma}$ — сетка на $\overline{D}_j^{\,\sigma}$ с шагом $h^\sigma = \sigma N^{-1}$ и числом узлов $N+1$, находим функции $z_{V_j}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_{j\,h}^{\,\sigma}$, и их интерполянты $\overline{z}_{V_j}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_j^{\,\sigma}$. Функции $z_{V_j}(x,t)$ и $\overline{z}_{V_j}(x,t)$ вне множества $\overline{G}_j^{\,\sigma}$ считаем равными нулю. Полагаем $\overline{z}_V(x,t) = \overline{z}_{V_1}(x,t) + \overline{z}_{V_2}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$. Функция $\overline{z}_V(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^{\,\sigma}$ — решение сеточных задач, аппроксимирующих дифференциальные задачи для сингулярных компонент при условии (8).

Назовем решением схем, аппроксимирующих дифференциальную задачу (2), (1) при условии (8), функцию

$$\overline{z}_u(x,t) = \overline{z}_U(x,t) + \overline{z}_V(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \ \ \textit{при условии} \ \ (8). \tag{7b}$$

Совокупность используемых выше разностных схем образует *базовую схему метода декомпозиции решения*. На ее основе построена функция $\overline{z}_{u\,(7,\mathrm{b})}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, аппроксимирующая решение задачи (2), (1). В [2] для решения $\overline{z}_u(x,t)$ получена $\varepsilon$-равномерная оценка

$$|u(x,t) - \overline{z}_{u\,(7,\mathrm{b})}(x,t)| \leqslant M\,[N^{-2}\,\ln^2 N + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}. \tag{10}$$

### 3. Экстраполяция Ричардсона на основе классической схемы

Опишем метод экстраполяции Ричардсона, используемый для повышения точности решений разностной схемы (5). На множестве $\overline{G}$ строим равномерные по $x$ и $t$ сетки

$$\overline{G}_h^{\,i} = \overline{\omega}^{\,i} \times \overline{\omega}_0^i, \quad i = 1,2,3. \tag{11a}$$

Здесь $\overline{G}_h^{\,1}$ есть $\overline{G}_{h(6)}$, в которой $h_x^1 = dN^{-1}$ — шаг сетки $\overline{\omega}^{\,1}$ с числом узлов $N+1$, а $h_t^1 = TN_0^{-1}$ — шаг сетки $\overline{\omega}_0^1$ с числом узлов $N_0+1$; $\overline{G}_h^{\,2}$ и $\overline{G}_h^{\,3}$ — "прореженные" сетки. Шаг $h_x^2$ сетки $\overline{\omega}^{\,2}$ в $k$ раз больше, чем шаг $h_x^1$ сетки $\overline{\omega}^{\,1}$, т.е. $h_x^2 = k\,d\,N^{-1}$ и $k^{-1}N+1$ — число узлов в сетке $\overline{\omega}^{\,2}$. Шаг $h_t^2$ сетки $\overline{\omega}_0^2$ в $k^2$ раз больше, чем шаг $h_t^1$ сетки $\overline{\omega}_0^1$, т.е. $h_t^2 = k^2\,T\,N_0^{-1}$ и $k^{-2}N_0+1$ — число узлов в сетке $\overline{\omega}_0^2$. Шаг $h_x^3$ сетки $\overline{\omega}^{\,3}$ в $k^2$ раз больше, чем шаг $h_x^2$ сетки $\overline{\omega}^{\,2}$, т.е. $h_x^{=}k^2\,d\,N^{-1}$ и $k^{-2}N+1$ — число узлов в сетке $\overline{\omega}^{\,3}$. Шаг $h_t^3$ сетки $\overline{\omega}_0^3$ в $k^2$ раз больше, чем шаг $h_t^2$ сетки $\overline{\omega}_0^2$, т.е. $h_t^3 = k^4\,T\,N_0^{-1}$ и $k^{-4}N_0+1$ — число узлов в сетке $\overline{\omega}_0^3$. Для простоты рассмотрим случай двух равномерных вложенных сеток. Пусть

$$\overline{G}_h^{\,0} = \overline{G}_h^{\,1} \cap \overline{G}_h^{\,2} \tag{11б}$$

При $k$ целом ( $k \geqslant 2$ ) $\overline{G}_h^{\,0} = \overline{G}_h^{\,1}$, а при $k$ нецелом $\overline{G}_h^{\,0} \neq \overline{G}_h^{\,1}$; $\overline{G}_h^{\,0} = \overline{\omega}^0 \times \overline{\omega}_0^0$. Пусть $z^i(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h^{\,i}$, $i = 1,\,2$ — решения разностных схем

$$\Lambda_{(5)} z^i(x,t) = f(x,t), \ \ (x,t) \in G_h^i, \quad z^i(x,t) = \varphi(x,t), \ \ (x,t) \in S_h^i, \quad i = 1,2. \tag{12a}$$

Полагаем

$$z^0(x,t) = \gamma_1\, z^1(x,t) + \gamma_2\, z^2(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}_h^{\,0}, \tag{12б}$$

где $\gamma_i = \gamma_i(k), i = 1, 2,\ \gamma_1 = -(k^2 - 1)^{-1},\ \gamma_2 = 1 - \gamma_1 = k^2\,(k^2 - 1)^{-1}$. Разностную схему (12), (11), построенную на основе схемы (5), (6), назовем схемой Ричардсона на двух вложенных сетках. Функцию $z^0_{(12)}(x,t),\ (x,t) \in \overline{G}{}^0_h$, назовем решением схемы Ричардсона (12), (11); функции $z^1_{(12)}(x,t),\ (x,t) \in \overline{G}{}^1_h$, и $z^2_{(12)}(x,t),\ (x,t) \in \overline{G}{}^2_h$, назовем компонентами, порождающими решение схемы (12), (11). Решение $z^0(x,t)$ схемы Ричардсона сходится к решению $u(x,t)$ краевой задачи (2), (1) с оценкой

$$|u(x,t) - z^0(x,t)| \leqslant M\ \left[\varepsilon^{-4} N^{-4} + N_0^{-2}\right], \quad (x,t) \in \overline{G}{}^0_h, \tag{13}$$

т.е. с четвертым порядком точности по $x$, однако, при фиксированных значениях $\varepsilon$ и при достаточно ограничительном условии $N^{-1} = o(\varepsilon),\ N_0^{-1} = o(1)$ (см. [2]).

### 4. Метод Ричардсона для схемы метода декомпозиции

Для повышения точности сеточных решений, полученных на основе базовой схемы метода декомпозиции решения, мы будем применять технику экстраполяции Ричардсона, описанную в разд. **3**. Повторяем построения разд. **2.2**, применяя в каждом случае вместо одной сетки две (или три) вложенные сетки.

Построение схемы повышенной точности рассматриваем при не слишком малых значениях $\varepsilon$

$$\varepsilon \geqslant \varepsilon_0(N), \quad \varepsilon_0(N) = m\,\ell^{-1}\,d\,\ln^{-1} N, \tag{14}$$

и при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon$

$$\varepsilon < \varepsilon_0(N), \quad \varepsilon_0(N) = \varepsilon_{0\,(14)}(N), \tag{15}$$

где $m = m_{(4)}$, а $\ell = 4$ в **отличие** от разд. **2.2**.

При условии (14) по решению разностной схемы Ричардсона (12), (11) на двух равномерных вложенных сетках строим интерполянт

$$\widehat{z}_u(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G} \ \textit{при условии} \ \ (14), \tag{16a}$$

который назовем решением схемы {(12), (11), (14)}, аппроксимирующей задачу (2), (1) при условии (14).

Пусть выполняется условие (15). Строим сеточную аппроксимацию регулярной компоненты $U(x,t)$, используя экстраполяцию Ричардсона на вложенных равномерных сетках

$$\overline{G}{}^i_h = \overline{G}{}^i_{h\,(11)} = \overline{\omega}^{\,i} \times \overline{\omega}^i_0, \quad i = 1, 2; \quad \overline{G}{}^0_h = \overline{G}{}^0_{h\,(11)}. \tag{17}$$

В отличие от разд. **2.1** при аппроксимации задачи для $U_0(x,t)$ используем ее "продолжение" на множество $\overline{G}{}^e = \overline{D}{}^e \times [0,T]$, $\overline{D}{}^e = [-h^0, d + h^0]$, где $h^0$ – шаг "общей" сетки $\overline{\omega}^{\,1}$. На множестве $\overline{G}{}^e$ строим вложенные сетки $\overline{G}{}^{e\,i}_h = \overline{\omega}^{\,e\,i} \times \overline{\omega}^i_0$, $i = 1, 2$; $\overline{G}{}^{e\,0}_h = \overline{G}{}^{e\,1}_h \cap \overline{G}{}^{e\,2}_h$, где $\overline{\omega}^{\,e\,i}$ – "продолженные" равномерные сетки, $\overline{\omega}^{\,e\,i} \cap \overline{D} = \overline{\omega}^{\,i}$, $i = 1, 2$. Находим сеточные решения для компонент $z^{e\,i}_{U_0}(x,t)$ и $z^i_{U_1}(x,t)$, $z^i_{v_U}(x,t)$ на сетках $\overline{G}{}^{e\,i}_h$ и $\overline{G}{}^i_h$ соответственно. Полагаем $z^i_U(x,t) = z^{e\,i}_{U_0}(x,t) + \varepsilon^2 z^i_{U_1}(x,t) + z^i_{v_U}(x,t)$, $i = 1, 2$. На множестве $\overline{G}{}^0_h$ определим функцию $z^0_U(x,t)$

$$z^0_U(x,t) = \gamma_1\, z^1_U(x,t) + \gamma_2\, z^2_U(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}{}^0_h, \quad \gamma_i = \gamma_{i\,(12)}(k), \tag{18}$$

– сеточную аппроксимацию функции $U(x,t)$, построенной на основе техники Ричардсона. По функции $z^0_U(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}{}^0_h$, строим ее интерполянт

$$\widehat{z}^{\,0}_U(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}. \tag{19}$$

Функция $\widehat{z}^{\,0}_U(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, есть континуальная аппроксимация функции $U(x,t)$.

При условии (15), используя технику Ричардсона, построим сеточную аппроксимацию сингулярной компоненты $V(x,t)$. На $\overline{G}$ введем множества $\overline{G}{}^\sigma_j$

$$\overline{G}{}^\sigma_j = \overline{G}{}^\sigma_{j\,(9)} = G^\sigma_j \cup S^\sigma_j, \quad \sigma = \sigma_{(9)}(\varepsilon,\, N,\, \ell) \ \textit{при} \ \ell = 4, \ \ j = 1, 2. \tag{20}$$

На множествах $\overline{G}_j^{\sigma}$ строим вложенные сетки (подобно сеткам $\overline{G}_{h\,(17)}^{i}$, $\overline{G}_{h\,(17)}^{0}$)

$$\overline{G}_{j\,h}^{\sigma\,i} = \overline{G}_{j\,h\,(21)}^{\sigma\,i} = \overline{\omega}_j^{\sigma\,i} \times \overline{\omega}_0^{i},\ i = 1,2;\ \ \overline{G}_{j\,h}^{\sigma\,0} = \overline{G}_{j\,h\,(21)}^{\sigma\,0} = \overline{G}_{j\,h}^{\sigma\,1} \cap \overline{G}_{j\,h}^{\sigma\,2},\ j = 1,2. \tag{21}$$

Решая сеточные задачи на $G_{j\,h}^{\sigma\,i}$, находим $z_{V_j}^{i}(x,t)$, $i = 1,2$. На множестве $G_{j\,h}^{\sigma\,0}$ определим функцию

$$z_{V_j}^{0}(x,t) = \gamma_1\, z_{V_j}^{1}(x,t) + \gamma_2\, z_{V_j}^{2}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}_{j\,h}^{\sigma\,0}, \quad j = 1,2, \quad \gamma_i = \gamma_{i\,(12)}, \quad i = 1,2. \tag{22}$$

Функция $z_{V_j}^{0}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_{j\,h}^{\sigma\,0}$, есть сеточная аппроксимация функции $V_j(x,t)$, построенная с использованием техники Ричардсона. Построим ее интерполянт

$$\widehat{z}_{V_j}^{0}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}_j^{\sigma\,0}, \quad j = 1,2; \tag{23}$$

вне множества $\overline{G}_j^{\sigma 0}$ функцию $\widehat{z}_{V_j}^{0}(x,t)$ полагаем равной нулю. Полагаем

$$\widehat{z}_{V}^{0}(x,t) = \widehat{z}_{V_1}^{0}(x,t) + \widehat{z}_{V_2}^{0}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}.$$

Назовем решением разностной схемы Ричардсона, аппроксимирующей дифференциальную задачу (2), (1) при условии (15), следующую функцию:

$$\widehat{z}_u(x,t) = \widehat{z}_U^{0}(x,t) + \widehat{z}_V^{0}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G},\ \ \textit{при условии} \ \ (15). \tag{16b}$$

Таким образом, построенная функция $\widehat{z}_{u\,(16,\mathrm{b})}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, аппроксимирует решение дифференциальной задачи (2), (1). Эту функцию, как и сеточные функции $z_{U_0}^{\varepsilon\,0}(x,t)$, $z_{U_1}^{0}(x,t)$, $z_{vU}^{0}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h^{0}$, и $z_{V_j}^{0}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_{j\,h}^{\sigma\,0}$, $j = 1,2$, назовем (соответственно континуальным и сеточным) решениями разностной *схемы Ричардсона метода декомпозиции решения*.

Для решения разностной схемы Ричардсона метода декомпозиции решения, в [2] получена следующая $\varepsilon$-равномерная оценка: $|u(x,t) - \widehat{z}_u(x,t)| \leqslant M\,[N^{-4}\,\ln^4 N + N_0^{-2}]$, $\quad (x,t) \in \overline{G}$.

**5. Заключение.**

Описанная выше техника позволяет построить схему Ричардсона типа (12) на трех вложенных сетках $\overline{G}_h^{1}$, $\overline{G}_h^{2}$ and $\overline{G}_h^{3}$ с решением $z^0(x,t)$ на множестве $\overline{G}_h^{0}$, $\overline{G}_h^{0} = \overline{G}_h^{1} \cap \overline{G}_h^{2} \cap \overline{G}_h^{3}$. Применение такой схемы Ричардсона к базовой схеме декомпозиции решения (аналогично приведенным здесь построениям) приводит к схеме более высокого порядка точности, решение которой $\widehat{z}_u(x,t)$ сходится $\varepsilon$-равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}(N^{-6}\,\ln^6 N + N_0^{-3})$ на множестве $\overline{G}$.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. **Shishkin G.I.** Difference scheme of the solution decomposition method for a singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equation // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling — 2010. — V. 25, № 3. — P. 261–278.
2. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Схема Ричардсона метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50, № 12. — С. 2113–2133.

**REFERENCES**

1. **Shishkin G.I.** Difference scheme of the solution decomposition method for a singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equation // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling — 2010. — V. 25, № 3. — P. 261–278.
2. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** A Richardson scheme of the decomposition method for solving singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equation // Computational mathematics and mathematical physics. — 2010. — V. 50, № 12. — P. 2003–2022.